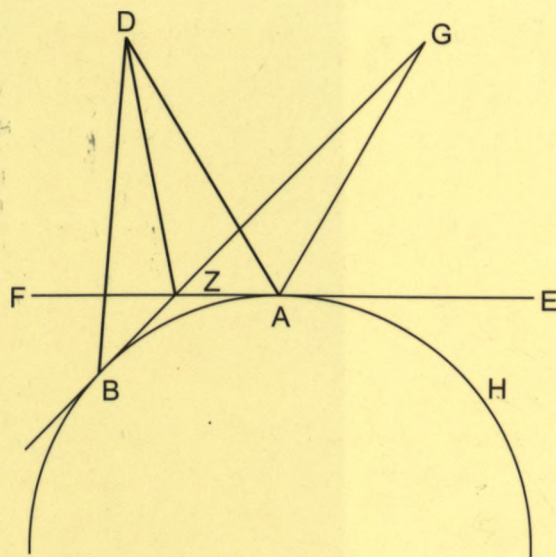


Czyt. Pomerz
Biblioteka
Główna
UMK Toruń

890568

SC t.40

STUDIA COPERNICANA



**WITELONA
PERSPEKTYWY
Księga V, VI, VII**

VIII

530

40

530

40



STUDIA COPERNICANA

UMK Toruń

Jacket: figure from
Witelo's *Perspectiva* V, 5;

binding: figure from Copernicus
De revolutionibus III, 20.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA
ZAKŁAD FILOZOFII
WITELONA PERSPEKTYWY
KSIĘGA V, VI, VII

WITELONA PERSPEKTYWY
ANACONTOC AIDUTS
KSIĘGA V, VI, VII

PRZEKŁAD NA JEZYK POLSKI
Z WSTĘPEM I KOMENTARZAMI

Przełożył z języka łacinnego
Witold Wydziewicz

Wzrost, apokaliptyczny przekład i komentarz
Andrzej Białki i Witold Wydziewicz

WYDAWNICTWO DNR
TORUŃ 2003

**NICHOLAS COPERNICUS UNIVERSITY
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
CENTRE FOR COPERNICAN STUDIES**

STUDIA COPERNICANA

XL

**UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA
ZAKŁAD FILOLOGII KLASYCZNEJ I RECEPCJI KULTURY
ANTYCZNEJ
POLSKA AKADEMIA NAUK
ZAKŁAD BADAŃ KOPERNIKAŃSKICH IHN**

Witelo

**WITELONA PERSPEKTYWY
KSIĘGA V, VI, VII**

**PRZEKŁAD NA JĘZYK POLSKI
ZE WSTĘPEM I KOMENTARZAMI**

Przekład z języka łacińskiego
Witold Wróblewski

Wstęp, opracowanie przekładu i komentarz

Andrzej Bielski i Witold Wróblewski

**WYDAWNICTWO UMK
TORUŃ 2003**

KOMITET REDAKCYJNY

MARIAN BISKUP, JERZY BURCHARDT, STANISŁAW MOSSAKOWSKI,

JOHN D. NORTH, GRAŻYNA ROSIŃSKA (zastępca redaktora naczelnego),

ALAIN SEGONDS, PAVEL SPUNAR, SABETAI UNGURU,

WITOLD WRÓBLEWSKI (redaktor naczelný)

RADA WYDAWNICZA

ANDRZEJ BIELSKI, JANUSZ MAŁLEK, GRAŻYNA ROSIŃSKA

WIESŁAW WÓJCIK, WITOLD WRÓBLEWSKI

ISSN 0081 – 6701

Printed in Poland

© Copyright by Wydawnictwo
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Toruń 2003

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU
MIKOŁAJA KOPERNIKA

ul. Gagarina 39, 87-100 Toruń

REDAKCJA: tel. (056) 611 42 95, fax 611 47 05

e – mail: dwyd@uni.torun.pl

DYSTRYBUCJA: tel./fax (056) 611 42 38

e – mail: ksiazki@umk.pl

www.wydawnictwo.uni.torun.pl



Wydanie I. Nakład 200 egz.

Druk: Zakład Usług Poligraficznych DRUK-TOR
87-100 Toruń, ul. Nieszawska 33, tel. (0 prefix 56) 678 10 19

W.u 23/04

SPIS TREŚCI

Przedmowa.....	IV
I. Wstęp.....	7
1. Stan badań nad księgą V, VI, VII.....	1
2. Metodyczna ocena księgi V, VI, VII geometrycznej	
Wiedza w świetle współczesnej teorii geometrycznej.....	7
3.1 Otwór i powierzchnia Łobaczewskiego.....	8
3.2 Zastosowanie polskiego pedala.....	22
3.3 Porównanie obrazów w geometriach płaskich.....	13
3.4 Twierdzenie o braku w geometriach kłótni regularnych.....	18
3.5 Porównanie obrazów w geometriach wyprostowanych i okrągłych.....	22
4. Przegląd treści księgi V, VI, VII.....	27
4.1 Przegląd treści księgi V.....	30
4.2 Przegląd treści księgi VI.....	40
4.3 Przegląd treści księgi VII.....	48
5. Znaczenie Wprowadzenia do dzieła Almagesta.....	51
II. Księga V Perspektywy.....	54
Wprowadzenie jako część księgi V.....	54
Komentarz.....	109
III. Księga VI Perspektywy.....	123
Wprowadzenie jako część księgi VI.....	123
Komentarz.....	232
IV. Księga VII Perspektywy.....	308
Wprowadzenie jako część.....	308
Komentarz.....	322
V. Zakończona księga V (opracował A. Dąbrowski).....	445
VI. Wskazówki.....	452

PAMIĘCI

PROFESORA DRA HAB. PAWŁA CZARTORYSKIEGO

KOMITET REDAKCYJNY

MARIAN BISKUP, JERZY BURCHACZ, STANISŁAW MOSKOWSKI

JOHN D. NORTH, ORAZYNIA KORŃSKA

ALAIN BOCKREUX, PAVEL ŠTEFAN, JAN TALAMON

WOLFF WOLFF (Wolff) (Wolff)

REDAKCYJNY ADRES

ANONIMOWA 1, 01-644 WARSZAWA

WOLFF WOLFF, WOLFF WOLFF

1997 - 1998

Printed in Poland

© Copyright by Wydawnictwo
Litteraria Munksgaard
1997

WYDAWNICTWO LITTERARIA

ALAN KORŃSKA

at Copyright by Wydawnictwo

1997 - 1998

Wydawnictwo Litteraria

PROFESOR GŁÓWNY PAWŁA CZARNYCH

Wydawnictwo Litteraria

Wydawnictwo Litteraria

Wydawnictwo Litteraria

Wydawnictwo Litteraria

1997 - 1998

SPIS TREŚCI

Przedmowa.....	IX
I. Wstęp.....	1
1. Stan badań nad księgą V, VI, VII.....	5
2. Merytoryczna ocena księgi V, VI, VII <i>Perspektywy</i>	
Witelona w świetle współczesnej optyki geometrycznej.....	7
3.1 Obraz rzeczywisty i obraz pozorny.....	9
3.2 Zjawisko odbicia światła.....	12
3.3 Powstawanie obrazów w zwierciadłach płaskich.....	15
3.4 Powstawanie obrazu w zwierciadłach kulistych wypukłych	18
3.5 Powstawanie obrazu w zwierciadłach wypukłych	
cylindrycznych i stożkowych.....	28
4. Przegląd treści księgi V, VI, VII.....	29
4.1 Przegląd treści księgi V.....	30
4.2 Przegląd treści księgi VI.....	40
4.3 Przegląd treści księgi VII.....	46
5. Stosunek Witelona do dzieła Alhazena <i>De Aspectibus</i>	51
II. Księga V <i>Perspektywy</i>	54
Przekład na język polski księgi V.....	54
Komentarz.....	139
III. Księga VI <i>Perspektywy</i>	155
Przekład na język polski księgi VI.....	155
Komentarz.....	274
IV. Księga VII <i>Perspektywy</i>	308
Przekład na język polski.....	308
Komentarz.....	413
V. Załącznik do księgi V (opracował A. Bielski).....	446
VI. Skorowidz.....	452

Contents

Foreword.....	IX
I. Preface.....	1
1. Introduction.....	1
2. State of research on Books V, VI, VII.....	5
3. Critical assessment of Books V, VI, VII in Witelo's <i>Perspectiva</i> in light of contemporary optics.....	7
3.1. Real and apparent image	9
3.2. Phenomenon of reflexion of light.....	12
3.3. Images formation by plane mirrors.....	15
3.4. Images formation by spherical convex mirrors.....	18
3.5. Images formation by convex cylindrical and cone mirrors.....	28
4. The contents of Book V, VI, VII.....	29
4.1. Contents of Book V.....	30
4.2. Contents of Book VI.....	40
4.3. Contents of Book VII.....	46
5. The relation of Witelo's <i>Perspectiva</i> to Alhazen's <i>De Aspectibus</i> ..	51
II. Book V <i>Perspectiva</i>	54
Polish Translation of Book V.....	54
Notes and Commentaries on Book V.....	139
III. Book VI <i>Perspectiva</i>	155
Polish Translation of Book VI.....	155
Notes and Commentaries of Book VI.....	274
IV. Book VII <i>Perspectiva</i>	308
Polish Translation of Book VII.....	308
Notes and Commentaries on Book VII.....	413
V. Appendix (by A. Bielski).....	446
VI. Index.....	452

Przedmowa

Do rąk czytelnika oddajemy kolejny trzeci już tom przekładów *Perspektywy Witelona*, obejmujący księgi V, VI i VII, poświęcony pamięci prof. dra hab. Pawła Czartoryskiego, wieloletniego redaktora *Studia Copernicana* oraz gorącego rzecznika przybliżenia polskiemu czytelnikowi i upowszechnienia na świecie dzieła Witelona, pierwszego polskiego uczonego o międzynarodowym znaczeniu. Dzięki wytrwałym staraniom Profesora, którego przedwczesna i niespodziewana śmierć zabrała z naszego grona, w serii *Studia Copernicana* ukazało się siedem tomów, w których znalazło się krytyczne wydanie tekstu łacińskiego *Perspektywy* ksiąg I, II, III, V, przekłady na język angielski i polski oraz monograficzne studia na temat życia i poglądów Witelona. Profesor wielką wagę przywiązywał do prac nad Witelonem, uważając, że zasługuje on na ważne miejsce w dziejach polskiej kultury i nauki. Z jego też inicjatywy rozwijały się studia nad Witelonem za granicą, a w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku powstał w Uniwersytecie Mikołaja Kopernika interdyscyplinarny zespół, którego celem było przełożenie na język polski i merytoryczne opracowanie optycznego dzieła Witelona. Z prawdziwą przykrością uświadomiliśmy sobie fakt, że nie będą już wspierały zespołu rady i zachęty Profesora.

W pierwszym tomie, wydanym przez Ossolineum w 1991 roku (jako tom XXIX w serii *Studia Copernicana*) znalazł się przekład księgi II i III z komentarzem, poprzedzony obszernym opracowaniem, poświęconym życiu i działalności Witelona, recepcji jego dzieła w Polsce i na świecie oraz szczegółowym analitycznym omówieniem treści. Tam także dodana została obszerna bibliografia. Tom drugi został wydany w 1994 roku (jako tom XXXIII w serii *Studia Copernicana*) przez Instytut Historii Nauki Polskiej Akademii Nauk przy finansowym wsparciu Uniwersytetu Mikołaja Kopernika oraz Komitetu Badań Naukowych. W tym tomie znalazł się przekład księgi IV dzieła Witelona, w którym Witelo, jak sam pisze, dokonał przeglądu własności rzeczy widzialnych (*proprietates*

omnium visibilium), które przedstawił za pomocą matematycznych rozważań. Przedmiotem wykładu były cechy widzialne oraz złudzenia występujące w procesie widzenia. Wstęp do tego tomu przynosi stan badań nad księgą IV i analizę treści, a ponadto odrębny rozdział został poświęcony porównaniu koncepcji księgi IV dzieła Witelona i jego stosunku do wykładu Alhazena na ten sam temat, przedstawionego w *De aspectibus*. Na przykładzie wspomnianej problematyki podjęto po raz pierwszy próbę wyjaśnienia zagadnienia będącego przedmiotem sprzecznych wypowiedzi na temat, w jakim stopniu Witelo pozostawał pod wpływem poglądów arabskiego uczonego. Dotąd kwestia ta nie była przedmiotem gruntownych studiów.

Obecny trzeci tom (jako tom XL w serii *Studia Copernicana*), wydany przez Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, zawierający opracowania kolejnych ksiąg *Perspektywy* powstał w ramach grantu Komitetu Badań Naukowych. Podobnie jak w przypadku poprzednich ksiąg również jest to pierwszy przekład na język polski. Przy opracowaniu ksiąg VI i VII z braku naukowego wydania tekstu Witelona korzystaliśmy z wydania F. Risnera, wspierając się rękopisami, których wykaz znajduje się we wstępie. Wyjątek stanowi księga V, której krytyczny tekst łaciński z przekładem na język angielski, ze wstępem i komentarzami wydał M. A. Smith w *Studia Copernicana* (tom XXIII). Podczas pracy nad przekładem tej właśnie księgi korzystaliśmy z tego wydania.

Witold Wróblewski

Foreword

This is the third successive volume of translations of Vitelo's Perspectiva, including Books V, VI, VII, dedicated to the memory of Prof. Paweł Czartoryski, the longtime editor of Studia Copernicana and the propagator of Vitelo's work in Poland and abroad. Thanks to Professor's ceaseless efforts, abruptly suddenly by his untimely death, seven volumes have already been published in Studia Copernicana series and those included critical Latin edition of Perspectiva of Books I, II, III and V, Polish and English translations and monographic essays examining Vitelo's life and views. Professor Czartoryski highly regarded Vitelo's works and considered his contribution to Polish science as very significant. He inspired studies on Vitelo abroad and in 1979 the interdisciplinary team was formed at the Nicholas Copernicus University which has been working on translating and critically assessing optical work of Vitelo. Regrettably after Professor Czartoryski's death the team is not going to be supported anymore by his inspirational encouragement and advice.

Volume I of Perspectiva, published by Ossolineum in 1991 (Volume XXIX in Studia Copernicana series) included translation and comments of Books II, III preceded by an extensive study and examination of Vitelo's life and work, worldwide perception of his work and detailed analysis of the text. It also included a very extensive bibliography. Volume II including Book IV of Perspectiva was published in 1994 (Volume XXXIII in Studia Copernicana series) by the Institute for the History of Sciences at the Polish Academy of Sciences and was supported financially by the Nicholas Copernicus University of Toruń and State Committee for Scientific Research (KBN). This Volume included translation of Vitelo's Book IV where he revised the properties of visible objects (proprietas omnium visibilium),

which he presented as mathematical analysis, and focused on visible features and illusions. The introduction to volume II also examines the text and research on Book IV as well as comparison between Vitelo's study and Alhazen's *De aspectibus*. This was the first attempt to explain the existing conflicting research on the degree of Arabic scientist Alhazen's influence over Vitelo's work.

It was possible to publish by Nicholas Copernicus University of Toruń this current Volumen III, including translations of three of the remaining books of *Perspectiva*, owing to a grant from the State Committee for Scientific Research (KBN). This again is the first Polish translation of Vitelo's work. Whilst working on Books VI and VII we have used F. Risner's edition and manuscripts which are listed in the introduction. The one exception is Book V, edited by M. A. Smith and published by *Studia Copernicana* (Vol. XXIII) which included Latin critical text and its English translation, introduction and commentary which we have used.

Witold Wróblewski

I. WSTĘP

1. WPROWADZENIE

Do rąk Czytelnika oddajemy kolejny tom przekładu dzieła Witelona pt. *Perspektywa*, obejmujący księgi V–VII tego średniowiecznego optycznego traktatu. Poprzednie dwa tomy zawierały księgi II i III¹ oraz księgę IV². Swój wykład optyki zaczyna Witelo od przedstawienia ogólnych i podstawowych wiadomości z optyki w księdze II, aby następnie w księdze III i IV przejść do zagadnień związanych z widzeniem prostym (*visio simplex*), które jest widzeniem bezpośrednim, kiedy wzrok kierujemy bezpośrednio na oglądany przedmiot. We wspomnianych księgach znajdujemy więc omówienie budowy oka, wykład na temat procesu widzenia oraz fizycznych i psychologicznych aspektów widzenia. Tematy te wchodzi dzisiaj w skład optyki fizjologicznej³. Z tego powodu możemy Witelona uważać za jednego z prekursorów optyki fizjologicznej. Po wyjaśnieniu podstawowych kwestii związanych z widzeniem bezpośrednim Witelo przystępuje do przedstawienia innych sposobów widzenia. Właśnie księgę V poświęcił zjawisku odbicia światła i widzeniu przy użyciu zwierciadeł w ogóle, które nazywa widzeniem przez odbicie, a szczegółowo mówi o widzeniu przedmiotów przy użyciu zwierciadeł płaskich. Widzeniu przedmiotów przy użyciu zwierciadeł wypukłych poświęcone są księgi VI i VII, a przy użyciu zwierciadeł wklęsłych księgi VIII i IX. W księdze X zostało omówione widzenie w świetle załamanym⁴, które następuje wtedy, gdy światło odbite bądź emitowane (od

¹ Witelona *Perspektywy* księgi II i III. Przekład na język polski ze wstępem i komentarzami. Wstęp, przekład i komentarze: L. Bieganowski, A. Bielski, R. S. Dygdała, W. Wróblewski. Redaktor przekładu W. Wróblewski, *Studia Copernicana*, t. XXIX, Ossolineum, Wrocław 1991 (dalej cyt. Wit. Persp. PP).

² Witelona *Perspektywy* księgi IV. Przekład na język polski ze wstępem i komentarzami. Przekład z języka łacińskiego W. Wróblewski. Wstęp, opracowanie przekładu i komentarz L. Bieganowski, A. Bielski, W. Wróblewski, *Studia Copernicana*, t. XXXIII, Wydawnictwo IHN PAN, Warszawa 1994 (dalej cyt. Wit. Persp. PPII).

³ Por. L. Bieganowski, A. Bielski, W. Wróblewski, *Witelo – prekursor optyki fizjologicznej*, *Klinika Oczna* 88 (1988) s. 410n.; Wit. Persp. PP, s. 47 – 82; M. Helmholtz, *Handbuch der physiologischen Optik*, Leipzig 1867.

⁴ Tekst wstępu znajdujemy w wydaniu F. Risnera, na s. 403, o którym mowa poniżej. Witelo pisze: „Powyżej opracowaliśmy dwa sposoby widzenia, tzn. taki, który zachodzi bezpośrednio

przedmiotów), zanim dojdzie do oka, musi przejść przez różne ośrodki. Ten rodzaj widzenia Witelo nazywa widzeniem przez załamanie. Witelo wyklada więc w sposób systematyczny materiał związany z widzeniem, zaczynając od ogólnych informacji dotyczących optyki, aby następnie wyłożyć podstawy optyki fizjologicznej, potem katoptrykę i zakończyć swoje monumentalne dzieło wykładem dioptryki i elementów optyki atmosfery w księdze X. Nie ulega wątpliwości, że z punktu widzenia metodologii i dydaktyki Witelo trafnie ułożył materiał, rozpoczynając od wyjaśnienia kwestii podstawowych, aby przejść do zagadnień bardziej skomplikowanych. Temu przejrzystemu rozkładowi materiału z optyki, jaki daje się zauważyć w całej *Perspektywie*, odpowiada równie przemyślany wykład w ramach ksiąg V – IX, poświęconych katoptryce. Zaczyna Witelo omówienie tego działu optyki od przedstawienia zjawiska odbicia światła i powstawania obrazu w zwierciadłach płaskich i wypukłych kulistych, cylindrycznych i stożkowych. Właśnie w przetłumaczonych księgach V–VII oraz następnie w księdze VIII i IX będzie mowa o zwierciadłach wklęsłych. Witelo całkiem świadomie przyjmuje taki układ, jak to wynika z jego wstępów do ksiąg V, VI i VII, gdzie podkreśla, że zjawiska odbicia na zwierciadłach o różnych kształtach dają się sprowadzić do zjawisk odbicia na zwierciadłach płaskich i kulistych. Wydaje się, że te uwagi metodologiczne, chociaż bardzo zwięzłe, świadczą o głębokiej refleksji Witelona nad konstrukcją całego dzieła, którą tworzy z myślą o przyszłych czytelnikach studiujących optykę, aby mogli oni stopniowo pokonywać narastające trudności, jakie może przynieść katoptryka i dioptryka.

We wstępach wyżej wspomnianych tomów przekładów Czytelnik znajdzie opracowane koleje życia tego pierwszego w dziejach nauki polskiej uczonego o międzynarodowym znaczeniu⁵, przyznającego się – przynajmniej częściowo – do polskiego pochodzenia, twórczość pisarską Witelona⁶ oraz recepcję jego dzieła w wiekach późniejszych aż do czasów nam współczesnych⁷. Poza informacjami biobibliograficznymi przedstawiliśmy we wstępach do przekładów również problemy, jakie

w ośrodku przezroczystym, oraz taki, który zachodzi w wyniku odbicia od przedmiotów wypolerowanych. Teraz pozostaje, abyśmy omówili trzeci sposób widzenia, jaki zachodzi w wyniku załamania, które dokonuje się w wielu ośrodkach przezroczystych, znajdujących się pomiędzy okiem i rzeczą widzianą” (przekł. W. Wróblewski).

⁵ Tak o Witelonie pisze A. Birkenmajer, *Witelo, najdawniejszy śląski uczony*, Katowice 1936; J. Burchardt, *Witelo, Filosofo della natura del XIII sec. Una biografia*, Wrocław 1984.

⁶ Koleje życia i twórczości Witelona dokładnie opracował J. Burchardt, *List Witelona do Ludwika we Lwówku Śląskim*, „Studia Copernicana”, t. XIX, Ossolineum, Wrocław 1979. Por. także Wit. Persp. PP, s. 12 – 18 oraz podaną tam bibliografię.

⁷ Por. Wit. Persp. PP, rozdz. 4: Zarys problematyki witelońskiej w literaturze naukowej, s. 25–47.

przynoszą wspomniane księgi. Do najważniejszych zagadnień, które zostały – w miarę naszych możliwości – starannie przez nas omówione, należą budowa oka, mechanizm widzenia w ujęciu Witelońskim oraz fizyczne aspekty postrzegania z księgi IV. W mniejszym stopniu potraktowaliśmy psychologiczne aspekty widzenia jak i błędy powstające w procesie postrzegania, wyłożone przez Witelona w księdze IV, ponieważ stały się one wcześniej przedmiotem opracowania⁸ monograficznego. Na uwagę zasługuje ponadto rozdział poświęcony koncepcji księgi IV *Perspektywy*⁹, gdzie po raz pierwszy została podjęta próba zbadania ciągle spornej i dyskutowanej kwestii relacji, w jakiej pozostaje *Perspektywa* Witelona względem dzieła Alhazena *De aspectibus*.

Podstawą przekładu księgi V–VII *Perspektywy*, podobnie jak w poprzednich przekładach księgi II–IV, jest wydanie Fryderyka Risnera: *Opticae thesaurus, Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Eiusdem liber De crepusculis et Nubium ascensionibus item Vitellonis Thuringopoloni libri X. Omnes instaurati, figuris illustrati et aucti, adiectis etiam in Alhazenum commentariis a Federico Risnero* (Skarbiec wiedzy optycznej. Siedem ksiąg Alhazena Araba, teraz po raz pierwszy wydanych, i jego dzieło *O zmięczeniu* oraz *O wznoszeniu się chmur*. Również dziesięć ksiąg Witelona Turyngo – Polaka. Wszystkie księgi na nowo opracowane, zilustrowane rysunkami i powiększone z dodanymi również przez Fryderyka Risnera komentarzami do Alhazena), Basileae 1572. Reprint tego wydania, przygotowany przez D. C. Lindberga wraz ze wstępem przez niego opracowanym, ukazał się w: Johnson Reprint Corporation, New York – London 1972, w czterechsetną rocznicę pierwszego wydania. Ponieważ podstawą naszego przekładu jest wydanie Risnera, zamieściliśmy również dodane przez niego odsyłacze do dzieł Alhazena, Euklidesa i Ptolemeusza. Należy jednak wyjaśnić, że dodane do poszczególnych twierdzeń *Perspektywy* Witelona referencje nie oznaczają, że dane twierdzenie Witelo odpisał od wspomnianych autorów, ale jedynie wskazują, że w wymienionych twierdzeniach mowa jest o tych samych kwestiach¹⁰. W przypadku, gdy tekst Risnera budził wątpliwości, porównywano go z rękopisami, o czym informujemy w przypisach. Rysunki w tekście przekładu są kopiami rysunków, zamieszczonych w wydaniu F. Risnera, pochodzących na ogół z rękopisów. Wszelkie zmiany

⁸ J. Burchardt, *Kosmologia i psychologia Witelona*, Studia Copernicana, t. XXX, Ossolineum, Wrocław 1991.

⁹ Por. Wit. Persp. PPII, rozdz. 3: Koncepcja księgi IV *Perspektywy* Witelona i jego stosunek do dzieła Alhazena *De aspectibus*, s. 15 – 40.

¹⁰ Por. Wit. Persp. PP, s. 44; W. Wróblewski, A. Bielski, *Rola i znaczenie w tradycji witelońskiej przedmowy F. Risnera do wydania Perspektywy Witelona w roku 1572*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki XXXI (1986), s. 127 – 150.

w konstrukcjach rysunków, jakie znajdujemy u F. Risnera w stosunku do rysunków pochodzących z rękopisów, zostały odnotowane w komentarzach. Podobnie zwróciliśmy uwagę na te rysunki, których nie ma w wykorzystanych przez nas rękopisach, a są w wydaniu F. Risnera. Przy opracowaniu przekładu i komentarza korzystano z następujących rękopisów:

A – Oxford, Bodleian Library, MS Ashmolean 424,

C – Cambridge, Emmanuel College Library 20, fols 1,

H – Vatican City, Biblioteca Apostolica Vaticana, Borgehesse 64, fols 1 – 289 r,

Q – Paris, Bibliothèque Nationale, MS Founds Latin 7248,

S – Paris, Bibliothèque Nationale, MS Founds Latin 14739.

Wydanie F. Risnera oznaczyliśmy literą R. Za udostępnienie mikrofilmów rękopisów dziękujemy panu prof. P. Czartoryskiemu.

Często także korzystaliśmy z pierwszego renesansowego wydania *Perspektywy* Witelona opublikowanego przez Tanstettera-Apiana w Norymberdze w 1535 roku pt. *Vitellonis mathematici doctissimi peri optikes id est de natura, ratione et proiectione radiarum visus, luminum, colorum atque formarum, quam vulgo Perspectivam vocant libri X*, ed. Georgius Tanstetter et Petrus Apianus (Dziesięć ksiąg o optyce, którą powszechnie nazywa się *Perspektywą*, tj. o naturze, przyczynie i padaniu promieni widzenia, światła, barw i form, bardzo uczonego matematyka, Witelona). Wydanie to oznaczyliśmy literą I. Wkrótce potem w 1551 roku ukazał się przedruk tego wydania.

Kilka ksiąg *Perspektywy* doczekało się również nowoczesnej filologicznej edycji. Krytyczne wydanie księgi I¹¹, poświęconej w całości matematyce, przynoszącej pełen wykład geometrii Euklidesa, na którą Witelo powołuje się nieustannie w następnych księgach, przygotował Sabetai Unguru, jak również wydał on księgę II i III¹². Natomiast interesującą nas tutaj księgę V wydał A. M. Smith¹³. Z tych naukowych wydań korzystaliśmy podczas pracy nad poprzednimi księgami, jak również tłuma-

¹¹ *Witelonis Perspectivae liber primus*. Book I of Witelo's *Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary, and Latin Edition of the Mathematical Book of Witelo's *Perspectiva* by Sabetai Unguru, *Studia Copernicana*, t. XV, Ossolineum, Wrocław 1977 (dalej cyt. Wit. Persp. UI).

¹² *Witelonis Perspectivae liber secundus et liber tertius*. Book II and III of Witelo's *Perspectiva*. A Critical Latin Edition and English Translation with Introduction, Notes and Commentaries by Sabetai Unguru, *Studia Copernicana*, t. XXVIII, Ossolineum, Wrocław 1991 (dalej cyt. Wit. Persp. UII).

¹³ *Witelonis Perspectivae liber quintus*. Book V of Witelo's *Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary and Latin Edition of the First Catoptrical Book of Witelo's *Perspectiva* by A. M. Smith, *Studia Copernicana*, t. XXII, Ossolineum, Wrocław 1983 (dalej cyt. Wit. Persp. SI).

cząc księgę V. Wszystkie rozbieżności pomiędzy tekstem wydania F. Risnera i wspomnianymi wydaniem S. Unguru i A. M. Smitha zostały skrzętnie odnotowane w przypisach.

2. STAN BADAŃ NAD KSIĘGĄ V, VI i VII

Literatura dotycząca ksiąg V, VI i VII *Perspektywy* jest tak samo uboga jak w przypadku księgi II i III¹⁴ oraz IV¹⁵. Na ogół spotykamy jedynie ogólnikowe i nie zawsze dokładne, a nawet błędne wzmianki.

Pierwszego przeglądu treści *Perspektywy* dokonał J. Bystrzycki, który ograniczył się jednak do podania kilku zdań na temat treści każdej księgi. Wydaje się, że Bystrzycki¹⁶ starał się uwypuklić te z poruszanych przez Witelona zagadnień, które wydawały mu się najistotniejsze.

Pisząc o księdze V zauważa, że Witelo za zwierciadło uważa jakiegokolwiek ciało mogące odbijać światło oraz że wyróżnia siedem rodzajów zwierciadeł (autor *Perspektywy* nazywa je regularnymi). Podaje również, że w księdze V znajdujemy dowód, iż kąt padania jest równy kątowi odbicia. Następnie pisze, iż obraz w zwierciadle płaskim jest taki sam jak przedmiot. Zaznacza, że Witelo analizuje nie tylko zagadnienia związane z pojedynczym zwierciadłem płaskim, ale również z układami tych zwierciadeł. Dłużej zatrzymuje się na twierdzeniu 65, w którym autor *Perspektywy* dyskutuje możliwość wywołania ognia przy użyciu zwierciadeł płaskich, i zaznacza, że pomysł ten sprawdzono pięćset lat później w Paryżu. Omówienie księgi VI i VII jest jeszcze bardziej ogólnikowe, niepełne.

O księdze VI pisze, że znajdujemy w niej wykład poświęcony zwierciadłom wypukłym i zaznacza, iż dotyczy on zwierciadeł wypukłych kulistych. Zwraca uwagę, że według Witelona obraz powstaje za zwierciadłem w odległości mniejszej niż przedmiot od zwierciadła, jest tym mniejszy, im przedmiot znajduje się dalej i z tego powodu obraz jest zniekształcony. Zaznacza również, że Witelo wiele uwagi poświęca wyznaczeniu miejsca, w którym powstaje obraz, i jego kształtowi.

Omawiając księgę VII szczególną uwagę zwraca Bystrzycki na fakt, że Witelo dowodzi, iż jeżeli płaszczyzna odbicia przecina zwierciadło wypukłe cylindryczne lub stożkowe wzdłuż tworzącej, to odbicie zach-

¹⁴ Wit. Persp. PP, s. 25 – 47, rozdz. I.4: Zarys problematyki witelońskiej w literaturze naukowej, gdzie odnotowano informacje i opracowania dotyczące dzieła Witelona jako całości jak i poszczególnych ksiąg.

¹⁵ Wit. Persp. PPII, s. 13 – 15, rozdz. I.2: Stan badań nad księgą IV.

¹⁶ J. Bystrzycki, *Rozprawa o wzroście nauk fizycznych w Polsce*, Roczniki Towarzystwa Królewskiego Warszawskiego Przyjaciół Nauk, t. 12 (1818) s. 185 – 188.

dzi jak od zwierciadła płaskiego, a gdy przecięciem jest koło, to jak od kulistego wypukłego. Dalej zaznacza, iż w księdze VII wymienionych jest wiele zagadnień z teorii zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych. Informacje podane przez Bystrzyckiego, niemal dosłownie, powtarzają Wiszniewski¹⁷ oraz Belke i Kremer¹⁸. Trochę więcej informacji o księgach V–VII znajdujemy u Wituskiego¹⁹. Trzeba zaznaczyć, że rozprawa Wituskiego ma zupełnie inny charakter niż prace wspomniane wyżej. Poddaje on bowiem tekst *Perspektywy* analizie pod kątem źródeł, z których czerpał Witelo, korzysta przy tym głównie z referencji zamieszczonych przez Risnera²⁰ w jego wydaniu dzieła Witelona. Te uwagi zajmują znaczną część tekstu poświęconego księgom V–VII. Omówieniu księgi V poświęcone są strony 49–53 rozprawy, zaś księgi VI i VII poświęca po jednej stronie. Wituski powtarza informacje podane przez Bystrzyckiego i nieznacznie je rozszerza, a przedstawiając poszczególne zagadnienia poruszane przez Witelona podaje numery twierdzeń. Jeszcze mniej informacji o problematyce księgi V znajdujemy u Szokalskiego²¹, który najwięcej uwagi poświęca twierdzeniu 65. O księgach VI i VII podaje jednozdaniową, zresztą błędną, wzmiankę, że księgi te poświęcone są zwierciadłom wklęsłym kulistym, cylindrycznym i stożkowym. Bardzo pobieżnie, w zakresie mniejszym niż Bystrzycki problematykę ksiąg V–VII przedstawia Birkenmajer²². Tematykę omawianych ksiąg V–VII również lakonicznie, jak Bystrzycki, podaje Czartoryski²³. Jeszcze krótsze i niepełne wzmianki znajdujemy u wielu autorów²⁴, zwłaszcza w opracowaniach popularnonaukowych, gdzie najczęściej spotykamy takie informacje jak: księga V poświęcona jest zwiercia-

¹⁷ M. Wiszniewski, *Historia literatury polskiej*, Kraków 1840, s. 452–454.

¹⁸ *Historia nauk przyrodzonych podług ustnego wykładu Jerzego Kiuwiera (Cuvier) ułożona i uzupełniona przez p. Madelen de St. Anz.* Na język polski przełożyli i dodatkami do piśmiennictwa polskiego odnoszącymi się wzbogacili Gustaw Belke i Alexander Kremer, Wilno 1854, t. II, s. 327 n.

¹⁹ L. Wituski, *O życiu i dziele optycznym Vitellona*, Poznań 1870. O znaczeniu tej rozprawy w historii badań nad Witelonem patrz Wit. Persp. PP, s. 33. O księgach V–VII Wituski pisze na s. 49–55.

²⁰ O znaczeniu referencji zamieszczonych przez F. Risnera w jego wydaniu *Perspektywy* przy poszczególnych twierdzeniach dzieła Witelona patrz Wit. Persp. PP, s. 44, rozdz. II: Wstęp F. Risnera do wydania *Perspektywy* z roku 1572, s. 91–93, oraz W. Wróblewski, A. Bielski, op. cit., s. 127–150.

²¹ W. Szokalski, *Stanowisko naukowe Ciolka (Vitelliona) w średniowiecznej optyce*, Ateneum t. 7 (1877), s. 562 i 563.

²² A. Birkenmajer, *Witelo najdawniejszy śląski uczony*, Katowice 1936, s. 25.

²³ P. Czartoryski, *Średniowiecze*, w: *Historia nauki polskiej*, t. 1, Wrocław 1970, s. 92.

²⁴ Patrz np. K. Wojciechowski, *Witelo – pierwszy polski optyk*, Problemy, No 7 (1953), s. 488; K. Sawicki, *Optyk Witelo czarodziej naukowy XIII w.*, Horyzonty Techniki (1954), s. 293; S. R. Brzostkiewicz, *Witelo – najdawniejszy astronom polski*, Urania, No 3 (1963), s. 84; H. Drozdowski, *Prekursor polskiej fizyki*, Fizyka w Szkole (1991), s. 177.

dłom płaskim, VI zwierciadłom wypukłym kulistym, a VII zwierciadłom wypukłym cylindrycznym i stożkowym.

Pośród omawianych przez nas ksiąg *Perspektywy* księga V została, jak wspomniano w rozdziale I.1, opracowana przez A. M. Smitha²⁵. Uzupełniając informacje podane w rozdziale I.1 trzeba zaznaczyć, że A. M. Smith przy części twierdzeń dodał w przypisach ich dowody (lub fragmenty dowodów) sformułowane w postaci łatwo zrozumiałej dla dzisiejszego czytelnika. Szczegółowo zilustrował, zamieszczając w przypisach odpowiednie rysunki, twierdzenia 9–17 poświęcone doświadczałnemu wykazaniu równości kątów padania i odbicia w przypadku zwierciadeł regularnych. Nie podał jednak, podobnie jak wyżej wymienieni autorzy, pełnej oceny merytorycznej księgi V.

3. MERYTORYCZNA OCENA KSIĘGI V, VI, VII *PERSPEKTYWY* WITELONA W ŚWIELE WSPÓŁCZESNEJ OPTYKI GEOMETRYCZNEJ

Będące przedmiotem naszych studiów księgi V – VII *Perspektywy* Witelona wprowadzają nas w nowy dział optyki, nazywany katoptryką, tj. nauką o odbiciu światła. Sam Witelo w napisanym przez siebie wstępie w ten sposób przedstawia problematykę wspomnianych ksiąg: *Przechodząc w piątej księdze do innego sposobu widzenia, który powstaje przez odbicie od ciał gładkich, zwanych zwierciadłami, omówiłem zjawiska wspólne wszystkim zwierciadłom: płaskim, kulistym, walcowatym i stożkowym, wklęsłym lub wypukłym. Są to bowiem wszystkie zwierciadła, od których możliwe jest regularne odbicie, jak to jasno dowiedzimy we właściwym miejscu. Przez te zwierciadła rozumiemy jednakże nie tylko ciała sztucznie wygładzone, ale raczej gładkie z natury, bo gdy do zwierciadeł stosujemy dowodzenie, to rozumiemy przez nie ciała przyrody o tym samym kształcie. To bowiem, co w ciałach wytworzonych sztucznie dzieje się na podstawie odwzorowania, w ciałach przyrody musi dziać się z większą pewnością. Tak przebiegłszy kształty zwierciadeł, wyjaśniam niebieskie oraz wszelkie naturalne wpływy zachodzące w przyrodzie od ciał gładkich do innych ciał w zakresie pewnego sposobu odbicia. W tej bowiem różnorodności kryje się działanie przyrody i od tych samych bytów działających zgodnie ze sposobem zróżnicowania powstaje różnaitość form odbieranych oczyma, gdy dotrą do miejsca odbicia, skąd ono do nich dojdzie. Albowiem udział oczu, jako wtórny względem form i ciał przyrody, niczego nie dodaje do bytów przyrody.*

²⁵ Wit. Persp. SI.

*W księdze piątej wyłożyłem zjawiska wspólne dla tych właśnie zwierciadeł oraz wszystkie te, które są właściwe dla zwierciadeł płaskich. W szóstej księdze ukazałem zjawiska, którym podlegają oczy i byty skutkiem odbicia od wypukłych zwierciadeł kulistych. W siódmej wyłożyłem zjawiska zachodzące w wypukłych zwierciadłach walcowatych lub stażkowych. Te dwa zwierciadła połączyłem ze względu na tożsamość wielu zjawisk.*²⁶ Z dalszych informacji Witelona dowiadujemy się, że również w księdze VIII i IX będzie kontynuował wykład na temat odbicia światła od zwierciadeł wklęsłych o różnym kształcie.

Opracowanie zagadnienia odbicia światła poprzedza Witelo jednak, jak pamiętamy, przypomnieniem w księdze I *Perspektywy* twierdzeń matematycznych, którymi posłuży się w swoim wykładzie optyki, przedstawiając – dotąd jedynie opisywane w literaturze zjawiska (choćby przez Alhazena) – w postaci matematycznej. W ten sposób Witelo stworzył podstawy do tego, aby optyka mogła stać się dyscypliną naukową²⁷, na co zwrócił już uwagę F. Risner²⁸. W księdze II natomiast rozprawia o rozchodzeniu się światła, a księgi III i IV przynoszą wykład na temat widzenia prostego bezpośredniego, jak czytamy we wstępie Witelona do księgi III, w której znajdujemy opis budowy oka i mechanizmu widzenia. W następnej zaś, bardzo obszernej, księdze IV zostały omówione psychologiczne procesy postrzegania wraz z dokładnym potraktowaniem błędów i złudzeń wzrokowych, powstających w trakcie postrzegania. Z punktu widzenia współczesnego badacza materiał ten jest częściowo zbędny, chociaż nie jest sprawą obojętną poznanie przyczyn błędów, jakie mogą powstać podczas widzenia prostego, tzn. wtedy, gdy oko kierujemy bezpośrednio na oglądany przedmiot, oraz widzenia przedmiotów w świetle odbitym. Dla Witelona jednak widzenie było przede wszystkim aktem *prawdziwego ujęcia formy*, jak pisze w twierdzeniu III,62. Problematyka teoriopoznawcza, której podporządkowane zostały rozważania psychologiczne, jest zatem nadrzędnym celem, przyświecającym badaniu zjawisk optycznych przez Witelona, który przypomina o tym zadaniu również we wstępie do księgi V, gdzie czytamy: *Nie można jednak w odbiciu zachodzącym od powierzchni pewnych zwierciadeł poznać prawdy o formie, podobnie jak się ją poznaje w widzeniu prostym bezpośrednim*, a dzieje się tak dlatego, wyjaśnia dalej autor *Perspektywy*, bo *podczas odbicia prawda o świetle i barwie uchodzi uwadze oka*. W pro-

²⁶ Przedmowa Witelona do *Perspektywy*, przekł. J. Burchardt w: Wit. Persp. PP, s. 96n. W przedkładzie J. Burchardta wyrażenie *prawidłowe odbicie* zastąpiono zwrotem *regularne odbicie*, jako poprawne tłumaczenie łacińskiego *regularis reflexio*. Zmiana ta wynika z twierdzenia V,8.

²⁷ Patrz Wit. Persp. PP, s. 38 n.

²⁸ Wstęp Risnera do wydania *Perspektywy* z roku 1572, przekł. W. Wróblewski w: Wit. Persp. PP, s. 93; W. Wróblewski, A. Bielski, op.cit., s. 127 – 150.

cesie poznania, jak wynika z księgi III i IV oraz cytowanego wstępu, najważniejszym elementem dla Witelona jest zatem oko jako receptor zjawisk świetlnych, które spostrzega zmysł wzroku, a nie samo zjawisko optyczne, które wprowadzie Witelo pragnie poznać i ująć je ilościowo, ale jego głównym celem jest poznanie prawdy o otaczającym świecie za pomocą zmysłu wzroku. Taki stosunek do fizyki wynika z faktu, że w owych czasach była ona uważana za część filozofii, dla której zjawiska przyrody były głównie przedmiotem ontologicznych czy teoriopoznawczych spekulacji.

Tymczasem współczesnego badacza interesuje przede wszystkim samo zjawisko powstania obrazu w zwierciadłach. Chodzi zatem o obiektywne poznanie samego zjawiska powstania obrazu w zwierciadłach. Dla Witelona zaś i jemu współczesnych, podobnie jak i dla uczonych starożytnych, z których korzystali średniowieczni badacze, istotną sprawą było rozumienie zjawiska odbicia światła z pozycji obserwatora jako podmiotu postrzegającego. Dzieła Witelona i Alhazena pokazują, że szukano odpowiedzi na pytanie: kiedy oko widzi i dlaczego widzi przedmioty w świetle odbitym od zwierciadła. W centrum uwagi w tych obserwacjach znajduje się oko, zgodnie z mechanizmem widzenia i procesami psychologicznymi, jakie towarzyszą widzeniu, przedstawionymi w księdze III i IV *Perspektywy*.

Z powodu tak rozumianych zagadnień cechą charakterystyczną wykładu, przedstawionego w księgach V – IX, jest analiza układu oko–zwierciadło–przedmiot–obraz, a nie jak to spotykamy we współczesnych podręcznikach, gdzie znajdujemy analizę układu, przedmiot–zwierciadło–obraz. Witelo bowiem stawia problem w sposób następujący: mamy przedmiot w określonym położeniu, zwierciadło i oko, a szukamy miejsca, gdzie powstanie obraz przedmiotu, który będzie **widziany** przez oko.

3.1. Obraz rzeczywisty i obraz pozorny

Zgodnie z wykładem Witelona, przedstawionym w księdze III *Perspektywy*, widzenie zachodzi wówczas, gdy formy rozprzestrzeniające się wraz ze światłem wpadają do oka. Prawidłowy obraz przedmiotu powstaje w oku w momencie, kiedy forma wpadła do oka po linii prostopadłej do powierzchni widzenia, którą tworzy rogówka. Wystarczy jednak, że tylko jedna forma punktu po jednej linii prostopadłej do powierzchni widzenia dojdzie do oka, aby w oku powstał obraz punktu. Tymczasem dzisiaj wiemy, że dla powstania obrazu punktu (przedmiotu) potrzebna jest wiązka światła wychodząca z niego, która za pomocą układu optycz-

nego oka (rogówka i soczewka) zostaje odwzorowana na powierzchni siatkówki, skąd impuls nerwowy przekazywany jest do mózgu.

W celu wykazania różnicy między Witelońskim ujęciem zjawiska odbicia światła i konstrukcji obrazu w zwierciadłach a współczesną interpretacją tego zjawiska i konstrukcji obrazu omówimy kilka podstawowych pojęć z optyki geometrycznej, która zajmuje się zjawiskami odbicia i załamania światła oraz wykorzystaniem tych zjawisk przy konstrukcji różnych układów optycznych. Przedmiotem badań optyki geometrycznej są więc również zagadnienia związane z powstawaniem obrazów w zwierciadłach.

Powierzchnia każdego ciała świecącego emituje z każdego punktu światło we wszystkich kierunkach²⁹. Emitowana jest więc rozbieżna wiązka światła. Gdy wiązka światła pada na jakiś przedmiot, to wiązka odbita (rozproszona) będzie również rozbieżna. Obserwując zatem tylko wiązkę światła, nie możemy stwierdzić, czy jest ona emitowana bezpośrednio ze źródła, czy jest wiązką odbitą. Z tego powodu ciało oświetlone zachowuje się tak, jakby było źródłem światła i nie ma potrzeby rozróżniania pomiędzy ciałem świecącym i ciałem odbijającym (rozpraszającym) światło, i dlatego będziemy mówili tylko o źródle światła.

Niech będzie dane punktowe źródło światła i ustawiony naprzeciw tego źródła światła ekran. Jeżeli na drodze pomiędzy punktowym źródłem światła i ekranem umieścimy przeszkodę w postaci nieprzezroczystego ciała, to na ekranie zobaczymy ostrą granicę cienia. Istnienie tej granicy wskazuje, że światło rozchodzi się prostoliniowo, a kierunek rozchodzenia się światła został wyznaczony przez linię prostą, poprowadzoną od punkтового źródła światła. Umieścmy teraz na drodze światła emitowanego ze źródła punkowego wzdłuż linii prostej szereg wąskich szczelin o krawędziach równoległych, ustawionych coraz dalej od źródła światła, i postarajmy się otrzymać jak najbardziej wąską wiązkę światła. Tak otrzymaną wiązkę nazywamy promieniem świetlnym. Na rysunkach w optyce geometrycznej promień świetlny przedstawiamy w postaci linii prostej. Zarówno pojęcie promienia świetlnego, jak również przedstawianie go w postaci linii prostej jest uproszczeniem, ponieważ zawsze każda wiązka światła ma skończone rozmiary, a próba otrzymania tak smukłej wiązki, aby można ją było uznać za promień świetlny, prowadzi do wystąpienia zjawisk interferencji i dyfrakcji. Pojęciem promienia świetlnego można posługiwać się dopóki nie będą zachodziły wspomniane zjawiska. Tak rozumianym promieniem świetlnym możemy się posługiwać, jak długo obracamy się w kręgu optyki geometrycznej.

²⁹ Patrz np. S. Pieńkowski, *Fizyka doświadczalna*, t. III: *Optyka*, Warszawa 1955, s. 14.

Witelo pojęcie promienia świetlnego wprowadza w twierdzeniu II,3 gdzie uzasadnia zastąpienie wiązki światła o skończonej szerokości linią prostą położoną w jej środku w taki sposób, że jest ona osią symetrii wiązki. Do tego zagadnienia powraca autor *Perspektywy* w twierdzeniu V,6, w którym uzasadnia przedstawienie wiązki padającej i odbitej za pomocą linii prostej. Choć objaśnienia Witelona budzą dzisiaj pewne wątpliwości, to jednak takie rozumienie promienia świetlnego przyczyniło się niewątpliwie do współczesnego sformułowania tego pojęcia. Jak wynika z lektury ksiąg V–VII, Witelo posługuje się pojęciem promienia w takim samym sensie, jak i my robimy to dzisiaj w optyce geometrycznej, mimo że inaczej je rozumie i nazywa.

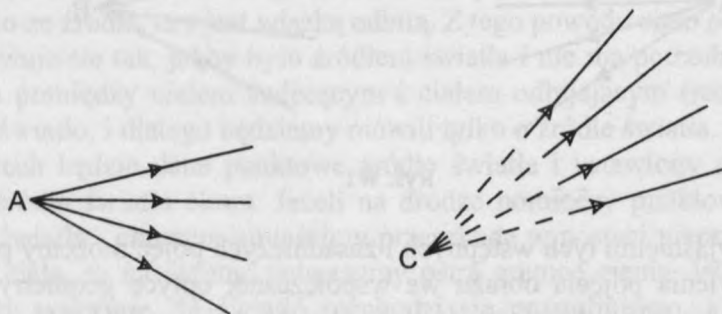


Rys. W1

Po wyjaśnieniu tych wstępnych i zasadniczych pojęć możemy przejść do omówienia pojęcia obrazu we współczesnej optyce geometrycznej. Wyobraźmy sobie, że mamy świecący punkt A (rys. W1), który nazywamy przedmiotem (może to być punktowe źródło światła lub światło odbijające się od tego punktu). Z punktu A niech się rozchodzi rozbieżna wiązka światła. Jeżeli w jakiś sposób (np. za pomocą soczewki skupiającej) przekształcimy przynajmniej część wiązki rozbieżnej, wychodzącej z punktu A, w wiązkę zbieżną, której promienie przetną się w punkcie B (rys. W1), to punkt B nazwiemy **obrazem rzeczywistym** punktu A, ponieważ punkt B będzie sprawiał wrażenie, jakby z niego były emitowane promienie świetlne. Jeżeli w miejsce punktu B ustawimy ekran, to zobaczymy na nim wyraźny jasny punkt. W ten właśnie prosty sposób możemy zademonstrować obraz rzeczywisty.

Przyjmijmy jednak, że z punktu A wychodzi wiązka rozbieżna i w jakiś sposób (np. za pomocą soczewki rozpraszającej albo zwierciadła wypukłego), przynajmniej częściowo, przekształcimy ją również w wiązkę rozbieżną (rys. W2), to wtedy promienie wiązki przekształconej nie przetną się, natomiast przetną się przedłużenia tych promieni (oznaczone na rys. W2 liniami przerywanymi) w punkcie C. Wiązka światła zachowuje się więc tak, jakby wychodziła z punktu C. Ponieważ jednak wiązka ta tylko pozornie wychodzi z punktu C, punkt ten nazywamy **obrazem**

pozornym albo **urojonym** punktu A. Dodajmy, że obrazu pozornego nie możemy zobaczyć na ekranie. Jeżeli jednak tę wiązkę rozbieżną, wychodzącą pozornie z punktu C, przekształcimy z kolei (np. za pomocą soczewki skupiającej) w wiązkę zbieżną, to w punkcie przecięcia się promieni wiązki zbieżnej otrzymamy obraz rzeczywisty. Będzie to obraz rzeczywisty pozornego punktu C. Kiedy taka wiązka rozbieżna wychodząca pozornie z punktu C wpada do oka, to dzięki działaniu rogówki i soczewki ocznej zostanie ona przekształcona w wiązkę zbieżną, której promienie przecinają się na siatkówce, na której powstanie obraz rzeczywisty pozornego punktu C i z tego powodu odnosimy wrażenie, że wiązka wychodzi z punktu C. Dlatego punkt C nazywamy obrazem pozornym punktu A. Należy jednak podkreślić, że w rzeczywistości obraz pozorny nie istnieje, a jedynie odnosimy wrażenie, że promienie wychodzą z punktu C.



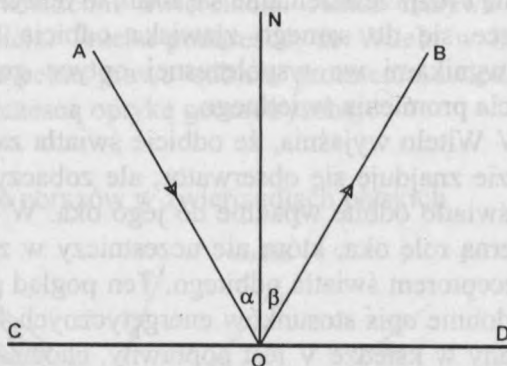
Rys. W2

Z tego powodu, że Witelo nie rozpatruje wiązki promieni, a tylko uwzględnia jeden promień, po którym rozprzestrzenia się forma, nie uświadamia sobie w ogóle faktu istnienia obrazu rzeczywistego i pozornego. Gdy Witelo w księgach V–VII mówi o obrazie przedmiotu w zwierciadłach używa tylko jednego słowa *imago*. Może to prowadzić do nieporozumienia przy interpretacji niektórych twierdzeń księgi V–VII, gdyż przy pomocy tego rzeczownika Witelo nazywa również obrazy, które w naszym rozumieniu są obrazami pozornymi.

3.2. Zjawisko odbicia światła

Zjawisko odbicia światła i związane z nim powstawanie obrazów w zwierciadłach dowolnego kształtu stanowi dział optyki geometrycznej, zwany katoptryką. Jej właśnie poświęcił Witelo księgi V–IX *Perspektywy*. Odbicie światła zachodzi **zawsze**, gdy promień świetlny pada na do-

wolną powierzchnię. Na rysunku W3 przedstawiono odbicie promienia świetlnego od powierzchni gładkiej, gdzie promień padający oznaczono jako AO, a promień odbity jako OB. Punkt O jest punktem odbicia, natomiast przez ON została oznaczona prostopadła do powierzchni zwierciadła, poprowadzona w punkcie odbicia. Kąt $AON = \alpha$, nazywamy obecnie kątem padania, a kąt $NOB = \beta$ kątem odbicia. Witelo, zgodnie ze starożytną tradycją kątem padania nazywa kąt COA, a kątem odbicia kąt BOD³⁰. Zarówno doświadczalnie jak i teoretycznie, posługując się np. zasadą Fermata³¹, można wykazać, że $\angle \alpha = \angle \beta$. Pomijamy w naszym zwięzłym wprowadzeniu opis doświadczeń i podanie teoretycznych dowodów, ponieważ można je znaleźć w wielu łatwo dostępnych podręcznikach³².



Rys. W3

Opracowanie przez Witelona w *Perspektywie* zjawiska odbicia nie jest dla autora celem samym w sobie. Interesuje go bowiem przede wszystkim widzenie przedmiotów, jak informuje nas we wstępie do swojego dzieła. I właśnie w celu umożliwienia wyjaśnienia postrzegania

³⁰ Wit.Persp. SI, s. 153.

³¹ Pierre de Fermat (17.08.1601 – 12.02.1665) matematyk francuski. Odkrycia Fermata torowały drogę: rachunkowi prawdopodobieństwa, teorii liczb, rachunkowi różniczkowemu i całkowemu oraz geometrii analitycznej. W optyce podał zasadę, dziś nazywaną zasadą Fermata, dotyczącą biegu promieni świetlnych (*Wielka Encyklopedia Powszechna*, t. 3, Warszawa 1964, s. 620). Z zasady Fermata można wyprowadzić prawo odbicia i prawo załamania promieni świetlnych. Mówi ona, że rzeczywista droga optyczna (drogą optyczną nazywamy iloczyn $n \cdot l$, gdzie n jest współczynnikiem załamania danego środowiska, a l drogą geometryczną), jaką przebywa promień świetlny pomiędzy dwoma punktami jest ekstremalna, najczęściej najkrótsza ze wszystkich możliwych. Inaczej można ją sformułować następująco: promień świetlny biegnie tak, aby przebyć drogę między dwoma punktami w czasie najkrótszym (por. S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, część IV: *Optyka*, Warszawa 1954, s. 15n).

³² Patrz np. S. Pieńkowski, op. cit.; S. Szczeniowski, op. cit.

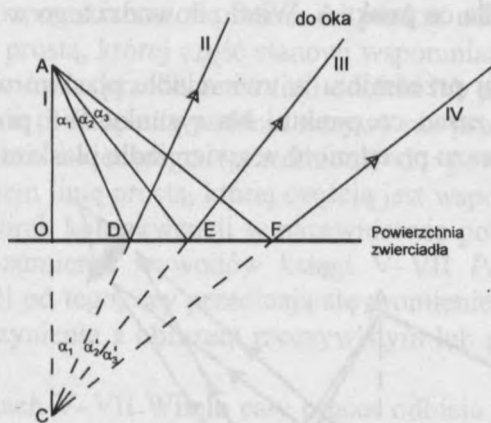
form przy użyciu zwierciadeł zajmuje się Witelo również zjawiskiem odbicia światła. Z tego powodu rozpatruje on odbicie światła i form rozprzestrzeniających się wraz ze światłem. Na wstępie podaje zatem definicję linii padania formy (V,3) i linii odbicia (V,4), wzdłuż których forma pada na zwierciadło i odbija się od niego. Pojęcia *linia padania* i *linia odbicia formy* są równoważne współczesnym pojęciom: promień padający i promień odbity pod warunkiem, że odrzucamy słowo forma. Witelo bowiem linię padania i linię odbicia analizuje i przedstawia tak, jak opisujemy promień padający i promień odbity we współczesnej optyce geometrycznej. Trzeba jednak pamiętać, że pojęcia: linia padania i linia odbicia związane są u Witelona z pojęciem formy i jej rozprzestrzeniania się i dla niego mają inny sens niż pojęcie promienia padającego i odbitego we współczesnej optyce geometrycznej. Jeśli w wywodach Witelona pominiemy formę i rozprzestrzenianie się form, to otrzymane przez niego wyniki odnoszące się do samego zjawiska odbicia będą identyczne z uzyskanymi wynikami we współczesnej optyce geometrycznej dla przypadku odbicia promienia świetlnego.

W księdze V Witelo wyjaśnia, że odbicie światła zachodzi niezależnie od tego, gdzie znajduje się obserwator, ale zobaczy on światło pod warunkiem, że światło odbite wpadnie do jego oka. W ten sposób autor wskazuje na bierną rolę oka, które nie uczestniczy w zjawisku odbicia, a jedynie jest receptorem światła odbitego. Ten pogląd podzielamy również dzisiaj. Podobnie opis stosunków energetycznych w zjawisku odbicia światła podany w księdze V jest poprawny, chociaż jego interpretacja, powiązana z pojęciem formy i współczesnymi Witelonowi poglądami na naturę światła i barwy, jest błędna.

Witelo przywiązuje również dużą wagę do udowodnienia podstawowego prawa katoptryki, nazywanego prawem odbicia, którego rezultatem jest wykazanie równości kąta padania i kąta odbicia. Dowód został przeprowadzony doświadczalnie i teoretycznie. Doświadczenia, którymi posługuje się Witelo, zostały opisane w przypadku zwierciadeł, określanych jako zwierciadła regularne, do których zostały zaliczone zwierciadła płaskie oraz wypukłe i wklęsłe cylindryczne i stożkowe. Opisy przyrządu pomiarowego (por. tw. V,9) – jak i samych doświadczeń, (por. tw. V, 10–17) są tak dokładne, że wykonanie przyrządu i przeprowadzenie doświadczeń nie sprawia żadnych trudności. Dowód teoretyczny prawa odbicia został przedstawiony w twierdzeniach V,18 i V,19. W pierwszym z wymienionych twierdzeń Witelo stwierdza, że *każdą rzecz widzianą w świetle odbitym od dowolnego* (podkr. nasze) *zwierciadła oko postrze- ga po najkrótszej linii*. Należy stwierdzić, że takie sformułowanie twierdzenia V,18 jest zgodne z zasadą Fermata. Dowód tego twierdzenia nawiązuje do twierdzenia V,5 i postulatu 8 z księgi II, skąd dowiadujemy

się, że *natura nichzgo nie dokonuje na próżno i nie zawodzi w rzeczach koniecznych*³³. Matematyczny dowód prawa odbicia dla przypadku zwierciadeł płaskich i wypukłych znajdujemy w twierdzeniu V,19, w którym Witelo dowodzi, że suma długości linii padania i linii odbicia, jest najmniejsza, gdy kąt padania jest równy kątowi odbicia. Nasuwa się jednak pytanie, dlaczego autor ogranicza się do przypadku zwierciadeł płaskich i wypukłych. Być może, że odpowiedź na to pytanie zawierają księgi VIII i IX. Z punktu widzenia współczesnej optyki geometrycznej rozważania przedstawione w twierdzeniu V,19 są poprawne tylko wtedy, jeżeli pojęcia linii padania formy i linii odbicia formy zastąpimy współczesnymi pojęciami promienia padającego i promienia odbitego. Witelo dowodzi ponadto, że linia padania, linia odbicia i prostopadła do powierzchni zwierciadła znajdują się na jednej płaszczyźnie, która jest prostopadła do powierzchni zwierciadła. Autor nazywa tę płaszczyznę płaszczyzną odbicia. Trzeba podkreślić, że Witelo w *Perspektywie* podaje i uzasadnia pełne prawo odbicia promienia świetlnego i jest ono zgodne ze współczesną optyką geometryczną.

3.3. Powstawanie obrazów w zwierciadłach płaskich



Rys. W4

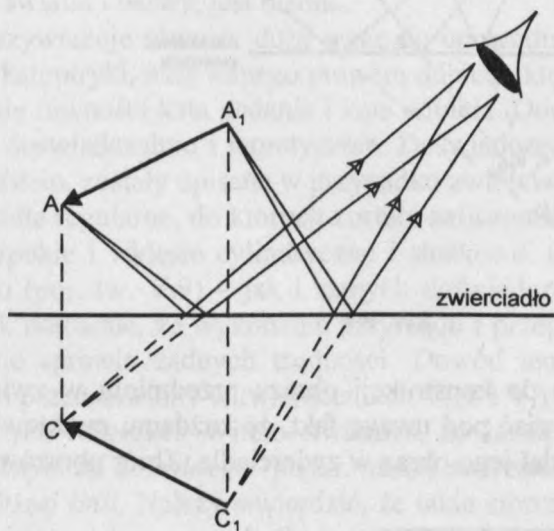
Przystępując do konstrukcji obrazu przedmiotu w zwierciadle płaskim musimy wziąć pod uwagę fakt, że każdemu punktowi przedmiotu będzie odpowiadał jego obraz w zwierciadle. Zbiór obrazów poszczegól-

³³ Wit. Persp. PP, s. 100.

nych punktów przedmiotu jest obrazem przedmiotu. Z tego powodu, zanim przejdziemy do omówienia obrazu przedmiotu, przedstawimy konstrukcję obrazu punktu.

Niech z punktu A rozchodzi się wiązka rozbieżna, padająca na zwierciadło płaskie (rys. W4). Po odbiciu wiązka będzie nadal rozbieżna. Przedłużenia promieni odbitych, które oznaczone są na rysunku W4 liniami przerywanymi, przecinają się w jednym punkcie C. Punkt ten jest obrazem pozornym punktu A. Można pokazać, że $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_1'$, $\angle \alpha_2 = \angle \alpha_2'$ oraz $\angle \alpha_3 = \angle \alpha_3'$. Oznacza to, że rozbieżność wiązki, określona kątem, jaki tworzą jej skrajne promienie, nie ulega zmianie w wyniku odbicia. Z tego powodu, aby znaleźć miejsce, w którym powstaje obraz punktu A, wystarczy znaleźć punkt przecięcia się przedłużeń dwóch dowolnych promieni odbitych od zwierciadła płaskiego. Dla przykładu mogą to być promienie I i II lub III i IV albo dowolne dwa inne promienie. Obraz pozorny punktu A zawsze będzie w punkcie C, niezależnie od tego, gdzie się znajduje oko. Jeżeli jednak obraz chcemy zobaczyć, to musimy umieścić oko w takim położeniu, aby przynajmniej część odbitej wiązki wpadała do oka. W przypadku zaś, gdy zmienimy położenie punktu A (przedmiotu), zmieni się również położenie jego obrazu, tj. punktu C. Jak można wykazać, punkt C leży w takiej samej odległości od powierzchni zwierciadła co punkt A. Witelo dowodzi tego w twierdzeniu V,49.

Konstrukcję obrazu przedmiotu w zwierciadle płaskim wykonujemy według tych samych zasad co punktu. Na rysunku W5 przedstawiono zasadę konstrukcji obrazu przedmiotu w zwierciadle płaskim. Oznaczmy

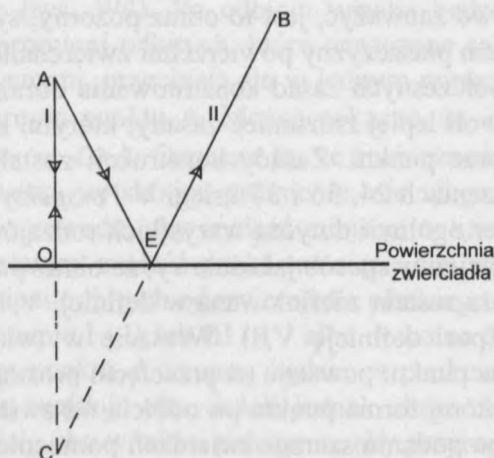


Rys. W5

przedmiot przez AA_1 , a jego obraz przez CC_1 . Jeśli jest to przedmiot płaski, to, aby wyznaczyć położenie jego obrazu, musimy znaleźć położenie obrazów jego punktów skrajnych. Na rysunku W5 przedstawiono również wiązki światła trafiające do oka, dzięki którym widzimy obraz przedmiotu. Jak łatwo zauważyć, jest to obraz pozorny, symetryczny do przedmiotu względem płaszczyzny powierzchni zwierciadła. Sądzimy, że przypomnienie współczesnych zasad konstruowania obrazu w zwierciadłach płaskich pozwoli lepiej zrozumieć zasady, którymi kieruje się Witelo konstruując obraz punktu. Zasady konstrukcji zostały przez niego wyłożone w twierdzeniach 24, 36 i 37 księgi V *Perspektywy*. Twierdzenia te mają charakter ogólny i dotyczą wszystkich rodzajów zwierciadeł. Wyjaśnia w nich kolejno w sposób jakościowy, że obraz punktu powstaje na linii odbicia, która została zdefiniowana w definicji V,4, bądź na prostopadłej padania (por. definicję V,8). Wreszcie w twierdzeniu V,37 konkluduje, że obraz punktu powstaje na przecięciu prostopadłej padania z linią odbicia, po której forma punktu po odbiciu od zwierciadła wpada do oka. Następnie po podaniu szeregu twierdzeń pomocniczych w twierdzeniu V,48 Witelo podaje sposób znalezienia punktu przecięcia prostopadłej padania z linią odbicia. Należy też zaznaczyć, że Witelo niejednznacznie używa terminu linia odbicia. Raz tym wyrażeniem określa linię, po której rozprzestrzenia się forma od punktu odbicia do oka, a innym razem linię prostą, której część stanowi wspomniana powyżej linia. Czasami znów mówi o przedłużeniu linii odbicia lub przedłużonej linii odbicia. Podobnie prostopadłą padania nazywa raz prostopadłą poprowadzoną od punktu świecącego (przedmiotu) do powierzchni zwierciadła, a innym razem linię prostą, której częścią jest wspomniana wyżej prostopadła. Ten brak konsekwencji w nazewnictwie powoduje niekiedy trudności w rozumieniu wywodów księgi V–VII *Perspektywy*, ponieważ w zależności od tego, czy przecinają się promienie czy ich przedłużenia, mamy do czynienia z obrazem rzeczywistym lub pozornym (por. rozdz. I.3.1).

W księgach V–VII Witelo cały proces odbicia określa zwrotem: *forma odbija się do oka (forma reflectitur ad visum)*, który należy rozumieć w sposób następujący: forma po odbiciu się od powierzchni zwierciadła pada na powierzchnię widzenia i powoduje powstanie obrazu w oku, który oko widzi na zwierciadle. Właśnie na rys. W6 przedstawiona została konstrukcja obrazu punktu w zwierciadle płaskim według Witelona. Forma punktu A po linii padania AE (por. definicję 3 w księdze V) pada na zwierciadło płaskie w punkcie E i po odbiciu wzdłuż linii EB wpada do oka, którego środek znajduje się w punkcie B. Prostopadłą padania jest linia AO. Przedłużmy teraz prostopadłą padania AO i linię odbicia EB poza powierzchnię zwierciadła. Ich przedłużenia (są to linie przery-

wane na rys. W6) przetną się w punkcie C. Punkt ten jest obrazem punktu A (por. twierdzenie V,48). Jest to oczywiście obraz pozorny, chociaż Witelo w twierdzeniach V,37 i V,48 mówi tylko o obrazie.



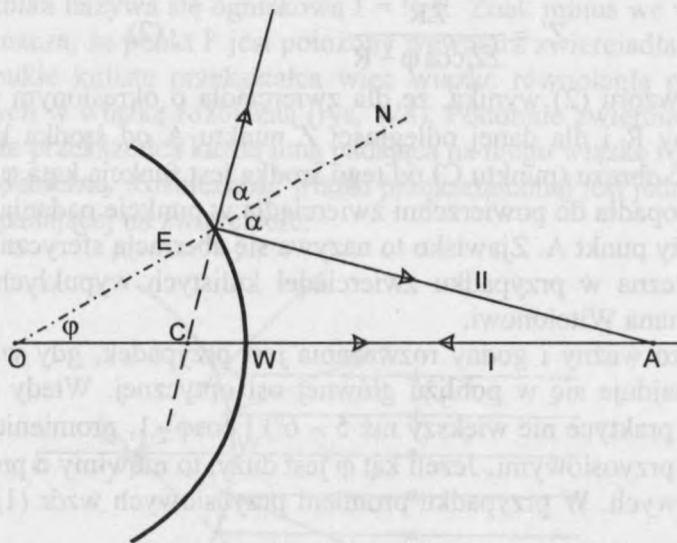
Rys. W6

Wydaje się, że konstrukcja Witelońska w istocie jest taka sama jak konstrukcja stosowana obecnie. Jest to jednak kwestia przypadku. Wynik otrzymany przez Witelona jest wprawdzie prawidłowy, ale założenia są błędne, ponieważ błędna była w średniowieczu znajomość anatomii oka i błędny mechanizm powstawania obrazu w oku. Z dzisiejszego punktu widzenia zarówno prostopadła padania jak i linia padania są promieniami wiązki rozbieżnej, wychodzącej z punktu A i mogą ograniczać wiązkę.

3.4. Powstawanie obrazu w zwierciadłach kulistych wypukłych

Zakrzywioną powierzchnię odbijającą światło, skierowaną wypukłością w stronę wiązki padającej, nazywamy zwierciadłem wypukłym. Najprostsze i najczęściej używane zwierciadła wypukłe mają wypukłą zewnętrzną część kuli. Nazywamy je zwierciadłami kulistymi wypukłymi. Środek kuli, której częścią jest zwierciadło, nazywa się środkiem krzywizny zwierciadła, a jej promień R promieniem krzywizny, zaś środek czasy wierzchołkiem zwierciadła. Odbicie światła od powierzchni kulistej, obojętnie wypukłej czy wklęsłej, możemy rozpatrzeć jak odbicie od powierzchni płaskiej, ponieważ kierunek promienia odbitego zależy jedynie od kształtu powierzchni w bezpośrednim otoczeniu punktu odbicia, tzn. nie ulega zmianie, gdy dany element powierzchni kulistej zastąpimy elementem powierzchni płaskiej stycznej w punkcie padania do powierzchni kulistej. Jedyna różnica między tymi dwoma zwierciadłami

polega na tym, że prostopadłe do powierzchni kulistej nie są równoległe, ale przecinają się w środku krzywizny. Powoduje to wystąpienie zjawisk, których nie obserwujemy w przypadku zwierciadeł płaskich. Z lektury księgi VI i VII *Perspektywy* wynika, że Witelo doskonale zdawał sobie sprawę z tego faktu, chociaż wyraźnie na ten temat się nie wypowiada.



Rys. W7

Rozpatrzmy odbicie światła od zwierciadła kulistego wypukłego (rys. W7). Środek krzywizny oznaczmy przez O, a wierzchołek przez W. Każdą prostą przechodzącą przez środek krzywizny O nazywamy osią zwierciadła. Prostą przechodzącą przez środek krzywizny O i wierzchołek zwierciadła W nazywamy główną osią optyczną i jest ona osią symetrii zwierciadła.

Niech z punktu A rozchodzi się rozbieżna wiązka światła. Na rys. W7 punkt A znajduje się na głównej osi optycznej, ale poniżej przedstawione rozważania są prawdziwe i dokładnie takie same w przypadku, gdy punkt A będzie się znajdował na dowolnej innej osi. Niech promień AW (oznaczony jako I na rys. W7) pada prostopadłe na zwierciadło wzdłuż głównej osi optycznej. Weźmy również inny promień, np. AE (oznaczony jako II na rys. W7), który pada na zwierciadło w punkcie E pod kątem α . Promień ten odbija się pod takim samym kątem. Przedłużone promienie I i II przetną się na osi w punkcie C, który jest obrazem pozornym punktu A. Niech prostopadła ON do powierzchni zwierciadła, przechodząca przez punkt E, tworzy z osią kąt ϕ jak na rys. W7. Oznaczmy odległość punktu A (przedmiotu) od środka krzywizny jako Z (na rys. W7 jest to długość odcinka OA), a punktu C (obrazu) leżącego na osi, przez Z' (na

rys. W7 jest to długość odcinka OC). Można wykazać, że zachodzi związek³⁴:

$$\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'} = \frac{2 \cos \varphi}{R}. \quad (1)$$

Przekształcając wzór (1) otrzymujemy:

$$Z' = \frac{ZR}{2Z \cos \varphi - R}. \quad (2)$$

Ze wzoru (2) wynika, że dla zwierciadła o określonym promieniu krzywizny R i dla danej odległości Z punktu A od środka krzywizny, odległość obrazu (punktu C) od tego środka jest funkcją kąta φ , jaki tworzy prostopadła do powierzchni zwierciadła w punkcie padania z osią, na której leży punkt A . Zjawisko to nazywa się aberracją sferyczną. Aberracja sferyczna w przypadku zwierciadeł kulistych wypukłych nie była jednak znana Witelonowi.

Bardzo ważny i godny rozważania jest przypadek, gdy wiązka promieni znajduje się w pobliżu głównej osi optycznej. Wtedy kąt φ jest mały (w praktyce nie większy niż $5 - 6^\circ$) i $\cos \varphi \approx 1$, promienie takie nazywamy przyosiowymi. Jeżeli kąt φ jest duży, to mówimy o promieniach pozaosiowych. W przypadku promieni przyosiowych wzór (1) przyjmie postać:

$$\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'} = \frac{2}{R}. \quad (3)$$

Możemy wyrazić go poprzez odległość X przedmiotu od wierzchołka zwierciadła (na rys. W7 jest to odcinek WA) i odległość obrazu Y (na rys. W7 jest to odcinek WC). Wtedy przekształcając wzór (3) otrzymujemy:

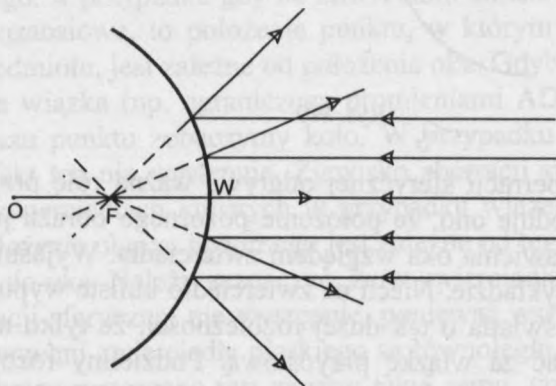
$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = -\frac{2}{R}. \quad (4)$$

Ze wzorów (3) i (4) wynika, że odległość obrazu od środka krzywizny w przypadku promieni przyosiowych jest niezależna od kąta φ , a to oznacza, że nie występuje aberracja sferyczna. Z tego powodu, aby znaleźć położenie obrazu, możemy wziąć dwa dowolne promienie, podobnie jak to jest w przypadku zwierciadeł płaskich. Jeżeli na zwierciadło pada równoległa wiązka promieni przyosiowych, oznacza to, że przedmiot znajduje się w nieskończonej odległości od zwierciadła ($X \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow \infty$) i wtedy ze wzoru (4) wynika, że:

$$Y = -\frac{R}{2}, \quad (5)$$

³⁴ Patrz np., M. Grotowski, *Optyka*, Łódź 1954, s. 85n.

czyli przedłużenia promieni odbitych przetną się w punkcie położonym w połowie promienia krzywizny i tam właśnie powstanie obraz pozorny punktu położonego w nieskończonej odległości. Punkt, w którym powstaje ten obraz, nosi nazwę ogniska i oznaczany jest najczęściej literą F (rys. W8). W tym przypadku jest to ognisko pozorne. Odległość ogniska od wierzchołka nazywa się ogniskową $f = \frac{1}{2} R$. Znak minus we wzorach (4) i (5) oznacza, że punkt F jest położony wewnątrz zwierciadła. Zwierciadło wypukłe kuliste przekształca więc wiązkę równoległą promieni przyosiowych w wiązkę rozbieżną (rys. W8). Podobnie zwierciadło wypukłe kuliste przekształca każdą inną padającą na niego wiązkę rozbieżną w wiązkę rozbieżną. Rozbieżność wiązki przekształconej jest jednak inna niż wiązki padającej na zwierciadło.



Rys. W8

Wróćmy do wzoru (1). Korzystając z pojęcia ogniskowej, zapiszmy ten wzór w postaci następującej:

$$\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'} = \frac{\cos \varphi}{f}. \quad (6)$$

Jeżeli na zwierciadło pada równoległa wiązka promieni świetlnych ($Z \rightarrow \infty$), ale jest złożona nie tylko z promieni przyosiowych, to wtedy:

$$Z' = \frac{f}{\cos \varphi} = \frac{R}{2 \cos \varphi}. \quad (7)$$

Ze wzoru (7) wynika, że punkt przecięcia przedłużenia promienia odbitego z główną osią optyczną, gdy promień padający jest równoległy do osi optycznej, jest zależny od kąta φ . Na rys. W9 przedstawiono przykład zmian odległości ogniska od środka krzywizny na osi optycznej. W miarę wzrostu kąta φ ognisko przesuwa się wzdłuż osi w kierunku powierzchni zwierciadła. Przedłużenia promieni odbitych, które padają na zwierciadło daleko od osi, przecinają się również poza osią, np. w punkcie C_1 na rys. W9 i tworzą inne ogniska pozorne. Jeżeli promienie

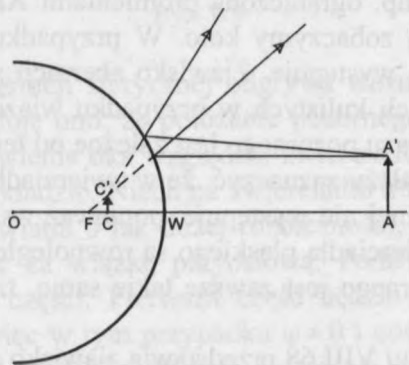
Niech z punktu A, leżącego na osi OA, rozchodzi się rozbieżna wiązka światła. Weźmy dwa promienie wiązki przyosiowej, oznaczone na rysunku W10 jako ADD_1 i AEE_1 . Przedłużenia promieni DD_1 i EE_1 odbitych od powierzchni zwierciadła, przetną się w punkcie C_1 , leżącym na osi OA. Jeżeli ta część wiązki światła (ograniczona promieniami DD_1 i EE_1) po odbiciu od zwierciadła kulistego wypukłego wpadnie do oka, to w punkcie C_1 zobaczymy obraz pozorny punktu A. Rozpatrzmy teraz trzecią część wiązki, ograniczoną promieniami oznaczonymi na rys. W10 przez AGG_1 i AHH_1 . Przedłużenia promieni odbitych GG_1 i HH_1 przetną się w punkcie C_2 , nie leżącym na osi OA. Gdy wiązka światła, ograniczona promieniami AGG_1 i AHH_1 , po odbiciu od powierzchni zwierciadła wpadnie do oka, to w punkcie C_2 zobaczymy obraz pozorny punktu A. Wobec tego, w przypadku gdy na zwierciadło kuliste wypukłe padają promienie pozaosiowe, to położenie punktu, w którym powstaje obraz pozorny przedmiotu, jest zależne od położenia oka. Gdyby jednak do oka wpadała cała wiązka (np. ograniczona promieniami ADD_1 i AHH_1), to zamiast obrazu punktu zobaczymy koło. W przypadku promieni przyosiowych efekt ten nie występuje. Zjawisko aberracji sferycznej powoduje, że w zwierciadłach kulistych w przypadku wiązek pozaosiowych widziane położenie obrazu pozornego jest zależne od tego, które promienie wpadają do oka. Należy zaznaczyć, że w zwierciadłach płaskich zjawisko aberracji sferycznej nie występuje, ponieważ wszystkie prostopadłe do powierzchni zwierciadła płaskiego są równoległe. Z tego powodu położenie obrazu pozornego jest zawsze takie samo, tzn. niezależne od położenia oka.

Witelo w twierdzeniu VIII,68 przedstawia zjawisko aberracji sferycznej zwierciadeł kulistych wklęsłych, którego prawdopodobnie jest odkrywcą³⁵, ale o aberracji zwierciadeł kulistych wypukłych w księdze VI nie wspomina ani słowem. Należy więc przypuszczać, że nie było mu ono znane.

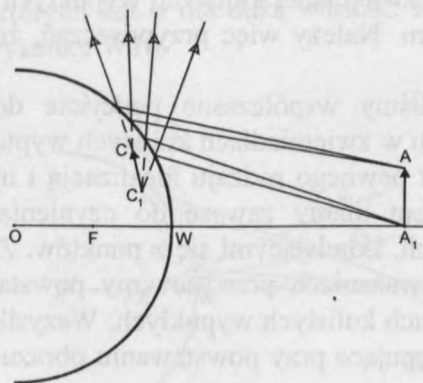
Dotychczas omawialiśmy współczesne podejście do zagadnienia konstrukcji obrazu punktu w zwierciadłach kulistych wypukłych. Pojęcie punktu i jego obrazu jest pewnego rodzaju idealizacją i uproszczeniem. W rzeczywistości bowiem mamy zawsze do czynienia z obiektami o skończonych rozmiarach, składającymi się z punktów. Z tego powodu w dalszych naszych rozważaniach przedstawimy powstawanie obrazu przedmiotu w zwierciadłach kulistych wypukłych. Wszystkie wspomniane wyżej zjawiska, występujące przy powstawaniu obrazu punktu, poja-

³⁵ K. Wojciechowski, *Witelo jako matematyk i fizyk*, w: *Witelo – matematyk, fizyk, filozof*, red. J. Trzynadlowski, Wrocław 1979, s. 28.

wiają się również przy konstrukcji obrazu przedmiotu i mogą wywoływać jego zniekształcenie. Na rysunku W11 przedstawiono zasadę konstrukcji obrazu przedmiotu w przypadku promieni przyosiowych. Na rysunku tym przedmiot symbolizuje strzałka AA' , zaś obraz przedmiotu strzałka CC' . W przypadku promieni przyosiowych, podobnie jak to się dzieje dla zwierciadeł płaskich, wystarczy znaleźć położenie obrazów punktów skrajnych przedmiotu, to jest punktów A i A' na rys. W11. Obraz, jaki powstał, nie jest zniekształcony. W układzie przedstawionym na rysunku W11 ma on mniejsze rozmiary niż przedmiot. Mówimy wtedy, że jest on pomniejszony. Konstrukcję obrazów z wykorzystaniem promieni pozaosiowych przedstawiono na rysunku W12, gdzie obraz przedmiotu jest zniekształcony i sprawia wrażenie zakrzywionego. W rezultacie, gdy do oka wpadają promienie przyosiowe, widzimy taki obraz, jaki znajdujemy na rysunku W11, a gdy dochodzą do oka promienie pozaosiowe, widzimy taki obraz, jaki mamy na rysunku W12.



Rys. W11



Rys. W12

Na ogół rozmiary przedmiotu widzianego w świetle odbitym od powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, tj. obrazu, są inne niż rzeczywistego przedmiotu. Stosunek rozmiarów obrazu przedmiotu do samego przedmiotu określa wielkość, nazywana powiększeniem liniowym M . Powiększenie liniowe definiujemy następująco:

$$M = \text{wielkość obrazu} / \text{wielkości przedmiotu}.$$

Można pokazać, że w przypadku promieni przyosiowych³⁶

$$M = \frac{Y}{X}. \quad (8)$$

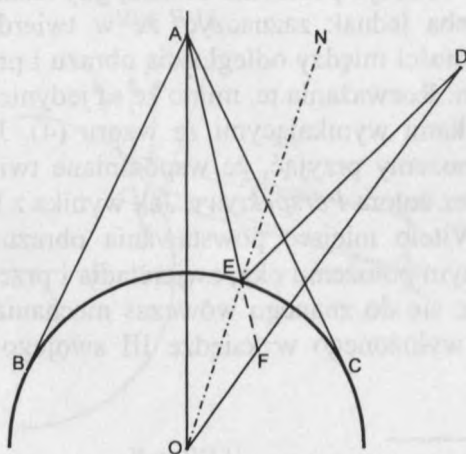
Jeżeli $|M| > 1$ to mamy obraz powiększony, a jeżeli $|M| < 1$ to obraz jest pomniejszony.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że współcześnie zagadnienie powstawania obrazu ujmujemy w następujący sposób: dany jest przedmiot i zwierciadło, a pytamy się o miejsce, w którym pojawi się obraz. Dodatkowo w przypadku promieni pozaosiowych pytamy się, gdzie powstanie obraz, gdy określona część odbitej wiązki wpadnie do oka. Na podstawie lektury księgi VI i VII możemy wnioskować, że w średniowieczu zagadnienie konstrukcji obrazu w zwierciadłach wypukłych przedstawiano w inny sposób. Zanim jednak przejdziemy do omówienia zasad, jakimi posługuje się Witelo przy konstrukcji obrazu, pragniemy zwrócić uwagę na fakt, że w średniowieczu nie znano wzoru (1) i pozostałych wzorów, które z niego wynikają, jak również nie znano pojęcia ogniska i ogniskowej, osi optycznej ani pojęcia głównej osi optycznej. Nieznajomość wymienionych pojęć sprawiała, że zagadnienie konstrukcji obrazu w zwierciadłach wypukłych traktowano jakościowo, a nie ilościowo, np. nie umiano obliczyć położenia obrazu, gdy znane było położenie przedmiotu. Trzeba jednak zaznaczyć, że w twierdzeniu VI,23 wspomina autor o zależności między odległością obrazu i przedmiotu od powierzchni zwierciadła. Rozważania te, mimo że są jedynie jakościowe, pokrywają się z wnioskami wynikającymi ze wzoru (4). Jeśli wierzyć referencjom Risnera, możemy przyjąć, że wspomniane twierdzenie zostało sformułowane przez autora *Perspektywy*. Jak wynika z lektury ksiąg V–VII *Perspektywy*, Witelo miejsce powstawania obrazu przedmiotu przy zadanym wzajemnym położeniu oka, zwierciadła i przedmiotu stara się wyjaśnić, odwołując się do znanego wówczas mechanizmu powstawania obrazu w oku, wyłożonego w księdze III swojego optycznego dzieła³⁷.

³⁶ Patrz np. S. Pieńkowski, op. cit., s. 121 – 126.

³⁷ Wspomniany mechanizm powstawania obrazu w oku został opisany w: Wit. Persp. PP, s. 68 nn; patrz także A. Bielski, L. Bieganowski, W. Wróblewski, *Mechanizm powstawania obrazu w oku i widzenie obuoczne w księdze III „Perspektywy” Witelona*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, XXXI (1986), s. 315 – 333.

Przy omawianiu zasad konstrukcji obrazu w zwierciadłach wypukłych należy również wziąć pod uwagę cel, jaki stawia sobie autor *Perspektywy*, oraz trzeba pamiętać o miejscu i znaczeniu optyki w nauce średniowiecza. Z lektury dzieła Witelona wynika, że celem przedsięwzięcia było wyjaśnienie faktu, jak postrzegane są przedmioty, a zatem chodziło raczej o przedstawienie problematyki z punktu widzenia filozoficznego, a ściślej mówiąc procesu widzenia, jako zjawiska psychicznego, a nie fizycznego. W księgach V-IX Witelo bardzo ważną rolę przypisuje oku. Wszystkie zagadnienia tam poruszone rozpatruje pod kątem pytania, kiedy obraz będzie widziany przez oko. Oko i mechanizm powstawania obrazu w oku są dla Witelona punktem odniesienia dla wszystkich rozważań. Witelo dowodzi, że formy mogą odbić się do oka tylko z tej części powierzchni zwierciadła, którą obejmuje oko, tzn. z części obejmowanej przez stożek widzenia (omówienie stożka widzenia znajdujemy w twierdzeniach III,18 i III,28)³⁸. Oś stożka widzenia traktuje jako oś symetrii zwierciadła, którą, zgodnie ze współczesną terminologią, nazywalibyśmy główną osią optyczną. Oko, którego środek jest wierzchołkiem stożka widzenia, umieszcza więc Witelo na osi symetrii zwierciadła, którą nazywa średnicą widzenia bądź prostopadłą odbicia. Umieszczenie oka na osi symetrii powoduje, że Witelo analizuje powstawanie obrazów punktów i przedmiotów nie leżących na głównej osi optycznej (tzn. osi symetrii), a znajdujących się często na osiach bardzo odległych od głównej osi optycznej. Przy znacznym oddaleniu od głównej osi optycznej kąt φ jest duży, a to oznacza, że należy rozpatrywać promienie pozaosiowe.



Rys. W13

³⁸ Wit. Persp. PP, s. 197 – 199 i 210, 211.

Witelo wiedział, że odbicie od zwierciadeł wypukłych w danym punkcie należy traktować tak jak odbicie od elementu płaskiego, który w danym punkcie jest styczny do powierzchni wypukłej. Przyjmuje więc, że obraz punktu powstaje na przecięciu przedłużenia linii odbicia z prostopadłą padania (por. definicję 6 księgi VI), która jest osią optyczną, ale nie jest główną osią optyczną. Na rysunku W13 przedstawiono zgodnie z wykładem Witelona powstawanie obrazu w zwierciadłach kulistych wypukłych. Łuk BC oznacza część zwierciadła obejmowaną stożkiem widzenia o wierzchołku w środku oka (punkt A). Przez E oznaczono punkt odbicia, literą O środek krzywizny zwierciadła, a przez D punkt, którego obraz, według Witelona, powstaje w punkcie F. Linia DE jest linią padania, linia AE linią odbicia, zaś linia EN prostopadłą do powierzchni zwierciadła poprowadzoną z punktu odbicia E. Prosta DO jest prostopadłą padania, a prosta AO średnicą widzenia (zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, jest to główna oś optyczna). Linią przerywaną EF oznaczono przedłużenie linii odbicia AE. Punkt przecięcia się linii EF z prostopadłą padania DO jest, zgodnie z teorią podaną przez Witelona, obrazem punktu D. Przedstawiony sposób znajdowania obrazu jest wprawdzie zgodny z mechanizmem powstawania obrazu w oku, przyjętym przez Witelona i jemu współczesnych, ale jest błędny z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy z tego powodu, że nie analizuje się wiązki promieni, ale jeden promień, wzdłuż którego rozprzestrzenia się forma. Stosowana przez Witelona metoda daje w przybliżeniu poprawne wyniki w przypadku punktów położonych blisko średnicy widzenia, która jest główną osią optyczną zwierciadła i promieni przysiowych. Zastosowanie jednak tej metody dla promieni pozaosiowych i punktów leżących daleko od głównej osi optycznej daje błędne wyniki. Należy jednak podkreślić, że postępowanie autora *Perspektywy* jest w tym przypadku całkowicie zgodne z ówczesnym stanem wiedzy i spowodowane zostało znanym wówczas mechanizmem powstawania obrazu w oku oraz brakiem rozróżnienia pomiędzy obrazem rzeczywistym i pozornym. Brak takiego rozróżnienia sprawia, że część konstrukcji obrazów w księdze VI i VII *Perspektywy* jest błędna w świetle współcześnie obowiązujących praw optyki. Tych konstrukcji nie będziemy jednak w tym miejscu analizować, ponieważ te przypadki zostaną odnotowane w przeglądzie treści oraz w komentarzach do odpowiednich twierdzeń. Trzeba również zaznaczyć, że Witelo jest świadomy tego, że obraz w zwierciadłach wypukłych może być powiększony w stosunku do przedmiotu, równy mu bądź mniejszy od niego. Powiększenie traktuje jednak jakościowo. Zniekształcenie obrazów w zwierciadłach wypukłych przy braku znajomości zjawiska aberracji w tych zwierciadłach autor *Perspektywy* może jedynie za-

sygnalizować i przedstawić na najprostszych przykładach, to jest na przykładzie linii prostej i łuku.

3.5. Powstawanie obrazu w zwierciadłach wypukłych cylindrycznych i stożkowych

Konstrukcja obrazów w zwierciadłach wypukłych cylindrycznych i stożkowych jest bardziej złożona niż w przypadku zwierciadeł płaskich i kulistych wypukłych. Z powodu małej użyteczności zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych nie istnieje teoria tych zwierciadeł. Informacje ilościowe na ich temat, zresztą bardzo skąpe, można znaleźć tylko w niektórych specjalistycznych opracowaniach. W naszym wykładzie ograniczymy się do podania jakościowego opisu tych zwierciadeł, zgodnie ze współczesną optyką geometryczną.

3.5.1. Zwierciadła wypukłe cylindryczne

Jeżeli promień świetlny pada na zwierciadło wypukłe cylindryczne w płaszczyźnie przechodzącej przez oś i tworzącą cylindra, to odbicie promienia zachodzi tak jak od zwierciadła płaskiego, a jeżeli pada w płaszczyźnie równoległej do podstaw cylindra (jest to płaszczyzna prostopadła do osi), to jego odbicie będzie zachodziło tak jak od zwierciadła kulistego wypukłego. W przypadku gdy promień padający leży na płaszczyźnie przecinającej oś cylindra pod jakimś kątem α ($0 < \alpha < 90^\circ$), to przecięcie pobocznic cylindra i płaszczyzny jest elipsą i odbicie promienia będzie zachodziło jak od zwierciadła elipsoidalnego (nazywanego potocznie zwierciadłem eliptycznym) wypukłego. Powierzchnia elipsoidalna powstaje w wyniku obrotu elipsy wokół jej wielkiej osi. Teoria zwierciadeł eliptycznych jest jednak na tyle złożona, że można niektóre informacje znaleźć wyłącznie w wysoce specjalistycznych opracowaniach³⁹.

Jak wynika z księgi VII, Witelo nie znał zwierciadeł eliptycznych wypukłych. Jego rozważania na temat odbicia formy padającej na zwierciadło cylindryczne wypukłe są prawdziwe w takim stopniu, w jakim odpowiadają one odbiciu pojedynczego promienia świetlnego w naszym rozumieniu. Jeżeli na zwierciadło cylindryczne wypukłe pada rozbieżna wiązka promieni świetlnych, to wówczas, w zależności od tego, jak padają poszczególne promienie, nastąpi ich odbicie w taki sposób, jak od wyżej wymienionych trzech rodzajów zwierciadeł. Od tego zatem, jaki jest promień krzywizny zwierciadła, będzie zależał punkt przecięcia

³⁹ Patrz np. M. Herzberger, *Modern geometrical optics*, New York 1958.

przedłużeń promieni odbitych. Z tego też powodu wystąpią podobne wady jak w przypadku zwierciadeł kulistych wypukłych. Położenie obrazu pozornego i jego zniekształcenia będą zależały od tego, jaka część wiązki odbitej wpada do oka. Witelo mówiąc o odbiciu od zwierciadeł wypukłych cylindrycznych wyraźnie podkreśla różny charakter odbicia, uzależniony od położenia płaszczyzny odbicia i rozróżnia wspomniane trzy przypadki. Miejsce, w którym powstaje obraz punktu, określa Witelo zgodnie z twierdzeniem V,37. Wyznaczenie tego miejsca jak również wyjaśnienie samego zjawiska jest błędne, chociaż opis zakrzywienia obrazu linii prostej jest bardzo dokładny.

3.5.2. Zwierciadła wypukłe stożkowe

W przypadku zwierciadeł wypukłych stożkowych promień świetlny padający i promień odbity mogą się znajdować albo na płaszczyźnie przechodzącej przez tworzącą i oś stożka albo na płaszczyźnie przecinającej oś stożka pod pewnym kątem. Odbicie promienia świetlnego będzie więc zachodziło jak od zwierciadła płaskiego albo jak od zwierciadła wypukłego eliptycznego. Takie stanowisko zajmuje również Witelo. Ponieważ zwierciadła wypukłe stożkowe zachowują się tak jak zwierciadła cylindryczne wypukłe, nie będziemy ich więc oddzielnie omawiali.

4. PRZEGLĄD TREŚCI KSIĘGI V, VI i VII

Materiał przedstawiony w księgach V – IX *Perspektywy* Witelona poświęcony jest widzeniu przedmiotów przy użyciu zwierciadeł. W księdze V znajdujemy omówienie zjawiska odbicia światła, ogólnych własności zwierciadeł oraz widzenia przedmiotów przy użyciu zwierciadeł płaskich lub ich układów. Księga VI poświęcona jest widzeniu przedmiotów przy użyciu zwierciadeł kulistych wypukłych, a księga VII widzeniu przedmiotów przy użyciu zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych. Omówienie i interpretacja zjawiska odbicia, przedstawione przez Witelona, są zdeterminowane mechanizmem widzenia, jaki poznaliśmy w księdze III jego dzieła⁴⁰. Błędne rozumienie powstawania obrazu w oku oraz przyjęcie pojęcia formy sprawiają, że z punktu widzenia obecnego stanu wiedzy szereg twierdzeń w interesujących nas księgach jest nieprawdziwych, jak również dowody wielu twierdzeń są nieprawdziwe, chociaż same twierdzenia są prawdziwe. Należy zaznaczyć, że w przypadku zwierciadeł płaskich występuje jednak zgodność wyników

⁴⁰ Omówienie budowy oka, mechanizmu powstawania obrazu w oku i widzenia obuocznego podaje Witelo w księdze III *Perspektywy*. Syntetyczne przedstawienie tych zagadnień podano we Wstępie do wydania księgi II i III (Wit. Persp. PP) w rozdziale I.6, patrz także A. Bielski, L. Bieganowski, W. Wróblewski, *Mechanizm powstawania obrazu*, s. 315 – 333.

podawanych przez Witelona ze stanem obecnym optyki, o czym wspominaliśmy w poprzednim rozdziale. Jest ona jednak przypadkowa.

4.1. Przegląd treści księgi V

Księga V *Perspektywy* wprowadza nas w zagadnienie zjawiska odbicia światła i powstawania obrazów przedmiotów widzianych w świetle odbitym od powierzchni zwierciadeł. We wstępie do tej księgi Witelo przedstawia jej dyspozycję wskazując równocześnie na wagę poruszanych w niej problemów, ważnych dla dalszych rozważań. We wstępie czytamy: *Najpierw zatem, w tej piątej księdze naszego naukowego dzieła, wyłożymy pewne zasady, które uważam za wspólne dla wszystkich zwierciadeł, a następnie dodamy do tego zjawiska, jakie zachodzą w oku przy [widzeniu] przedmiotów tylko w przypadku zwierciadeł płaskich.*

W świetle tego cytatu jak i późniejszych wywodów błędne jest twierdzenie niektórych autorów⁴¹, że księga V traktuje wyłącznie o zwierciadłach płaskich. Na podkreślenie zasługuje fakt, że Witelo był świadomy tego, że odbicie światła od zwierciadeł zachodzi zawsze, niezależnie od tego, czy widzimy światło odbite czy go nie spostrzegamy. To swoje przekonanie formułuje we wstępie w sposób następujący: *Nie sądzimy, aby to odbicie zachodziło wyłącznie do oczu istot żywych, ale odbicie zachodzi także wtedy, gdy oczu nie ma i dochodzi do oczu, jeśli są one umieszczone w miejscach, do których odbijają się formy.* Witelo, jak wynika z powyższych słów, zdawał sobie sprawę, że oczy są jedynie detektorem światła odbitego od zwierciadeł, a mimo to, o czym mówiliśmy w poprzednim rozdziale, autor *Perspektywy* analizuje układ oko – zwierciadło – przedmiot – obraz. Na zakończenie wstępu znajdujemy uwagi o relacji zachodzącej między widzeniem bezpośrednim przedmiotu a widzeniem tego samego przedmiotu w świetle odbitym od zwierciadła.

Materiał zgromadzony w księdze V składa się z 14 definicji, 2 postulatów i 65 twierdzeń. W definicjach otrzymujemy określenia podstawowych pojęć związanych ze zjawiskiem odbicia światła i właściwościami zwierciadeł. Znajdujemy tu ważne definicje linii padania i linii odbicia oraz kąta padania i kąta odbicia.

Pojęcia linii padania i linii odbicia są ściśle powiązane z pojęciem formy i naturą światła w rozumieniu Witelona oraz mechanizmem powstawania obrazu w oku. Z formalnego punktu terminy te wydają się być równoznaczne współczesnym określeniom *promień padający* i *promień odbity*, używanym dzisiaj w optyce geometrycznej. Jest to jednak podobieństwo pozorne. Witelo uważa, że forma rozprzestrzeniająca się

⁴¹ Patrz rozdział I.2.

wzdłuż linii padania pada na zwierciadło, odbija się i dalej rozprzestrzenia się wzdłuż linii odbicia. Obraz przedmiotu widzianego w świetle odbitym powstanie w oku wtedy, gdy forma przedmiotu rozprzestrzeniająca się wzdłuż linii odbicia wpadnie do oka. Dziś wiemy, że forma nie istnieje. Zgodnie ze współczesną teorią, o czym mówiono w poprzednim rozdziale, w oku może powstać obraz widzianego przedmiotu w świetle odbitym tylko wówczas, kiedy wpadnie do oka wiązka światła (wiązka promieni świetlnych). Kiedy natomiast rozpatrujemy przebieg pojedynczego promienia, padającego na zwierciadło i odbijającego się od niego, to w takim przypadku ma on takie samo znaczenie, jak dla Witelona miała linia padania i linia odbicia. Te pojęcia bowiem są równoważne. Wszędzie tam, gdzie Witelo rozważa przebieg linii padania i linii odbicia, a nie rozprzestrzenianie się form wzdłuż tych linii, otrzymuje wyniki poprawne, tj. zgodne z dzisiejszym stanem wiedzy. Jednak definicje kąta padania i kąta odbicia są, jak podaje A. M. Smith⁴², zgodne ze starożytną tradycją, a różnią się od współczesnych definicji, o czym obszernie informujemy czytelnika w przypisach do definicji księgi V.

Materiał wyłożony w księdze V, zgodnie z sugestią Witelona, zamieszczono we wstępie, możemy podzielić na dwie części. Pierwsza część obejmuje twierdzenia 1–42, w których znajdujemy opis zjawiska odbicia światła oraz omówienie ogólnych własności zwierciadeł, a przede wszystkim zwierciadeł nazywanych przez Witelona zwierciadłami regularnymi, które dokładniej opisuje w twierdzeniu 8. Twierdzenia 43–65 przynoszą nam omówienie własności zwierciadeł płaskich oraz obrazów w zwierciadłach płaskich i układach tych zwierciadeł. Księga V w większości poświęcona jest więc zjawisku odbicia światła w ogóle, a tylko jedna trzecia tej księgi traktuje o zwierciadłach płaskich.

Na samym początku księgi, w twierdzeniu 1, Witelo w sposób jakościowy dowodzi, że światło odbite od wypolerowanych powierzchni o dowolnym kształcie, a wraz z nim barwy i formy, rozchodzą się po liniach prostych, dodając na zakończenie tego twierdzenia, że zjawisko odbicia nie zachodzi od przedmiotów nie wypolerowanych i chropowatych. Zarówno samo twierdzenie, jak i jego uzasadnienie nie są prawdziwe. Zagadnienie to zostało wyjaśnione w przypisie 1 do tego twierdzenia.

Następne dwa twierdzenia (2 i 3) poświęcone zostały jakościowemu przedstawieniu relacji zachodzących między natężeniem i barwą światła padającego i światła odbitego. Witelo wie, że światło odbija się tylko częściowo i każde odbicie osłabia światło, barwę i w ogóle formę. Sformułowania tych twierdzeń są zgodne z poglądami średniowiecznymi, ale

⁴² Wit. Persp. SI, s. 153.

są błędne w świetle współczesnych interpretacji. Jeśli jednak uwzględnimy ówczesne poglądy na naturę światła i barwy, to okaże się, że przedstawiają one poprawnie w sposób **jakościowy** zjawisko odbicia światła. Poniżej podajemy wyjaśnienie tych twierdzeń w świetle współczesnej optyki. Dzisiaj wiemy, że gdy wiązka światła pada na powierzchnię dowolnego ciała, to część jej może przejść przez dane ciało, część zostanie pochłonięta, a część ulegnie odbiciu. Miarą ilości przechodzącego światła jest przezroczystość ośrodka T , która jest zdefiniowana następująco:

$T = \text{natężenie światła przechodzącego} / \text{natężenia światła padającego}.$

Przezroczystość $T < 1$ i jest funkcją długości fali światła λ , czyli $T = T(\lambda)$. Miarą ilości pochłoniętego światła jest zdolność absorpcyjna danego ciała, którą oznaczamy jako A .

$A = \text{natężenie światła pochłoniętego} / \text{natężenie światła padającego}.$

Zdolność absorpcyjna $A < 1$ i jest funkcją długości fali światła. Miarą ilości światła odbitego jest współczynnik odbicia, który oznaczamy jako R .

$R = \text{natężenie światła odbitego} / \text{natężenie światła padającego}.$

Ten współczynnik jest również funkcją długości fali światła i jest zawsze $R < 1$. Współczynniki $T(\lambda)$, $A(\lambda)$ i $R(\lambda)$ są oczywiście zależne od rodzaju materiału, z jakiego wykonane zostało dane ciało. Jak wynika z zasady zachowania energii, współczynniki T , A oraz R spełniają związek:

$$T(\lambda) + A(\lambda) + R(\lambda) = 1.$$

Z tego, co powiedziano powyżej, wynika, że:

1. zawsze przy odbiciu światła występują straty i natężenie światła odbitego jest mniejsze niż światła padającego;
2. skoro współczynniki T , A i R są zależne od długości fali, to przy odbiciu barwa światła odbitego może ulec zmianie;
3. natężenie światła odbitego od powierzchni ośrodków częściowo przezroczystych jest małe.

Niektóre obserwacje Witelona wyjątkowo trafne nie znajdują jednak poprawnego wyjaśnienia w jego wywodach, gdyż dopiero dzisiaj możemy je wytłumaczyć. Witelo często porównuje zwierciadła wykonane z żelaza z tymi wykonanymi ze srebra. Podczas odbicia światła od zwierciadeł wykonanych ze srebra, jak wynika z dowodu twierdzenia 3, nie następuje mieszanie barwy przedmiotu z barwą zwierciadła, tzn. barwa przedmiotu widzianego w świetle odbitym nie ulega zmianie. Fakt ten

można wytłumaczyć dzisiaj w sposób następujący: jak pokazały badania doświadczalne, współczynnik odbicia srebra R jest prawie stały w zakresie światła widzialnego i wynosi $R \cong 0,9$. Praktycznie jest więc niezależny od długości fali światła padającego. Z tego powodu przy odbiciu od zwierciadeł wykonanych ze srebra światło odbite ulega jedynie nieznacznemu osłabieniu bez zmiany barwy. Osłabienie to było niemożliwe do wykrycia w czasach Witelona.

W księdze II, w definicji 4 wprowadza Witelo pojęcie światła wtórnego. Jak wynika z tej definicji, światłem wtórnym nazywa się światło padające na dany przedmiot w wyniku rozproszenia światła wychodzącego z jakiegoś ciała, nazywanego światłem pierwotnym. W twierdzeniu 4 księgi V natomiast wyjaśnia autor, że jeśli przedmiot znajduje się w określonej odległości od źródła światła, to jego oświetlenie światłem odbitym jest silniejsze niż światłem wtórnym (tzn. rozproszonym). Warunkiem zaistnienia takiej sytuacji jest to, aby przedmiot oświetlany światłem odbitym i wtórnym znajdował się w tej samej, ustalonej, odległości od źródła światła, jak to wynika z twierdzenia II,22, w którym Witelo dowodzi, że oświetlenie przedmiotu maleje ze wzrostem jego odległości od źródła światła.

Uważna lektura *Perspektywy* Witelona wywołuje wrażenie, że autor tego optycznego dzieła bardzo starannie redagował swój traktat, starając się, aby czytelnik mógł z łatwością śledzić wywody. W tym celu często odwołuje się do wcześniejszych twierdzeń czy założeń, aby je przypomnieć we właściwym miejscu. Taką funkcję pełni twierdzenie 5, w którym Witelo cytuje postulat 8 z księgi II, gdzie czytamy: *Natura niczego nie dokonuje na próżno i nie zawodzi w rzeczach koniecznych*. Stwierdzenie to mające charakter ogólny tutaj autor odnosi do zjawiska odbicia światła i z tego powodu w tej księdze otrzymuje ono właściwe dla tego zjawiska sformułowanie: *Natura we wszystkich przypadkach działa po liniach krótszych*. Wydaje się, że m.in. to sformułowanie pozwoliło F. Fermatowi⁴³ w połowie XVII w. określić zasadę nazywaną w optyce geometrycznej zasadą Fermata. Mówi ona, że droga optyczna (tzn. iloczyn współczynnika załamania i drogi geometrycznej), jaką przebywa promień świetlny między dwoma punktami, jest ekstremalna; zazwyczaj jest ona najkrótsza.

Podobne znaczenie ma również następne 6 twierdzenie, w którym Witelo przypomina o rozważaniach przeprowadzonych na temat sposobu rozchodzenia się światła w twierdzeniu II,3, gdzie zagadnienie linii dostrzegalnych zmysłami, po których rozchodzi się światło, zostało wyczerpująco omówione. Tutaj jedynie autor zwraca uwagę na fakt, że tę

⁴³ Por. przypis 31.

linię można zastąpić linią matematyczną. Taką samą funkcję przypominania pełni także twierdzenie 7, w którym Witelo mówi o złudzeniach, jakie mogą wystąpić w przypadku odbicia światła, bowiem o złudzeniach i błędach postrzegania obszernie wypowiadał się i temat ten dokładnie opracował autor *Perspektywy* w księdze IV⁴⁴. Dlatego w tym miejscu zwraca uwagę jedynie na trzy momenty. Zdaniem Witelona, podczas odbicia światła złudzenia w postrzeganiu powodują przede wszystkim: zbyt słabe światło, nieodpowiednie położenie przedmiotu względem zwierciadła oraz oddalenie przedmiotu bądź oka od powierzchni zwierciadła.

Kolejne twierdzenie wprowadza nas już bezpośrednio w rozważania na temat zwierciadeł. Witelo wymienia siedem zwierciadeł, od których zachodzi odbicie regularne, jak je sam określa, chociaż nigdzie nie objaśnia, co rozumie przez odbicie regularne. Z tego powodu możemy jedynie pośrednio zorientować się, co oznacza takie odbicie. Pewną wskazówkę daje nam treść twierdzenia I,118, w którym Witelo podaje definicje powierzchni regularnych, którymi nazywa płaszczyzny oraz powierzchnie kuliste, cylindryczne i stożkowe wypukłe bądź wklęsłe⁴⁵. I od tych właśnie powierzchni, dodaje Witelo w twierdzeniu 8, możliwe jest odbicie regularne. Regularność odbicia zależy zatem od rodzaju powierzchni.

Odrębną grupę w księdze V stanowią twierdzenia 9–17. W pierwszym z nich (tw. 9) podaje dokładny opis przyrządu, za pomocą którego można wykazać doświadczalnie, że w przypadku wszystkich zwierciadeł regularnych kąt padania jest równy kątowi odbicia. Rysunki konstrukcyjne tego przyrządu odtworzone na podstawie opisu Witelona, zamieszczono w załączniku do przekładu księgi V. Sposób wykonania zwierciadeł i przeprowadzenia doświadczeń opisane zostały w twierdzeniach od 10 do 17. Doświadczalną część swoich wywodów Witelo kończy refleksją, w której stwierdza, że równości kątów padania i odbicia można dowieść także drogą rozumowania, które zostaje przedstawione w dwóch

⁴⁴ Szczegółowe omówienie błędów w postrzeganiu przy widzeniu bezpośrednim podaje Witelo w księdze IV *Perspektywy*, a sumaryczne omówienie tych zagadnień przedstawiliśmy we Wstępie do wydania księgi IV (Wit. Persp. PPII) w rozdziale I.5.

⁴⁵ W twierdzeniu I,118, które, jak słusznie zauważa S. Unguru (Wit. Persp. UI, s. 197), jest raczej definicją niż twierdzeniem, podaje Witelo określenia powierzchni, które nazywa regularnymi, wklęsłymi lub wypukłymi. Powierzchnie te powstają przez obrót koła, trójkąta, prostokąta i są to odpowiednio: powierzchnia kulista, powierzchnia stożka obrotowego i walca. Powierzchnia kulista powstaje przez obrót półkola wokół średnicy, powierzchnia stożka obrotowego przez obrót trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych, a powierzchnia walca przez obrót prostokąta wokół jednego z boków. Witelo korzysta z określeń tych powierzchni podanych przez Euklidesa we Wstępie do księgi XI jego dzieła (patrz *Euklides początków geometrii ksiąg ośmiornasto, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta*, przekład J. Czech, Wilno 1817, s. 231n). Por. twierdzenie V,8, przypis I.

następnych twierdzeniach 18 i 19. W pierwszym z nich Witelo korzysta z Ptolemeusza, jak na to wskazuje referencja Risnera, i stwierdza w nim: *Każdą rzecz widzianą w świetle odbitym od dowolnego zwierciadła oko postrzega po najkrótszej linii*. Treść tego sformułowania odpowiada zasadzie Fermata i można mu nadać następującą postać: *Całkowita droga promienia świetlnego od punktu świecącego (przedmiotu) do zwierciadła i od zwierciadła do punktu, do którego odbija się światło, jest najkrótsza ze wszystkich możliwych dróg*. Witelo nie rozwija jednak tego zagadnienia i jedynie krótko podkreśla, że suma długości linii padania i linii odbicia, na końcu której znajduje się oko, jest najmniejsza. Witelo odwołuje się tu do twierdzenia 5 oraz wcześniejszego i niestety niezachowanego dzieła *Filozofia naturalna*⁴⁶, jednak dowód twierdzenia 18 został przeprowadzony w następnym 19 twierdzeniu, które, jak można sądzić na podstawie tego, że brakuje referencji Risnera, zostało opracowane samodzielnie przez Witelona, gdzie dowodzi on, że w przypadku zwierciadeł płaskich i wypukłych suma długości linii padania i linii odbicia jest najmniejsza, gdy kąt padania jest równy kątowi odbicia. Na podstawie równości kątów padania i odbicia wnioskuje on:

1. ani długość linii padania, ani długość linii odbicia nie ma wpływu na zjawisko odbicia (tw. 20);
2. promień padający prostopadle odbija się również prostopadle, tzn. odbija się po tej samej drodze (tw. 21).

Należy zwrócić uwagę, że Witelo w swoim optycznym dziele nie ogranicza się wyłącznie do wywodów czysto fizycznych, ale często nawiązuje do rozważań psychologiczno-filozoficznych. Interesuje go nie tylko fizyczny mechanizm danego zjawiska, ale również jego podłoże psychologiczne. I tak w twierdzeniu 23 wyjaśnia, że widzenie przedmiotów przy użyciu zwierciadeł nie zachodzi w wyniku odbicia promieni, które są wysyłane przez oko i odbijają się od zwierciadeł do przedmiotów, ale ma miejsce dlatego, że promienie, wysyłane przez przedmiot, odbijają się od zwierciadeł do oczu. Witelo w tym twierdzeniu nawiązuje do wcześniejszych swoich rozważań, przedstawionych w twierdzeniu III,5, skąd dowiadujemy się, że akt widzenia ma miejsce wtedy, gdy promienie wpadają do oczu. Tam też polemizuje z przedstawicielami innego stanowiska, którzy utrzymywali, że widzenie jest rezultatem wysyłania promieni przez oko. Jednak żeby zobaczyć odbity obraz, kontuuje Witelo w twierdzeniu 24, linia odbicia rozprzestrzeniającej się

⁴⁶ W dziele *Filozofia naturalna* był rozdział poświęcony „Działaniom naturalnym”, gdzie, jak wynika z kontekstu twierdzenia 18, była mowa o różnych zjawiskach przyrodniczych i wzajemnym ich oddziaływaniu na siebie. Niestety, treść tego dzieła z powodu jego zaginięcia nie jest nam znana.

formy musi trafić do oka. Oznacza to, że obraz przedmiotu zobaczymy w zwierciadle wówczas, gdy oko znajduje się w takim położeniu, że linia odbicia wpada do niego.

Kolejne trzy twierdzenia (25–27) poświęcone zostały omówieniu płaszczyzny odbicia, punktom oraz liniom, leżącym na tej płaszczyźnie. Witelo dowodzi, że:

1. płaszczyzna odbicia jest prostopadła do powierzchni każdego zwierciadła (tw. 25);
2. linia dzieląca na równe części kąt utworzony przez linie padania i odbicia musi być prostopadła do linii będącej przecięciem się płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła (tw. 26);
3. na płaszczyźnie odbicia muszą znajdować się punkt widzianej formy, środek oka, punkt odbicia, punkt końcowy prostopadłej do powierzchni zwierciadła oraz punkt końcowy prostopadłej padania i prostopadłej odbicia (tw. 27).

Należy zaznaczyć, że twierdzenia 25–27 są prawdziwe z punktu widzenia dzisiejszego stanu wiedzy.

Po opisanu geometrycznych konstrukcji, przedstawiających zjawisko odbicia, Witelo przechodzi do omówienia obrazów, powstających w wyniku odbicia. Obrazy są jednak rezultatem rozprzestrzeniania się form. Nic dziwnego, że właśnie zachowaniom się form zostają poświęcone kolejne twierdzenia 28–35. Witelo określa przede wszystkim punkt odbicia się formy, padającej ukośnie na powierzchnię zwierciadła i wpadającej do oka. Punkt ten, jak pisze autor w twierdzeniu 28, znajduje się pomiędzy punktami, w których prostopadłe padania i odbicia przecinają powierzchnię zwierciadła. W twierdzeniach 29–31 i 34 otrzymujemy objaśnienia niektórych zasad, którym podlega odbicie form punktów od zwierciadeł i ich droga do oka. Dowiadujemy się więc, że formy dwóch punktów tego samego przedmiotu nie mogą odbić się do oka jednocześnie od jednego punktu zwierciadła płaskiego lub wypukłego; że forma jednego punktu nie może odbić się od dwóch punktów zwierciadła płaskiego lub wypukłego do tego samego oka itd. Wyjaśnia także, że linia odbicia formy padającej ukośnie na zwierciadło nie pokrywa się z linią padania. Oznacza to, że forma padająca ukośnie nie odbija się po tej samej drodze, po której pada, ale przecina kąt rozwarty, znajdujący się między linią padania i powierzchnią zwierciadła (tw. 33). Rozważania na temat zachowania się form są kontynuowane w twierdzeniach 38, 40 i 41, gdzie jest mowa o przyczynach zniekształcenia form. Jedną z przyczyn, które sprawiają, że formy dochodzą do oczu w postaci zniekształconej, są jakość i kształt powierzchni zwierciadła. W przypadku bowiem, gdy w trakcie polerowania wystąpią deformacje kształtu powierzchni, następuje również zniekształcenie form i w rezultacie oko postrzega ob-

raz zniekształcony. Innym błędem jest podwójne widzenie, któremu Witelo poświęca krótkie wyjaśnienie w twierdzeniu 41, odsyłając czytelnika do księgi IV (tw. 103–107), gdzie wprawdzie jest mowa o podwójnym widzeniu, ale odnosi się ono do widzenia bezpośredniego. Jednak okoliczności wywołujące ten błąd są takie same przy widzeniu bezpośrednim i widzeniu w świetle odbitym i z tego powodu Witelo nie musiał powtarzać wcześniejszych wywodów.

Wcześniej jednak (tw. 36 i 37) zostanie określone miejsce obrazu punktu widzianego w świetle odbitym od zwierciadła dowolnego kształtu. Miejsce to, jak podaje Witelo, znajduje się na przecięciu przedłużenia prostopadłej padania z przedłużeniem linii odbicia. Dowody tych twierdzeń mają charakter jakościowego wyjaśnienia zjawiska. Dodać tutaj należy, że konstrukcja obrazu, chociaż dokonana przy błędnych założeniach, w przypadku zwierciadeł płaskich daje poprawne rezultaty, zaś w przypadku zwierciadeł wypukłych otrzymane wyniki są błędne. Po wyjaśnieniu w twierdzeniu 42, że przesunięcie przedmiotu względem zwierciadła powoduje przesunięcie jego obrazu, Witelo kończy część pierwszą księgi V poświęconą własnościom zwierciadeł o dowolnym kształcie, aby przejść następnie do omówienia zjawisk właściwych dla zwierciadeł płaskich, o czym, zgodnie z zapowiedzią ze wstępu, informuje na koniec twierdzenia 42 pisząc: *Tak więc po przedstawieniu tych wspólnych zjawisk dla wszystkich zwierciadeł, pozostaje nam opisać zjawiska właściwe dla zwierciadeł płaskich.*

Wśród pozostałych dwudziestu trzech twierdzeń (tw. 43–65), poświęconych zwierciadłom płaskim, ich układom i postrzeganiu form, znajdujemy dwa twierdzenia (43, 50) pomocnicze, w których autor udowadnia różne zależności zachodzące między prostopadłymi oraz liniami padania i odbicia, które zostaną wykorzystane w dowodach innych twierdzeń. Witelo w następnych twierdzeniach kolejno omawia metody: znajdowania miejsca, do którego odbija się forma, tzn. miejsca, w którym, gdy umieścimy oko, zobaczymy obraz formy w zwierciadle (tw. 44) oraz znajdowania punktu odbicia formy do oka znajdującego się w określonym położeniu (tw. 46). Bardzo ważne są dwa dalsze twierdzenia (tw. 48 i 49), w których podaje autor metodę znalezienia miejsca, w którym powstaje obraz w zwierciadle płaskim (tw. 48), oraz dowodzi, że odległość obrazu punktu od powierzchni zwierciadła płaskiego jest równa odległości punktu od tej powierzchni (tw. 49). Następnie przechodzi do omówienia widzenia obuocznego (tw. 51) i własności obrazów w zwierciadłach płaskich (tw. 52–55). Podobnie jak w przypadku zwierciadeł w ogóle, o czym wspomniano wcześniej, także przy zwierciadłach płaskich jakość obrazu zależy od płaskości i gładkości powierzchni zwierciadła, tzn. w przypadku, gdy powierzchnia zwierciadła płaskiego jest

bez wad, to, jak pisze Witelo w twierdzeniu 52: *obraz... jest równy formie rzeczy poza [zwierciadłem]*. Omawia także położenie obrazów w zwierciadłach, które jest uzależnione od położenia przedmiotów względem zwierciadeł (tw. 53 i 54). Szczególnie ważne jest twierdzenie 55, w którym znajdujemy wyjaśnienie, dlaczego obserwator widzi w zwierciadle płaskim prawą stronę przedmiotu jako lewą, a lewą jako prawą.

Interesujące są uwagi zawarte w twierdzeniach 56 i 57, w których Witelo przedstawia praktyczne możliwości wykorzystania zwierciadeł. Okazuje się, że możemy zwierciadła płaskie ustawić w taki sposób, że obserwator nie widzi swojego obrazu, natomiast widzi inny przedmiot. W drugim zaś przypadku zwierciadło możemy tak ustawić, że zobaczymy to, co dzieje się w miejscu niedostępnym do bezpośredniej obserwacji. W tym ostatnim twierdzeniu, jeśli wierzyć referencjom Risnera, Witelo idąc za Ptolemeuszem opisuje po prostu zasadę działania peryskopu. W twierdzeniach 58, 59 i 64 opisuje autor różne ciekawe efekty, jakie możemy uzyskać używając większej liczby zwierciadeł płaskich. Dowiadujemy się więc, że przy odpowiednim ustawieniu zwierciadeł obserwator może zobaczyć swój własny obraz zwielokrotniony, ustawiony w szyku jak śpiewacy w chórze (tw. 58), a w innym znów przypadku obserwator może zobaczyć siebie zawieszonego w powietrzu (tw. 59). Istnieje również i taki układ dwóch zwierciadeł, w których obserwator na jednym zwierciadle widzi siebie odchodzącego, a na innym przychodzącego (tw. 64). Nie trzeba dodawać, że opisane przez Witelona efekty są dzisiaj powszechnie znane, gdyż wykorzystuje się je w tzw. gabinetach luster. W twierdzeniach 60–63 opisane są efekty, jakie można uzyskać przy użyciu układu wielu zwierciadeł płaskich, gdy są one ustawione prostopadle względem siebie bądź ustawione tak, że tworzą powierzchnię boczną graniastosłupa foremego (tw. 61). Witelo wyjaśnia, że w przypadku nieparzystej liczby takich zwierciadeł, stronę lewą przedmiotu widzimy w zwierciadle jako prawą, a prawą jako lewą, natomiast gdy liczba zwierciadeł jest parzysta, prawa strona jest widoczna jako prawa, a lewa jako lewa (tw. 63). Wreszcie w ostatnim 65 twierdzeniu dowodzi Witelo niemożliwość wywołania ognia przez odbicie światła od zwierciadła płaskiego i przedstawia możliwość jego wywołania za pomocą zwierciadeł płaskich odpowiednio ustawionych tak, że odbijają promienie do jednego punktu, np. gdy są styczne do powierzchni kuli⁴⁷. Autor *Perspektywy* przy tej okazji polemizuje z Antemiuszem z Tralles⁴⁸, który

⁴⁷ Jak podaje Bystrzycki (J. Bystrzycki, *Rozprawa o wzroście nauk fizycznych w Polsce*, Roczniki Towarzystwa Królewskiego Warszawskiego Przyjaciół Nauk, t.12 (1818), s. 187), pomysł ten zrealizowano w Paryżu pięćset lat później. Por. przypis do twierdzenia 65.

⁴⁸ Antemiusz, syn lekarza, pochodził z Tralles w Azji Mniejszej, żył w VI wieku w czasach Justyniana. Był architektem i matematykiem. W 532 roku przebudował stary kościół Hagia Sophia. Według przekazanej anegdoty, prześladował swojego sąsiada i rywala, Zenona, w ten

napisał dzieło na temat skupiających własności zwierciadeł parabolicznych i był autorem traktatu *O niezwykłych przyrządach*. Słusznie podkreśla A. M. Smith⁴⁹, że w tym twierdzeniu spotykamy się z jednym z rzadkich przypadków, kiedy Witelo wymienia autora źródła, z którego korzysta, a w dodatku, to trzeba tutaj podkreślić, z nim polemizuje, chociaż nie wymienia tytułu traktatu. Wydaje się, że pozostałe opisane w *Perspektywie* zjawiska, poczynając od twierdzenia 56, pochodzą również ze źródeł starożytnych, o czym wspomina Witelo w twierdzeniu 64, pisząc o zdolnościach i pilności starożytnych, podkreślając jednak, że tymi zjawiskami interesują się raczej rzemieślnicy i wyjaśnia, że z tego powodu nie będzie się tym tematem zajmował. W ten sposób Witelo daje do zrozumienia, że zajmują go zagadnienia teoretyczne, a nie interesuje się praktycznym wykorzystaniem zjawisk optycznych. Niestety, Witelo nie wymienia tych starożytnych autorów. Pomocny okazuje się F. Risner, który opatrzył te twierdzenia referencjami do *Katoptryki* Euklidesa bądź Ptolemeusza. Trzeba jednak wyjaśnić, że ten traktat w średniowieczu błędnie przypisywano Ptolemeuszowi, bo prawdziwym jego autorem był Heron z Aleksandrii⁵⁰ i z niego to korzystał Witelo, co potwierdza

sposób, że skierował światło słoneczne na jego dom oraz wywołał wrażenie trzęsienia ziemi w domu Zenona przy użyciu pary, tłoczonej pod ciśnieniem rurami połączonymi z kotłem. Interesował się przecięciami stożkowymi oraz zwierciadłami, o czym pisał w dziele *O niezwykłych przyrządach* (*Peri paradoxon mechanematon*, które wraz z przekł. wydał G. L. Huxley, Cambridge, Mass., 1959), opublikowanym po raz pierwszy w 1777 r., ale znanym już Alhazenowi i Witelonowi, chociaż ten ostatni nie podaje tytułu dzieła Antemiusza, który rozwiązał również problem, jak sprawić, aby bez względu na porę dnia i roku promień słońca, przechodzący przez mały otwór, zawsze padał w dany punkt i nie przesunął się (por. *Dictionary of Scientific Biography*, vol. I, s. 169n.).

⁴⁹ Wit. Persp. SI, s. 188. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w twierdzeniu IV,77 powołuje się Witelo na uczonego arabskiego Massahala, który żył na przełomie VII i VIII wieku; por. przypis 322 przy twierdzeniu IV,77 (Wit. Persp. PPII, s. 296).

⁵⁰ Heron z Aleksandrii żył około 62 roku, co wykazał O. Neugebauer. Był matematykiem, fizykiem, twórcą przyrządów pneumatycznych i mechanikiem. Pod imieniem Herona zachowały się następujące traktaty, napisane po grecku: *Automata*, *Barulkos* (*O podnoszeniu ciężarów*), *Belopoica* (*O wyrzucaniu pocisków*, przynosi opis rodzaju kuszy), *Katoptrika*, *Cheirobalistra*, *Definitiones*, *Dioptra*, (*Opis przyrządów mierniczych*, m. in. teodolitu i przyrządu rejestrującego odległości), *Geometrika*, *Mechanica*, *De mensuris*, *Metrika* (Nauka miernictwa), *Pneumatica*, *Stereometrica*. Wspomniane pisma można podzielić na traktaty o treści technicznej i matematycznej. Te o treści technicznej, z wyjątkiem *Cheirobalistra*, napisał Heron, natomiast uważa się, że spośród traktatów matematycznych Heron był autorem jedynie *Definitiones* i *Metrika*. Niektóre z wymienionych tytułów były częścią innych dzieł, np. *Barulkos* znajdował się jako rozdz. 37 *Dioptra*, a także pojawia się jako rozdz. 1 ks. I dzieła *Mechanica*, które zachowało się jedynie w języku arabskim, podobnie jak *Katoptrika* została przekazana w języku łacińskim, przypisana pierwotnie Ptolemeuszowi, chociaż uważa się ją za dzieło Herona, który pisze o zwierciadłach płaskich i wypukłych i daje teorię odbicia oraz informacje o tym, w jaki sposób wykonać zwierciadła dla różnych celów i jak je ustawić, aby wywołały iluzję. Oryginalność osiągnięć matematycznych Herona można było ocenić dopiero wówczas, kiedy poznano matematykę babilońską. Okazało się, że był on człowiekiem bardzo wykształconym i zdolnym praktycznym matematykiem, tradycje praktycznej matematyki babilońskiej przejęli od niego Arabowie, a za ich pośrednictwem poznała ją Europa w okresie renesansu. Dzieła Herona znajdujemy w: *Heronis Alexan-*

A. M. Smith. Referencje F. Risnera do innych autorów poza Alhazenem i analiza księgi V *Perspektywy*, przeprowadzona przez Smitha pod kątem pochodzenia źródeł, wskazują, że Witelo przy opracowywaniu swojego optycznego dzieła zaglądał także do innych autorów niż Alhazen, wzbogacając traktat materiałami znalezionymi u swoich poprzedników.

4.2. Przegląd treści księgi VI

Księga VI *Perspektywy* poświęcona jest właściwościom zwierciadeł kulistych wypukłych. Do problematyki tej księgi, podobnie jak i w przypadku pozostałych ksiąg, wprowadza wstęp, w którym Witelo nawiązuje do treści księgi V, wskazując na podobieństwa i różnice, jakie istnieją pomiędzy zwierciadłami płaskimi oraz zwierciadłami kulistymi, stożkowymi i cylindrycznymi. W ten sposób wstęp ten zapowiada treść ksiąg VI–IX, wyjaśniając, że na początku będzie mowa o zwierciadłach kulistych wypukłych z tego powodu, że wyjaśnienie ich właściwości jest prostsze niż pozostałych zwierciadeł.

Przedstawienie materiału zaczyna się od podania definicji terminów oraz wielkości fizycznych, które nie zostały określone wcześniej w księdze V, a są ważne dla zrozumienia zjawisk związanych ze zwierciadłami kulistymi wypukłymi i ich własnościami. Również pierwsze dziewięć twierdzeń ma charakter ogólny, wprowadzający i odnoszą się one także do zwierciadeł innych niż zwierciadła kuliste wypukłe. Witelo zatem dowodzi, że płaszczyzna odbicia jest tą powierzchnią, na której leży linia rozprzestrzeniania się formy odbitej od zwierciadła kulistego wypukłego, a przecięciem tej płaszczyzny z kulą zwierciadła jest koło wielkie (tw. 1), a ponadto stwierdza, że na płaszczyźnie odbicia znajduje się środek oka, środek kuli zwierciadła, punkt odbicia i przedmiot (tw. 6). W twierdzeniach 2–5 dowodzi, że:

1. formy odbijają się do oka z powierzchni zwierciadła, widzianej przez oko (tw. 2);
2. przecięcie podstawy stożka widzenia z powierzchnią kuli zwierciadła jest kołem, które jest mniejsze od koła wielkiego tej kuli (tw. 3);
3. gdy oko zbliżamy do powierzchni zwierciadła, to koło, wspomniane powyżej, staje się mniejsze, a gdy oko oddalamy, koło staje się większe;

4. odbicie form do oka może zachodzić tylko od jakiegoś punktu powierzchni zwierciadła, widzianej przez oko (tw. 5).

Uzupełnieniem tych rozważań jest określenie kąta padania i odbicia, podane w twierdzeniu 8, skąd dowiadujemy się, że prostopadła do powierzchni zwierciadła, poprowadzona z punktu odbicia, dzieli kąt między linią padania i linią odbicia na dwie równe części. Linia odbicia, na końcu której Witelo umieszcza oko, musi się przeciąć z prostopadłą padania. W istocie chodzi tutaj o przecięcie przedłużonej linii odbicia z prostopadłą padania. Twierdzenie to, które wynika z twierdzenia V,37 i V,48, jak podaje sam Witelo (tw. 9), jest poprawne wyłącznie jako konstrukcja geometryczna. Rozwinięciem i uzupełnieniem tego twierdzenia są dwa następne twierdzenia, które zawierają podstawowe informacje o wyznaczaniu miejsca, w którym powstaje obraz w zwierciadłach kulistych wypukłych. W twierdzeniu 10 Witelo omawia przypadek, gdy oko i punkt znajdują się na prostopadłej padania. W takiej sytuacji odbicie formy punktu do oka zachodzi tylko z tego punktu na zwierciadle, na który pada ta prostopadła, a obraz widoczny jest na powierzchni zwierciadła. Z twierdzenia 11 natomiast wynika, że w zwierciadle kulistym wypukłym obraz punktu – podobnie jak w zwierciadle płaskim – powstaje na przecięciu prostopadłej padania z przedłużeniem linii odbicia, a obraz przedmiotu znajduje się między obrazami jego punktów skrajnych. Następne trzy twierdzenia (12–14) mają charakter pomocniczy. Pokazują pewne zależności geometryczne, które zostaną wykorzystane w dalszych twierdzeniach i są związane z mechanizmem powstawania obrazu w oku oraz sposobami konstrukcji obrazów w zwierciadłach wypukłych. Dla pełnego zrozumienia zasad konstrukcji obrazu w zwierciadłach wypukłych ważne są twierdzenia 15 i 16. W pierwszym z nich Witelo dowodzi, że linie odbicia formy tego samego punktu, poprowadzone z różnych punktów zwierciadła kulistego wypukłego, są nierównoległe i nie przecinają się w środku tego samego oka. Oznacza to, że tworzą one wiązkę rozbieżną. I o ile ten wniosek jest prawdziwy, to jednak dalsza część dowodu, w którym autor twierdzi, że *oko nie może widzieć obrazu tej samej formy, odbitej od różnych punktów [powierzchni] tego samego zwierciadła kulistego wypukłego*, jest błędna, co wynika z rozważań przeprowadzonych w rozdziale I,3. Wywody Witelona pokazują jednak wyraźnie, jak autor *Perspektywy* i jemu współcześni rozumieli widzenie przedmiotów przy użyciu zwierciadeł płaskich i wypukłych. Podobnie błędne jest również następne twierdzenie 16 z powodu błędnego mechanizmu widzenia i nieznamośności anatomii oka. W koncepcji Witelona i kontekście wykładu księgi VI ważne miejsce zajmują twierdzenia 17–19, które są pomocne przy konstrukcji obrazów w zwierciadłach kulistych, i sformu-

łowane zostały zgodnie z mechanizmem powstawania obrazu w oku, przyjętym przez Witelona.

Począwszy od twierdzenia 20 przystępuje Witelo do przedstawiania konstrukcji obrazów w zwierciadłach kulistych wypukłych. W pierwszym z tych twierdzeń (tw. 20) opisuje sposób, w jaki można znaleźć punkt odbicia promienia świetlnego, kiedy punkt materialny i środek oka są równo odległe do środka krzywizny zwierciadła. Witelo dowodzi, że również możliwe jest znalezienie punktu odbicia promienia świetlnego, gdy środek oka i punkt materialny znajdują się w różnych odległościach od środka krzywizny zwierciadła (tw. 21). Autor nie opisuje jednak samej metody, którą omówi w twierdzeniu 22, gdzie również dowodzi, że punkt odbicia możemy znaleźć tylko wtedy, gdy spełniony zostanie warunek, o którym mowa jest w twierdzeniu 21. Okazuje się, że punkt odbicia można znaleźć, gdy kąt między linią, poprowadzoną ze środka krzywizny zwierciadła do punktu odbicia, i promieniem padającym jest większy od kąta prostego. Witelo bardzo dokładnie rozpatruje zagadnienie znalezienia punktu odbicia formy wpadającej do oka. Postępuje tak dlatego, że w punkcie przecięcia przedłużenia linii odbicia (przechodzącej przez środek oka i punkt odbicia) z prostopadłą padania znajduje się miejsce obrazu punktu, którego forma wpada do oka. Następnie (tw. 23) określa miejsce obrazu, jeżeli formy dwóch punktów odbijają się do oka i układają się podobnie względem oka. Pokazuje więc, że obraz punktu bliżej położonego środka krzywizny zwierciadła będzie bardziej oddalony od środka krzywizny zwierciadła, a punktu bardziej oddalonego będzie bliżej środka krzywizny. Brak referencji Risnera przy tym twierdzeniu wskazywałby, że Witelo osobiście opracował przedstawiony w tym twierdzeniu przypadek, który został opisany w sposób poprawny, chociaż błędny jest mechanizm powstawania obrazu, przyjęty przez Witelona, jak to jest w całym dziele.

Począwszy do twierdzenia 24 przystępuje Witelo do wyznaczenia miejsca, w którym powstaje obraz punktu, a następnie przedmiotu. Najpierw rozpatruje sytuację, kiedy miejsce obrazu punktu znajduje się wewnątrz kuli zwierciadła, na jej powierzchni i na zewnątrz, zakładając, że oko jest umieszczone na głównej osi optycznej zwierciadła (Witelo nazywa oś optyczną średnicą widzenia), która jest osią symetrii. Punkt zaś, którego obrazu szukamy, znajduje się w różnych położeniach względem oka. Z tego powodu analizuje przede wszystkim promienie pozaosiowe, w przypadku których położenie obrazu zależy od tego, jaka część wiązki odbitej trafia do oka. Ponieważ, jak wiadomo (tw. 11), obraz punktu leży na przecięciu przedłużenia promienia odbitego z prostopadłą padania, to w rezultacie całe zagadnienie sprowadza się do określenia miejsca, gdzie jest położony punkt przecięcia przedłużenia linii odbicia z prostopadłą

padania. Aby znaleźć poszukiwany punkt, autor dzieli powierzchnię zwierciadła kulistego wypukłego na dwie części. Jako linię wyznaczającą ten podział przyjmuje linię poprowadzoną od oka do powierzchni zwierciadła, która po przedłużeniu wewnątrz kuli zwierciadła ma długość równą promieniowi kuli (Witelo promień nazywa półśrednicą). Ponieważ oko znajduje się na osi symetrii zwierciadła, ta linia jest tworzącą stożka, którego wierzchołek znajduje się w środku oka. Stożek ten jest zawarty wewnątrz stożka wyznaczającego widoczną dla oka część zwierciadła. Układ ten ma więc symetrię osiową i otrzymany wynik jest taki sam dla wszystkich punktów jednakowo odległych od osi symetrii (tzn. średnicy widzenia). Po przeprowadzeniu tego podziału Witelo rozpatruje trzy przypadki:

1. linia odbicia pokrywa się z tworzącą otrzymanego stożka: w takim przypadku, jak wyjaśnia autor, obraz punktu będzie wewnątrz powierzchni kuli zwierciadła (tw. 25);
2. linia odbicia leży wewnątrz otrzymanego stożka, tzn. znajduje się między osią symetrii zwierciadła i tworzącą: obraz znajduje się wówczas zawsze wewnątrz powierzchni kuli zwierciadła (tw. 25);
3. linia odbicia leży pomiędzy tworzącą otrzymanego stożka i tworzącą stożka wyznaczającego widzianą przez oko powierzchnię: wtedy, w zależności od położenia punktu, obraz będzie się znajdował wewnątrz powierzchni, na powierzchni lub na zewnątrz zwierciadła kulistego wypukłego (tw. 26 i 27).

Jest rzeczą zrozumiałą, że po przedstawieniu sposobów, za pomocą których można znaleźć miejsce, gdzie powstaje obraz, Witelo przystępuje do wyznaczenia obszaru, w którym obraz może powstać. Autor *Perspektywy* mówi o miejscu obrazu i granicach obrazu (tw. 28). Przy określaniu granicy posługuje się pojęciem *średnicy*, którą jest linia prosta przechodząca przez środek zwierciadła i poprowadzona poza zwierciadło, oraz pojęciem punktu przecięcia *średnicy* i linii prostej przecinającej powierzchnię zwierciadła i poprowadzonej w ten sposób, że część tej linii leżącej między powierzchnią zwierciadła i punktem przecięcia jest równa części *średnicy*, która znajduje się między punktem przecięcia i środkiem kuli zwierciadła. Tę poprowadzoną linię nazywa Witelo *linią odbicia*, która jest, rzecz jasna, hipotetyczną linią odbicia, i dowodzi, że na odcinku *średnicy* pomiędzy środkiem kuli zwierciadła i punktem przecięcia nie może powstać obraz żadnego punktu leżącego na tej *średnicy*, dla którego jest ona prostopadłą padania. Wynika więc, że ten punkt przecięcia jest granicą obrazów dla punktów leżących na tej *średnicy*. W tym punkcie, wykazuje Witelo, znajdują się jednak obrazy punktów leżących na linii równoległej do tej *średnicy*, padającej na zwierciadło w punkcie, w którym poprowadzona *linia odbicia* przecina powierzchnię

zwierciadła. Jeżeli jednak zostanie poprowadzona od środka zwierciadła dowolna *średnica*, inna niż średnica widzenia, i przetnie powierzchnię zwierciadła w części widzianej przez oko, to obrazy punktów leżących na tej średnicy są zawarte między granicą ich obrazów (por. tw. 28) a powierzchnią kuli (tw. 29). Ponieważ Witelo umieszcza oko na osi symetrii zwierciadła, dużo uwagi poświęca znalezieniu miejsca, gdzie może powstać obraz, gdy linia padania formy, która dochodzi po odbiciu od zwierciadła kulistego wypukłego do oka, tworzy duży kąt z prostopadłą padania (dzisiaj powiedzielibyśmy, że analizowane jest powstawanie obrazu przy użyciu promieni pozaosiowych). Z tego powodu wybiera dwie linie i poszukuje miejsca, gdzie może powstać obraz punktu przy użyciu różnych względem tych linii położeniach prostopadłej padania, którą nazywa się w tych twierdzeniach *średnicą*. Pierwszą z tych linii jest linia styczna do powierzchni zwierciadła, poprowadzona od środka oka (zgodnie z twierdzeniem 2 jest ona tworzącą stożka, wyznaczającego część zwierciadła widzianą przez oko). Drugą linią jest linia poprowadzona od środka oka, która przecina powierzchnię zwierciadła w dwóch punktach. Ta linia wewnątrz kuli zwierciadła ma długość równą promieniowi kuli, a Witelo nazywa ją *linią odbicia*. To określenie jest jednak bardzo niezręczne, ponieważ w rzeczywistości chodzi o hipotetyczną *linię odbicia*, a nie o tę linię, po której formy po odbiciu od powierzchni zwierciadła wpadają do oka. Ta hipotetyczna *linia odbicia* ze względu na symetrię osiową jest również tworzącą pewnego stożka. W twierdzeniach poświęconych temu zagadnieniu Witelo dowodzi kolejno takich przypadków, gdy prostopadła padania przecina zwierciadło w punkcie końcowym przedłużenia tej hipotetycznej *linii odbicia* (tw. 30); gdy prostopadła padania przecina zwierciadło pomiędzy punktem styczności linii, poprowadzonej od środka oka do powierzchni zwierciadła i punktem, w którym przedłużenie hipotetycznej *linii odbicia* przecina niewidoczną dla oka część kuli zwierciadła (tw. 31); gdy prostopadła padania przecina zwierciadło pomiędzy punktem odległym o czwartą część koła wielkiego kuli zwierciadła od punktu styczności linii prostej, poprowadzonej od oka do powierzchni zwierciadła, a punktem, w którym przedłużenie hipotetycznej *linii odbicia* przecina niewidoczną dla oka powierzchnię zwierciadła (tw. 32); oraz gdy prostopadła padania przecina zwierciadło pomiędzy punktem wyznaczonym przez przedłużenie średnicy widzenia (prostopadłej odbicia) i punktem odległym o czwartą część koła wielkiego kuli zwierciadła od punktu styczności prostej, poprowadzonej od oka do powierzchni zwierciadła (tw. 33). Należy wyjaśnić, że rozważania przedstawione w twierdzeniach 30–33 dotyczą części powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, wyznaczonych przez wspomniane stożki, chociaż mowa jest o liniach, bowiem oko znajduje się na osi symetrii.

Następne dwa twierdzenia (34 i 35) poświęcone są widzeniu obrazów punktów i przedmiotów dwójgiem oczu. Wprawdzie treść tych twierdzeń jest prawdziwa, ale dowody zostały oparte na błędnym mechanizmie powstawania obrazów w oku. Podobnie jest z twierdzeniem 37, w którym Witelo dowodzi, że w przypadku zwierciadeł kulistych wypukłych odległość obrazu od powierzchni zwierciadła jest mniejsza niż odległość przedmiotu od powierzchni zwierciadła.

W twierdzeniach 38–41 autor *Perspektywy* omawia przypadki, kiedy widzimy na zwierciadłach obrazy powiększone. Poczynione obserwacje są prawdziwe, a dowody zostały przeprowadzone w sposób geometryczny, ale są oparte na mechanizmie powstawania obrazu w oku, który, jak wiemy, jest nieprawdziwy. Witelo omawia przypadek, gdy przedmiot znajduje się w takiej odległości od zwierciadła kulistego wypukłego, że nie możemy dostrzec jego prawdziwej wielkości, bo obraz ukazuje się nam równy wielkością widzianemu przedmiotowi bądź większy od niego, jak to jest w przypadku Słońca i Księżyca (tw. 38). Kiedy jednak spostrzegamy okiem wymiary danego przedmiotu, to wtedy jego obraz jest zawsze mniejszy niż oglądany przedmiot (tw. 39).

W następnym twierdzeniu (40) Witelo mówi o zależności zachodzącej pomiędzy wielkością obrazu danego przedmiotu i wielkością zwierciadła, a w twierdzeniu 41, wyjaśnia, jaki istnieje związek między wielkością obrazu i jego odległością od zwierciadła.

Po przedstawieniu w twierdzeniach 1–41 ogólnych własności zwierciadeł kulistych wypukłych i konstrukcji obrazu punktu Witelo przystępuje do omówienia właściwości samych obrazów, jakie powstają w wyniku odbicia, tzn. ich kształtu, położenia itd. Obrazy te zostały omówione na przykładzie obrazów linii prostej i łuku. W przedstawianiu procesu widzenia obrazów autor *Perspektywy* wielką uwagę przypisuje oku, co jest zrozumiałe, zważywszy, że całe dzieło ma za cel wyjaśnienie mechanizmu widzenia. Zanim jednak autor *Perspektywy* przeszedł do zasadniczego zagadnienia, w czterech twierdzeniach (42–45) przedstawił pewne założenia o charakterze ogólnym. Przypomniat więc treść twierdzenia V,55, w którym omówił zjawisko zmiany stron przedmiotu, które obserwujemy na zwierciadle, kiedy lewa strona przedmiotu na zwierciadle jawi się jako prawa i odwrotnie oraz podobne zjawisko, gdy wklęsłość i wypukłość przedmiotów w obrazach na zwierciadłach widzimy w postaci odwróconej.

Wykład poświęcony obrazom przedmiotów przeprowadza Witelo na przykładzie obrazów łuku (tw. 46–48, 58–60, 62) oraz linii prostej (tw. 49–57) z uwzględnieniem ich różnego położenia względem oka i zwierciadła oraz zniekształceń, które spowodowane są właśnie wzajemnym położeniem przedmiotu, oka i zwierciadła. Dla przykładu, w twierdzeniu

62 dowodzi, że obraz linii zakrzywionej, wklęsłej względem zwierciadła kulistego wypukłego, można czasami zobaczyć jako linię prostą. Dla nas szczególnie interesująca jest ta część rozważań Witelona, w której rozpatruje przypadki, gdy do oka dochodzą promienie pozaosiowe. Wtedy bowiem miejsce, w którym powstaje obraz punktu, jest zależne od kąta, jaki tworzy prostopadła do powierzchni zwierciadła z osią, na której leży dany punkt. Z tego właśnie powodu, gdy do oka trafiają promienie pozaosiowe, zniekształcenia obrazów mogą być bardzo duże. Określenie jednak miejsca obrazu w przypadku promieni pozaosiowych często jest bardzo trudne, ponieważ umiejscowienie takiego obrazu zależy od tego, jaka część odbitej wiązki trafia do oka. Natomiast na wielkość tej wiązki mają wpływ odległości przedmiotu i oka od zwierciadła, a także ich wzajemne usytuowanie. Z twierdzeń 46–60 wynika, że Witelo dobrze rozumiał znaczenie wzajemnego położenia oka i przedmiotu. Wspomniane twierdzenia są jednak tylko częściowo prawdziwe.

Księgę zamykają twierdzenia 63–65, które mają charakter dodatkowych nowych informacji uzupełniających, i przedstawiają pewne rzadkie przypadki. Dla przykładu, w twierdzeniu 63 mówi autor o zwierciadle, którego powierzchnia składa się z powierzchni kul i tworzy w ten sposób powierzchnię nieregularną, której części są fragmentami kul. W twierdzeniu następnym (64) omawia taką sytuację, gdy forma odbija się kolejno od dowolnej liczby zwierciadeł kulistych wypukłych, a w ostatnim twierdzeniu (65) zastanawia się, jaki układ zwierciadeł kulistych wypukłych pozwoli na skupienie wiązki odbitej na przedmiocie w taki sposób, aby mogła ona wywołać ogień.

4.3. Przegląd treści księgi VII

Księga VII *Perspektywy*, poświęcona postrzeganiu przy użyciu zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych, składa się ze wstępu, siedmiu definicji i sześćdziesięciu twierdzeń. We wstępie Witelo wyjaśnia, dlaczego teraz będzie mówił o właściwościach zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych. Okazuje się bowiem, że zjawiska na tych zwierciadłach są w dużej mierze podobne do tamtych, omówionych wcześniej na zwierciadłach płaskich i kulistych wypukłych. Dzieje się tak dlatego, dowodzi Witelo, ponieważ cylinder i stożek powstają w wyniku obrotu płaszczyzn prostokąta i trójkąta, a ponieważ *podobna jest zawsze natura linii prostych i ruchu, zwierciadła cylindryczne i stożkowe mają układ wtórny względem zwierciadeł płaskich oraz kulistych wypukłych*, konkluduje we wstępie.

W definicjach znajdujemy pojęcia dotąd niezdefiniowane, które są jednak konieczne dla zrozumienia wykładu teorii zwierciadeł wypukłych

cylindrycznych i stożkowych. Na uwagę zasługuje układ treści książki. Można by się spodziewać, że autor najpierw przedstawi zjawiska wspólne dla zwierciadeł cylindrycznych i stożkowych, a następnie omówi zjawiska charakterystyczne dla każdego typu zwierciadeł. Tymczasem spotykamy taki układ, że najpierw zostały omówione zjawiska wspólne dla obu typów zwierciadeł, po czym każde zjawisko zostało opracowane paralelnie dla obydwu typów zwierciadeł. Taki układ materiału w tej księdze, chociaż może sprawiać wrażenie pewnego chaosu, to jednak ułatwia czytelnikowi poznanie różnic zachodzących między postrzeganiem przy użyciu zwierciadeł wypukłych cylindrycznych bądź stożkowych oraz dostrzec cechy wspólne dla tych zwierciadeł. Takie uporządkowanie i przedstawienie materiału odpowiadało zapewne tamtej epoce, skoro F. Risner chwali Witelona za układ książki, uważając go za najbardziej naturalny⁵¹.

Wspomniana część ogólna, wprowadzająca, obejmuje sześć twierdzeń (tw. 1–6). W dwóch pierwszych twierdzeniach Witelo wyjaśnia, jaka część zwierciadła jest widziana przez oko, oraz jakie warunki muszą być spełnione, aby ta część zwierciadła była widoczna okiem. Okazuje się, że chodzi tutaj o tę część zwierciadła, która jest ograniczona dwoma płaszczyznami stycznymi do powierzchni zwierciadła i przechodzącymi przez środek oka. Warunki widzenia zostały natomiast omówione w twierdzeniach 3–6.

Zagadnienie, które wysuwa się w księdze VII na plan pierwszy, dotyczy położenia płaszczyzny odbicia względem powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego oraz cięcia powierzchni tych zwierciadeł płaszczyzną odbicia (tw. 7–20). Mimo że te rozważania mają charakter geometryczny, to ich rola w teorii zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych jest ważna, a nieustanne przypomnianie przez autora, że chodzi o płaszczyznę odbicia, a nie o żadną inną płaszczyznę, ma swój głęboki sens, ponieważ to właśnie na płaszczyźnie odbicia muszą się znajdować: punkt materialny, którego forma pada na zwierciadło; punkt odbicia; środek oka; prostopadła do powierzchni zwierciadła, poprowadzona w punkcie odbicia; oraz linia padania i linia odbicia. Z tego powodu od położenia płaszczyzny odbicia względem powierzchni zwierciadła będzie zależał charakter odbicia. Od położenia płaszczyzny odbicia będzie bowiem zależało, czy odbicie będzie zachodziło w taki sposób jak od zwierciadła płaskiego, czy jak od zwierciadła kulistego wypukłego, czy też będzie miało charakter pośredni.

⁵¹ Wstęp F. Risnera do wydania *Perspektywy* z roku 1572, przekł. W. Wróblewski (por. Wit. Persp. PP, s. 92n.).

Swoje rozważania zaczyna Witelo od omówienia charakteru płaszczyzn odbicia, przecinających zwierciadło. Autor pokazuje, że w przypadku przecięcia zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego wzdłuż osi otrzymane przecięcie płaszczyzny odbicia z powierzchnią zwierciadła będzie tworzącą cylindra bądź stożka (tw. 7). Następnie rozpatruje przypadek, gdy płaszczyzna odbicia jest równoległa do podstaw zwierciadła cylindrycznego wypukłego (tw. 9), oraz przypadek przecięcia powierzchni zwierciadła wypukłego stożkowego z płaszczyzną odbicia, gdy jest ona równoległa do podstawy (tw. 12 i 13). Omawia również przecięcie powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego płaszczyzną odbicia ukośnie do osi. W wyniku tego przecięcia otrzymujemy elipsę, a to przecięcie Witelo nazywa ostrokątnym (tw. 10).

W następnych twierdzeniach autor *Perspektywy* zajmuje się szukaniem odpowiedzi na pytanie, ile płaszczyzn odbicia, przecinających powierzchnię zwierciadła wypukłego cylindrycznego albo stożkowego, przechodzi przez środek oka, znajdującego się w danym punkcie. Okazuje się, że w przypadku zwierciadeł wypukłych cylindrycznych oko znajduje się tylko na jednej płaszczyźnie (tw. 16 i 17), jeżeli przecięcie zachodzi wzdłuż tworzącej lub jest równoległe do podstawy, natomiast gdy przecięcie jest ostrokątne, to wówczas przez środek oka może przejść dowolna liczba płaszczyzn odbicia. W przypadku zaś zwierciadeł stożkowych, gdy płaszczyzna odbicia przechodzi przez oś, a oko znajduje się na osi stożka, to przez środek oka może przejść nieskończona liczba płaszczyzn odbicia, jednak, podkreśla Witelo, gdy oko jest umieszczone w takiej pozycji, że widzi mniej niż połowę poboczniczy stożka, to wtedy tylko jedna płaszczyzna odbicia przejdzie przez środek oka (tw. 14). Następnie Witelo przedstawia sytuację, gdy przecięcie powierzchni omawianych zwierciadeł płaszczyzną odbicia zachodzi wzdłuż tworzącej (tw. 19) bądź rezultatem tego przecięcia jest okrąg koła (tw. 20).

Po omówieniu figur geometrycznych, jakie otrzymujemy w wyniku przecięcia płaszczyzny odbicia z interesującymi nas zwierciadłami, Witelo w twierdzeniu 22 wyjaśnia, że niezależnie od tego, jakie jest przecięcie płaszczyzny odbicia z powierzchnią zwierciadła, odbicie formy punktu do oka zachodzi zawsze od jednego punktu leżącego na tym przecięciu. Zarówno to twierdzenie, jak i twierdzenia 23 i 24 kończą pierwszą część księgi VII i stanowią przejście do dalszych rozważań, w których będzie mowa o odbiciu formy punktu do oka. Wcześniej jednak w twierdzeniu 24 Witelo określi elementy, które są istotne dla zrozumienia procesu odbicia formy oraz ich położenia. Informuje nas, że na każdej płaszczyźnie odbicia muszą się znaleźć: środek oka, punkt widziany, punkt

odbicia i punkt osi, w który pada prostopadła, poprowadzona od punktu odbicia do powierzchni zwierciadła.

Twierdzenia, poświęcone odbiciu formy punktu do oka od powierzchni zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych, można podzielić na dwie grupy; w jednej zostało omówione odbicie od zwierciadeł wypukłych cylindrycznych (tw. 25–29), w drugiej od zwierciadeł stożkowych (tw. 31–40), przy czym na zakończenie każdej grupy twierdzeń mowa jest o odbiciu formy linii prostej (tw. 30 i 41). W poszczególnych twierdzeniach Witelo przedstawia różne sytuacje, w jakich następuje przecięcie powierzchni odbicia ze zwierciadłem, oraz skąd zachodzi odbicie formy punktu do oka.

Dopełnieniem dotychczasowych rozważań księgi VII jest niewątpliwie kwestia wyznaczenia miejsca, w którym powstaje obraz punktu. W tych wywodach Witelo odwołuje się do rozważań w księdze V, gdyż, jak wspomniał we wstępie, pewne zjawiska zachodzące na zwierciadłach płaskich i kulistych powtarzają się również na zwierciadłach cylindrycznych i stożkowych. I tak w twierdzeniu 42 dowodzi, że miejsce, w którym powstaje obraz na zwierciadłach cylindrycznych i stożkowych, i jego odległość od oczu, są takie samo jak w zwierciadłach płaskich, jeżeli przecięciem powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego i płaszczyzny odbicia jest tworząca, natomiast w następnym twierdzeniu (43) znajdujemy wyjaśnienie, że w przypadku, gdy przecięciem powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego z płaszczyzną odbicia będzie okrąg, to miejsca, w którym powstają obrazy i punkty odbicia, będą takie same jak w zwierciadłach kulistych wypukłych. Kiedy natomiast przecięciem powierzchni zwierciadła płaszczyzną odbicia jest przecięcie ostrokątne, obraz punktu może powstać na zewnątrz zwierciadła, na jego powierzchni, lub wewnątrz zwierciadła, w zależności od tego, gdzie jest usytuowany punkt i oko względem zwierciadła.

W układzie materiału, obejmującego księgę VII *Perspektywy*, możemy dostrzec starannie przemyślaną kompozycję, która sprawia, że wykład poprowadzony przez Witelona ma zrozumiałą i uzasadnioną konstrukcję. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że po omówieniu płaszczyzn odbicia oraz miejsca obrazu przechodzi Witelo do przedstawienia obrazu linii prostej i jego zniekształceń przy różnych położeniach linii względem powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego (tw. 50–58). Wywody swoje rozpoczyna od omówienia obrazu linii prostej w zwierciadłach wypukłych cylindrycznych (tw. 50–54), uwzględniając trzy położenia linii prostej względem zwierciadła cylindrycznego wypukłego. Opis rozpoczyna od przyjęcia takiego położenia, w którym linia prosta jest równoległa do osi zwierciadła, zaś środek oka może się znajdować na płaszczyźnie wyznaczonej przez linię prostą i oś (tw. 50)

bądź poza tą płaszczyzną (tw. 51): w pierwszym przypadku obraz jest pomniejszony i zniekształcony, gdyż linię prostą zobaczymy w postaci łuku, w drugim natomiast przypadku linia prosta jest równoległa do podstawy zwierciadła wypukłego cylindrycznego (tzn. leży na płaszczyźnie prostopadłej do osi), a jej przecięcie z powierzchnią zwierciadła daje okrąg. Witelo rozpatruje tu dwa przypadki: w pierwszym z nich płaszczyzna, na której leży linia prosta, przecina prostopadle płaszczyznę, wyznaczoną przez oś zwierciadła i środek oka, tworząc okrąg: tutaj można wymienić dwie sytuacje:

- płaszczyzna, na której leży linia prosta, przecina prostopadle płaszczyznę, wyznaczoną przez oś zwierciadła i środek oka, który znajduje się na linii przecięcia tych dwóch płaszczyzn, a odbicie formy linii prostej będzie zachodziło od okręgu; obraz takiej linii będzie zniekształcony, bo linię prostą zobaczymy jako zakrzywioną;
- środek oka nie znajduje się na płaszczyźnie, na której leży linia prosta, ale jest w jednakowej odległości od końców linii, co sprawia, że obraz linii prostej zobaczymy zniekształcony jako linię silnie zakrzywioną.

W końcu Witelo rozpatruje przypadek, gdy położenie linii prostej względem zwierciadła wypukłego cylindrycznego jest usytuowane pomiędzy obydwoma omówionymi powyżej położeniami, co oznacza, że linia leży na płaszczyźnie przecinającej ukośnie oś zwierciadła. Przy takim położeniu linii prostej również jej obraz zobaczymy jako linię zakrzywioną, a wielkość tego zakrzywienia będzie zależała od kąta, jaki tworzy płaszczyzna, na której znajduje się linia, z osią zwierciadła (tw. 54).

Zniekształcenia obrazu linii prostej w zwierciadłach wypukłych stożkowych zostały omówione w twierdzeniach 55–57, w których autor dowodzi, że obraz linii prostej, gdy nie jest ona równoległa do tworzącej, zobaczymy jako linię zakrzywioną. Dokładnie zajmuje się przypadkiem szczególnym, gdy forma linii prostej pada na wierzchołek zwierciadła wypukłego stożkowego i odbija się od tworzącej, a środek oka znajduje się między powierzchnią zwierciadła i linią (tw. 55). Obraz tej linii zobaczymy jako linię zakrzywioną, zwróconą swoją wypukłością w stronę oka, konkluduje Witelo.

Wykład problematyki księgi VII kończy się w zasadzie na twierdzeniu 57. Pozostałe trzy twierdzenia (58–60) tylko w ograniczonym zakresie kontynuują wcześniej podjętą problematykę, chociaż do niej nawiązują przez to, że związane są z zagadnieniem postrzegania przedmiotów przy użyciu zwierciadeł wypukłych cylindrycznych bądź stożkowych. Dowiadujemy się więc, że obraz formy każdego przedmiotu postrzegany przy użyciu zwierciadła wypukłego stożkowego jest podobny swym

kształtem do stożka zwierciadła. W dowodzie Witelo odwołuje się do twierdzenia VI,40. Podobnie treść twierdzenia 59 przynosi bardziej praktyczne uwagi niż teoretyczne wywody. Witelo wyjaśnia w nim, że wielkość obrazu przedmiotu zależy od wielkości zwierciadła oraz od odległości przedmiotu od zwierciadła, zaś ostatnie twierdzenie omawia spostrzeżenie, które może mieć praktyczne znaczenie, gdyż autor dowodzi, że przy użyciu zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego można zobaczyć obraz przedmiotu, którego nie widzimy bezpośrednio, ponieważ między okiem i przedmiotem znajduje się jakaś przeszkoda.

5. STOSUNEK WITELONA DO DZIEŁA ALHAZENA *DE ASPECTIBUS*

Wydany przez F. Risnera wspomniany *Opticae thesaurus*, w którym poza *Perspektywą* Witelona znalazło się również inne dzieło o tej samej tematyce, napisane jednak znacznie wcześniej przez arabskiego uczonego Alhazena i zgodnie z chronologią powstania umieszczone przed traktatem Witelona, sprawiło, że zaczęto *Perspektywę* pojmować jako plagiat dzieła Alhazena⁵², do czego niewątpliwie przyczynił się fakt, że F. Risner umieścił przy poszczególnych twierdzeniach *Perspektywy* referencje do odpowiednich twierdzeń w *De aspectibus* i *vice versa*, zapewne bez jakichkolwiek złych intencji, a jedynie zamierzając zapewne pomóc swoim czytelnikom w studiowaniu obydwu optycznych traktatów⁵³. Zważywszy, że dzieło Alhazena powstało przed opracowaniem Witelona, a pewne partie tekstu u Witelona zostały niemal dosłownie przepisane z traktatu Alhazena, każdy korzystający z wydania F. Risnera mógł odnieść wrażenie, że Witelo przepisał traktat arabskiego uczonego, zmieniając jedynie porządek i kolejność twierdzeń. Jednak nawet bardzo pobieżna lektura obydwu traktatów musi prowadzić do zupełnie odmiennych wniosków. Sam wydawca F. Risner nie miał bowiem żadnych wątpliwości w sprawie oryginalności dzieła Witelona, gdyż w przeciwnym wypadku nie wyrażałby się z takim entuzjazmem o *Perspektywie* w swoim wstępie do tego traktatu⁵⁴. Wydaje się, że krytyczne i niechętne opinie pod adresem Witelona i jego dzieła brały się stąd, że krytycy nie zadali sobie trudu starannego przestudiowania obydwu traktatów. Czytelnikowi

⁵² Zagadnienie to zostało omówione w Wit. Persp. PP, rozdz. 4: Zarys problematyki witełońskiej w literaturze naukowej, s. 25 – 47.

⁵³ Por. *Wstęp* F. Risnera do wydania *Perspektywy* Witelona w: Wit. Persp. PP, s. 91 – 93; W. Wróblewski, A. Bielski, op. cit., s. 315 – 333.

⁵⁴ F. Risner w przedmowie do swego wydania *Perspektywy* pisze: „Jeśli przyjąć za twórcę i autora nauki tego, kto umiejętności nadał formę i ducha, najśluszej należałoby uznać Witelona za autora nauki o optyce” (podkr. nasze). (Wit. Persp. PP, s. 93).

Perspektywy Witelona i kompendium F. Risnera należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że również Alhazen korzystał w szerokim zakresie z różnych swoich poprzedników i tylko w ograniczonym stopniu jego optyczny traktat jest dziełem oryginalnym. I podobnie rzecz się przedstawia z traktatem Witelona.⁵⁵

To prawda, że Witelo korzystał z *De aspectibus* i przepisał z niego pewne partie tekstu, ale przeważnie nie poprzestał na tym i rozwinął dowody, przedstawiając je w postaci matematycznej, czego nie ma w traktacie Alhazena. Głównie jednak należy zwrócić uwagę na dyspozycje obydwu traktatów. O układzie materiału *Perspektywy* w części obejmującej odbicie od zwierciadeł wspominaliśmy już we wprowadzeniu. Tutaj trzeba dodać, że Alhazen zagadnienie odbicia światła omawia w księdze IV *De aspectibus*, księgę V poświęcił obrazom, a księgę VI złudzeniom, jakich doznaje oko w widzeniu przedmiotów w świetle odbitym. Te trzy księgi w wydaniu F. Risnera zajmują 108 stron (s. 102–210), a wykład Witelona, przedstawiony w księgach V–IX, jest dwukrotnie dłuższy i zajmuje 214 stron, (189–403). Byłoby zatem rzeczą niezmiernie pożyteczną sprawdzić, jak przedstawia się relacja Alhazen–Witelo w poszczególnych księgach przez nas opracowanych.

Na 65 twierdzeń księgi V F. Risner przy czterech twierdzeniach (1, 10, 12, 20) *Perspektywy* podaje referencje do trzech autorów: *Katoptryki* Euklidesa i Ptolemeusza oraz *De Aspectibus* Alhazena, przy trzech twierdzeniach (5, 47, 61) do tych samych dzieł Euklidesa i Ptolemeusza, przy dziesięciu twierdzeniach (11, 13–17, 21, 36, 49, 51) do dwóch autorów, Euklidesa i Alhazena, a w jednym przypadku do Ptolemeusza oraz Alhazena (tw. 2). W sześciu twierdzeniach (33, 43, 53–55, 60) Risner odsyła do Euklidesa, w siedmiu do Ptolemeusza (18, 56–59, 63, 64), przy dwudziestu jeden twierdzeniach (3, 4, 6, 7, 9, 10, 22–25, 27, 29–33, 35, 37, 38, 45, 46, 51) znajdujemy referencje do traktatu Alhazena. Trzeba jednak bardzo mocno podkreślić, że aż w czternastu twierdzeniach (8, 19, 26, 28, 34, 39–42, 44, 48, 50, 62, 65) nie dodaje F. Risner żadnych odniesień, co wskazywałoby, że on sam nie znalazł miejsc paralelnych dla tych twierdzeń w dziele Alhazena ani w traktatach innych wcześniejszych autorów, piszących na tematy optyczne. Można zatem przypuszczać, a nie ma powodu nie wierzyć F. Risnerowi, który był wybitnym

⁵⁵ Źródła, z których czerpał Alhazen wiadomości przy opracowaniu swojej *Optyki*, oraz wykaz rozpraw starożytnych autorów, z których korzystał, znajdziemy w: *The Optics of Ibn Al-Haytham. Book I – III. On Direct Vision*. Translated with Introduction and Commentary by A. I. Sabra. II Introduction, Commentary, Glossaries, Concordance, Indices, London 1989. D. Lindberg berg we wstępie (s. XIV) przygotowanego przez siebie reprintu wydania dzieł Witelona i Alhazena w opracowaniu F. Risnera, op. cit., (por. s. 3 Wstępu).

uczonym i znawcą matematyki i optyki, że te twierdzenia zostały całkowicie samodzielnie zaplanowane i opracowane przez naszego uczonego Witelona.

Podobne proporcje znajdujemy także w księdze VI, w której na 65 twierdzeń przy jednym twierdzeniu (11) znajdujemy referencje do dwóch autorów: *Katoptryki* Euklidesa oraz *De aspectibus* Alhazena, przy jednym do Euklidesa i Ptolemeusza (15), przy siedmiu twierdzeniach (37, 40, 42–44, 61, 64) Risner odsyła czytelnika do Euklidesa i aż przy czterdziestu trzech twierdzeniach do Alhazena (2, 3, 5, 6, 8–10, 12–14, 16, 17, 20–22, 24–26, 28–35, 38, 39, 45–58, 62). Jedna piąta twierdzeń (1, 4, 7, 18, 19, 23, 27, 36, 41, 59, 60, 63, 65), tj. 13 twierdzeń księgi VI nie ma żadnych referencji, co oznaczałoby, że F. Risner nie znalazł żadnych źródeł u innych autorów, które mogłyby inspirować Witelona do opracowania wymienionych twierdzeń. Te same proporcje spotykamy także w księdze VII, gdzie na 60 twierdzeń jedna piąta (6, 8, 11, 13–15, 23, 46, 54, 60) nie ma referencji, zaś przy pozostałych pięćdziesięciu F. Risner odsyła do dzieła Alhazena.

II. KSIĘGA V PERSPEKTYWY

1. PRZEKŁAD NA JĘZYK POLSKI

KSIĘGA PIĄTA OPTYKI WITELONA, SYNA TURYNÓW I POLAKÓW

Wydaje się, że po przedstawieniu w dostatecznym stopniu okoliczności niezbędnych dla widzenia prostego bezpośredniego, oraz tego, co dotyczy złudzeń w tego rodzaju widzeniu, pozostaje nam teraz zbadać ten sposób widzenia, jaki zachodzi w wyniku odbicia [form] od przedmiotów wypolerowanych, które nazywamy zwierciadłami, zajmując się dokładniej każdym rodzajem odbicia¹ od dowolnych zwierciadeł. Najpierw zatem, w tej piątej księdze naszego naukowego dzieła, wyłożymy pewne zasady, które uważamy za wspólne dla wszystkich zwierciadeł, a następnie dodamy do tego zjawiska, jakie zachodzą w oku przy [widzeniu] przedmiotów tylko w przypadku zwierciadeł płaskich, których kształt jest prostszy od kształtów wszystkich pozostałych zwierciadeł, dlatego że zjawiska na zwierciadłach płaskich są takie same jak na niektórych innych zwierciadłach, co wynika z następnych ksiąg, w których zajmujemy się zjawiskami właściwymi dla pozostałych zwierciadeł.

Jednakże, jak powiedzieliśmy na początku tego dzieła², pod słowem *zwierciadło* rozumiemy nie tylko przedmioty wykonane i wypolerowane przez rzemieślników, ale również przedmioty naturalne, od powierzchni których zachodzi odbicie takie samo, jakie od powierzchni sztucznie wypolerowanych. Nie sądzimy, aby odbicie zachodziło wyłącznie do oczu istot obecnych, ale zachodzi ono także wtedy, gdy oczu nie ma i odbicie do oczu dokonuje się, jeżeli znajdują się one w miejscach, dokąd mogą dotrzeć odbite formy. A to w sposób oczywisty wynika z faktu, że odbicie od dowolnego zwierciadła nie zachodzi do każdego miejsca, w którym jest oko.

Istnieje jednak pewna właściwość odbioru³ w oku form odbitych, przede wszystkim w tych rodzajach odbicia, które powodują, że zachodzi w oku jakieś złudzenie, chociaż, jak to powiedzieliśmy na początku tego dzieła³, ta sama forma dochodzi do zmysłu wzroku jak również rozcho-

dzi się w stronę przeciwną⁴, ponieważ jedna i ta sama forma jednej rzeczy zawsze rozprzestrzenia się przez ośrodek. Z tego powodu ta sama forma odbija się od powierzchni zwierciadeł, a także dochodzi do oczu w widzeniu prostym bezpośrednim. Nie można jednak w odbiciu zachodzącym od powierzchni dowolnych zwierciadeł poznać prawdy o formie, jak poznaje się ją w widzeniu prostym bezpośrednim, skoro w odbiciach zachodzących od zwierciadeł pojawia się najczęściej przed oczyma forma rzeczy jakby była ona umieszczona naprzeciw oczu, chociaż, zgodnie z prawdą, nie znajduje się naprzeciw oczu. Podobnie światło i barwa oglądanego przedmiotu zawsze mieszają się z barwą zwierciadła, od którego zachodzi odbicie, co oko w odbiciach postrzega jako mieszaninę, a nie prawdziwą barwę bądź prawdziwe światło widzianej rzeczy. Również każde odbicie, jak to wyjaśnimy dokładniej poniżej, osłabia światło i barwy⁵. Z tego powodu w każdym odbiciu prawda o świetle i barwie jest ukryta przed okiem bardziej niż w widzeniu prostym bezpośrednim.

Takie są natomiast [definicje i założenia], jakie przyjmujemy dla tego sposobu widzenia, który zachodzi przez odbicie od dowolnych zwierciadeł, a zwłaszcza od zwierciadeł płaskich.

DEFINICJE

1. Gładkość ciał oznacza ciągłość części powierzchni wygładzonego ciała bez zmysłowo dostrzegalnych pór i przerw.

2. Zwierciadłem nazywamy każde ciało gładkie z natury bądź wygładzone przez rzemieślnika.

3. Linia padania¹ nazywamy tę linię, po której forma rzeczy pada na powierzchnię zwierciadła.

4. Linia odbicia¹ nazywamy tę linię, po której forma odrzucona (dlatego że nie może przejść przez zwierciadło z powodu jego gęstości) odbija się do oka.

5. Punktem padania nazywamy ten punkt, w którym linia padania pada na powierzchnię zwierciadła; i tym samym punktem jest punkt odbicia, ponieważ odbicie form do oka zachodzi zawsze z punktu padania.

6. Prostopadłą do powierzchni zwierciadła, od której [to powierzchni] dokonuje się odbicie, nazywamy linię prostą poprowadzoną z punktu padania prostopadle do powierzchni tego zwierciadła, od którego zachodzi odbicie, jeśli ta powierzchnia jest płaska. Jeżeli bowiem jest ona wypukła bądź wklęsła, wtedy prostopadłą do powierzchni nazywamy tę linię, która jest prostopadłą do płaszczyzny², stycznej do tej powierzchni wypukłej bądź wklęsłej w punkcie padania.

7. Płaszczyzną³ odbicia nazywamy płaszczyznę, na której leżą linie padania i odbicia oraz prostopadłą, poprowadzoną z punktu styczności do

samej płaszczyzny zwierciadła bądź do samej płaszczyzny stycznej [do powierzchni zwierciadła].

8. Prostopadłą padania nazywamy linię prostą, poprowadzoną prostopadle do płaszczyzny zwierciadła bądź do linii prostej, stycznej do wspólnego przecięcia płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła wypukłego albo wklęsłego, poprowadzoną z punktu, od którego zaczyna się padanie (np. od środka oka⁴ albo od innego dowolnego punktu, którego forma odbija się od zwierciadła do oka).

9. Prostopadłą odbicia nazywamy linię prostą, poprowadzoną prostopadle do tej samej powierzchni albo linii od punktu, w którym kończy się linia odbicia (np. od środka oka albo od innego punktu, w którym kończy się odbicie).

10. Powierzchnią padania nazywamy powierzchnię ograniczoną linią rzeczy widzianej i prostopadłymi padania [poprowadzonymi] przez końce tej linii.

11. Kątem padania⁵ nazywamy kąt, który na płaszczyźnie odbicia tworzy linia padania i linia, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni tego zwierciadła bądź płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie odbicia.

12. Kątem odbicia⁵ nazywamy kąt, który na płaszczyźnie odbicia tworzy linia odbicia i wspomniane wspólne przecięcie.

13. Obrazem nazywamy formę postrzeganą na zwierciadle⁶.

14. Miejscem obrazu nazywamy miejsce widzenia tej formy, tzn. miejsce, w którym widzi się formę.

POSTULATY

Zakładamy, że:

1. niekiedy są widoczne punkty skrajne przedmiotu oddalonego i zbliżonego do zwierciadła;

2. jednoznacznie położenie punktu rzeczy widzianej względem powierzchni dowolnego zwierciadła, od którego odbija się jego forma, można określić tylko wzdłuż prostopadłej jego padania.

TWIERDZENIA

1. Od dowolnego punktu powierzchni przedmiotów dokładnie wypolerowanych, niezależnie od ich kształtu, zachodzi odbicie po liniach prostych światła, barwy i formy przedmiotów leżących naprzeciw (Euc. Catopt. 2; Ptol. Catopt. I,1 i 3; Alh. IV,2).

Ponieważ, jak wynika z twierdzenia II,1 tego dzieła, forma światła zawsze się rozchodzi po linii prostej od świecącego ciała do każdego przedmiotu, znajdującego się naprzeciw niego, to podobnie [rozchodzi się] i zabarwiona forma wzbudzona światłem. Gdy te [formy] padają na jakieś ciało starannie wypolerowane, zawsze od niego zachodzi odbicie światła, barwy i form, ponieważ przez takie ciało nie przechodzi światło ani barwa z powodu gęstości takiego ciała i braku przezroczystości, gdy są to powierzchnie, na których nie ma chropowatości. Z tego powodu, gdy umieścimy zwierciadło naprzeciw silnego światła padającego ukośnie, staje się oczywiste, że na sąsiedniej ścianie [ukazuje się] odbicie światła i formy. Jeśli barwa będzie połączona ze światłem, zobaczymy światło odbite padające na ścianę wraz z barwą, zaś po przesunięciu zwierciadła odbity promień przesunie się, zmieniając miejsce, a po usunięciu zwierciadła odbite światło znika. Jeśli od miejsca, na które pada [odbity] promień świetlny, będziemy przesuwali rękę lub inne czyste albo wypolerowane ciało po linii prostej do powierzchni przedmiotu, od której zachodzi odbicie, stanie się sprawą jasną, że odbicie zaszło po liniach prostych, ponieważ osoba przeprowadzająca doświadczenie zauważy, że odbicie światła jest widoczne zawsze wzdłuż linii prostej [poprowadzonej] do powierzchni przedmiotu, od którego zachodzi odbicie. Na każdej wypolerowanej powierzchni, niezależnie od kształtu, odbicie w każdym dowolnym punkcie tej powierzchni zachodzi po liniach prostych, ponieważ światło pada na dowolny punkt przedmiotu wypolerowanego od dowolnego punktu przedmiotu świecącego. Z tego powodu, jak to wynika z twierdzenia II,20 tego dzieła, w dowolnym punkcie przedmiotu wypolerowanego powstaje stożek, którego wierzchołek znajduje się w punkcie przedmiotu wypolerowanego, a podstawa na powierzchni przedmiotu świecącego; z każdego punktu ciała świecącego wychodzi stożek, którego wierzchołek znajduje się w punkcie ciała świecącego, a podstawa na powierzchni ciała wypolerowanego. Jeśli zatem światło rozchodzi się od przedmiotu świecącego do przedmiotu wypolerowanego po liniach równoległych, to te linie tworząc prawie walec kończą się na podstawach stożków wcześniej wspomnianych. Niezależnie więc od tego, po jakich liniach pada światło na przedmiot wypolerowany, odbija się zgodnie z właściwością tych linii, [obojętnie] czy to są linie prostopadłe czy ukośne. Wynika więc to, co zakładano.

Odbicie światła zachodzi zatem od przedmiotów wypolerowanych, nie zachodzi natomiast od przedmiotów nie wypolerowanych, chropowatych, ponieważ na nich znajdują się otwory i wgłębienia, w które wchodzi światło i powraca do siebie zmieszane z cieniem tych przedmiotów. Z tego powodu od takich przedmiotów nie zachodzi odbicie dostrzegalne zmysłami¹.

2. W obecności światła każdy zabarwiony przedmiot wysyła do wypolerowanego ciała położonego naprzeciw barwę zmieszaną ze światłem, która odbija się od tego ciała niekiedy w całości, a niekiedy częściowo¹, podobnie jak i samo światło (Ptol. Catopt. I,3; Alh. IV,3).

To, co tutaj zakładamy, można potwierdzić doświadczalnie. Niech będzie tak, aby do domu tylko przez jedno okno padało światło słoneczne na mocno zabarwione ciało o wyraźnej barwie i naprzeciwko tego ciała umieścimy srebrne zwierciadło, a znów naprzeciwko zwierciadła umieścimy wklęsłe naczynie w kształcie kubka, które jest wewnątrz białe bądź w nim znajduje się biały przedmiot. Ustawmy je w taki sposób, aby odbite światło padało na ten biały przedmiot. Wtedy to na białym przedmiocie ukaże się barwa tego ciała, na które wcześniej padało światło. Odbija się zatem barwa razem ze światłem: wobec tego razem ze światłem pada także barwa na wypolerowany przedmiot. Jeśli to wypolerowane ciało będzie gęste, barwa wraz ze światłem w całości od niego się odbije, tak że nie zabarwi wypolerowanego przedmiotu. Jeśli natomiast wypolerowany przedmiot będzie rzadki i odbijający światło, jak to jest np. w przypadku wody, szkła bądź tym podobnych rzeczy, to wtedy od tego przedmiotu odbijają się barwy i światło i [również] przenikają do tego ciała. A to jest jasne dzięki temu, że forma odbita od takich przedmiotów ma słabszą barwę i światło niż od przedmiotów, które są gęstsze niż te przedmioty. Również wokół jakiegoś punktu, który jest pod tymi przedmiotami albo na tych przedmiotach, widoczne są formy światła oraz barwy, padające na wyższą² powierzchnię tych przedmiotów. Wynika więc to, co zakładano.

3. Każde odbicie osłabia światło i barwy i ogólnie każdą formę¹ (Alh. IV,4).

Ponieważ światło skupione jest silniejsze od światła rozproszonego, zgodnie z pierwszym postulatem księgi II tego dzieła, to w zależności od tego, na ile światło bardziej oddala się od swojego źródła, o tyle jest słabsze, zgodnie z twierdzeniem II,22 tego dzieła. Jest oczywiste, że kiedy światło rozchodzi się z jakiegoś punktu przedmiotu świecącego do powierzchni przedmiotu wypolerowanego w kształcie stożka, to o ile bardziej oddala się od tego [świecącego] punktu, o tyle bardziej słabnie z powodu oddalenia od źródła światła i rozproszenia. Światło odbite od dowolnego przedmiotu wypolerowanego bardziej się osłabia, bądź to z powodu oddalenia miejsca odbicia i rozproszenia, bądź to z powodu samego odbicia. Również światło padając na przedmioty wypolerowane po liniach równoległych jest słabsze niż światło padające ukośnie, ponieważ [po liniach równoległych] mniej jest skupione. Podobnie odbicie

barw; chociaż zachodzi od każdego przedmiotu wypolerowanego i jest takie jak odbicie światła, jak wynika z twierdzenia 1 tej księgi, nie jest jednak bardzo widoczne dla oka, dlatego że jest słabsze z powodu odbicia i dlatego, że jest zmieszane z barwą tego zwierciadła podobną do odbitych barw, chyba że odbicie zachodzi od zwierciadła srebrnego². W zwierciadle metalowym barwa ukazuje się słabsza, ponieważ barwa metalu zmieszana jest ze światłem odbitym i tą odbitą barwą osłabia więc tę barwę, która się odbiła. Każde zatem odbicie barwy najlepiej można obserwować w domu z jednym otworem, gdy naprzeciw tego otworu znajduje się biała ściana. Wtedy bowiem, gdy na drodze promienia słonecznego wstawimy srebrne zwierciadło, a pomiędzy tym zwierciadłem i ścianą umieścimy jakąś barwną rzecz, to wtedy nastąpi odbicie barwy na białą ścianę dostrzegalne zmysłami³. To samo zachodzi, jeśli na drodze promienia padającego na to samo zwierciadło umieścimy przezroczysty zabarwiony przedmiot, przez który przejdzie promień, padający na zwierciadło, jak np. jeśli przed oknem ustawimy zabarwioną szybę, albo jeśli umieścimy ją w podobny sposób, tak jak będzie uważał przeprowadzający doświadczenie.

Gdy silne światło pada na srebrne zwierciadło i to światło odbija się na białą ścianę, to wtedy wyraźnie zobaczymy, że światło [padające na] ścianę jest słabsze od światła [padającego na] zwierciadło. Wobec tego odbicie osłabia światło. Z tego samego powodu również barwa odbita jest słabsza od tej barwy, która się odbijała. Jest więc oczywiste, że odbicie osłabia światło i barwy, ale bardziej barwy niż światło. Barwy bowiem słabiej padają niż światło i dlatego podczas odbicia łatwiej ulegają osłabieniu. Kiedy bowiem słaba barwa dojdzie do zwierciadła, zmiesza się z barwą zwierciadła i z powodu tego zmieszania zmienia się. Z tego powodu barwa odbita wydaje się słabsza i zaciemniona, i w ogóle formy odbite są słabsze niż te formy, które są w tym miejscu, od którego się odbijają. W ten więc sposób każde odbicie powoduje osłabienie. To wyraźnie widać w przypadku światła: chociaż światło padające bezpośrednio i światło odbite znajdują się w tej samej odległości od swojego źródła, to jednak światło odbite jest słabsze. Umieścimy w przestrzeni naprzeciw promienia świetlnego wpadającego przez okno do jakiegoś domu, w którym znajduje się tylko jedno okno, zwierciadło mniejsze od okna w taki sposób, aby światło wypełniające okno, nie padało na zwierciadło, ale na leżący na ziemi biały przedmiot. Podobnie niech światło odbite od zwierciadła pada na biały przedmiot uniesiony z ziemi, zwracając uwagę na to, aby zachować tą samą odległość uniesionego przedmiotu i leżącego przedmiotu od środka otworu okiennego. Wtedy właśnie zobaczymy na białym uniesionym przedmiocie, do którego zaszło odbicie, mniejsze światło niż na leżącym przedmiocie. Powodem zmniej-

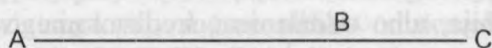
szenia jest samo odbicie. To samo i w ten sam sposób bardzo łatwo można pokazać w przypadku odbicia barwy. Wynika więc to, co zakładano.

4. Każde światło odbite, chociaż jest słabsze od światła pierwotnego, jednak jest silniejsze niż światło wtórne¹, o ile jedno i drugie światło znajduje się w tej samej odległości od źródła; to samo dotyczy barwy (Alh. IV,5).

Gdy światło odbite pada na jakiś przedmiot, a inny podobny przedmiot umieścimy poza miejscem, na które pada światło odbite, oraz razem z poprzednim przedmiotem znajduje się on w tym samym oddaleniu od zwierciadła, to na tym drugim przedmiocie zobaczymy wtórne światło słabsze niż na tym, który został umieszczony w miejscu, na które pada światło odbite. Zróbmy tak, aby bezpośrednio naprzeciw otworu, przez który promień wpada do jakiegoś domu, umieścić na ziemi zwierciadło, przyjmujące całe światło promienia wpadającego przez okno, które to światło wcześniej na początku II księgi tego naukowego dzieła nazwalismy światłem pierwotnym. Wtedy stanie się oczywiste, że światło będzie silniejsze na przedmiocie położonym w miejscu, na które pada światło odbite, niż na innym podobnym przedmiocie umieszczonym poza tym miejscem i będącym w takiej samej odległości od zwierciadła. To samo zachodzi, jeśli powierzchnia zwierciadła nie przyjmuje promienia na wprost, ale ukośnie. Również jest to widoczne w odniesieniu do barw, ponieważ po dokonaniu odbicia barwy od zwierciadła srebrnego, biały przedmiot umieszczony w miejscu, na które pada światło odbite, odbiera najwięcej barw, natomiast inny przedmiot w tym samym stopniu biały, znajdujący się poza miejscem, na które pada światło odbite, (ale w tej samej odległości od zwierciadła), ukazuje się również zabarwiony, jednak w stopniu dużo słabszym niż przedmiot umieszczony w miejscu, na które pada światło odbite. Jeżeli przypadkiem będzie to zwierciadło metalowe, to na przedmiocie, który jest w miejscu, na które pada światło odbite, zobaczymy barwę umiarkowaną, natomiast poza miejscem, na które pada światło odbite na przedmiocie w równym stopniu białym, prawie nie będzie żadnej barwy. Wynika więc to, co zakładano.

5. Natura działa we wszystkich przypadkach po liniach krótszych (Euklides we wstępie do *Optyki*; Ptol. Catopt. I,1).

Jest to powszechnie widoczne we wszystkich dziełach natury. W ten sposób dokonują się bowiem wszystkie ruchy naturalne. Rzeczy ciężkie przesuwają się prostopadle do płaszczyzny horyzontu. Również wypuszczone z łuków strzały gwałtownie przesuwają się po linii krótszej zależnej od kąta, pod jakim zostały wypuszczone, bo ruch zachodzi szybko po



[Rys.1]

linii krótszej od jednego końca do drugiego końca. Ponieważ, jak założyliśmy na początku księgi II tego naukowego dzieła, natura nic nie czyni na próżno i nie zawodzi w przypadkach koniecznych¹, jest oczywiste, że musi działać po liniach krótszych. Jeżeli bowiem będzie można wykonać zamierzoną czynność za pośrednictwem ruchu albo działania na linii AB [rys. 1], a przeprowadzi się tę czynność na linii ABC, to każde działanie na linii BC zostało przeprowadzone na próżno, ponieważ tamto przedsięwzięcie osiągnęło swój kres w punkcie B; nie ma więc działania w żadnym punkcie na linii BC. I to można wykazać na wielu przykładach z natury. Z tego powodu również zwierzęta, których dusza jest śmiertelna, poruszają się do celu po linii krótszej, jak to widać na przykładzie prostych nici pajaków, z których tkają swoje sieci, które, chociaż niekiedy znajdujemy jako okrągłe, to zawsze z powodu linii krótszych utkane są z prostych nici zarówno w osnowie, jak i w wątku. To samo widać również u psów, które ominąwszy dwa boki trójkąta biegną po trzecim boku, jak gdyby przez naturę zostały poinformowane, że dwa boki trójkąta są większe od trzeciego, o czym ludzi poucza geometra w Elementach I,20. Wynika więc to, co zakładano, zgodnie z naszymi możliwościami.

6. Każde odbicie światła i barwy zachodzi po liniach dostrzegalnych zmysłami i posiadających szerokość (Alh. IV,16).

Po takich bowiem liniach światło pada na przedmiot wypolerowany, również gdy chodzi o światło najśłabsze, jak to wynika z twierdzenia II,3 tego dzieła. Szerokość linii odbicia jest równa szerokości linii padania, a linia matematyczna, która jest linią środkową całej linii odbicia, zajmuje to samo usytuowanie w miejscu odbicia, jakie ma linia matematyczna, która jest linią środkową linii padania dostrzegalnej zmysłami w miejscu padania. Podobnie dowolna linia matematyczna na linii odbicia dostrzegalnej zmysłami ma to samo miejsce co odpowiadająca jej linia, będąca na dostrzegalnej zmysłami linii padania. Z tego powodu jest rzeczą właściwą linie dostrzegalne zmysłami zastąpić liniami matematycznymi, gdy omawiamy odbicie.

7. Przy odbiciach zachodzących od dowolnych zwierciadeł ma miejsce złudzenie, spowodowane nieodpowiednim światłem albo różnym

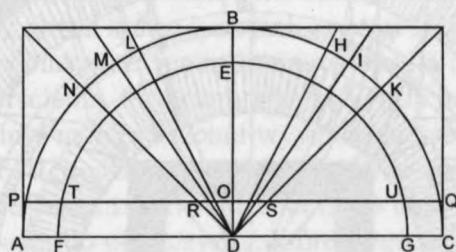
położeniem [względem zwierciadła], albo oddaleniem punktu, którego forma się odbija, albo oddaleniem środka samego oka od powierzchni dowolnego zwierciadła¹ (Alh. VI,3).

Na ogół zdarzają się takie przypadki, że oko jest wprowadzone w błąd w odniesieniu do cech widzialnych w prostym widzeniu rzeczy widzianych, ale także zdarza się w tych samych przypadkach, że oko jest wprowadzone w błąd podczas widzenia, które zachodzi w wyniku odbicia, ponieważ i ten rodzaj widzenia jest także widzeniem, w którym formy światła i barw, i pozostałych cech widzialnych ukazują się zdolności rozróżniającej. A to, jak wynika z twierdzenia IV,1 tego dzieła i wielu innych twierdzeń, zachodzi w ośmiu przypadkach. Najczęściej jednak i w sposób najbardziej wyraźny zjawisko to zachodzi na zwierciadłach albo z powodu słabego światła, albo z powodu różnego położenia, które sprawia, że linie odbicia odsuwają się od osi widzenia, albo z powodu oddalenia punktu rzeczy widzianej, którego forma odbija się od powierzchni tego zwierciadła, czy też z powodu oddalenia środka samego oka, do którego zachodzi odbicie od powierzchni tego zwierciadła po [tej] odsuniętej [linii odbicia]. W pozostałych zaś pięciu przypadkach, chociaż błąd w podobny sposób został wywołany podczas widzenia form odbitych od dowolnych zwierciadeł do oka, to jednak ten błąd nie jest tak dostrzegalny zmysłami, jak to jest w tamtych wymienionych przypadkach, chociaż [widzenie] nie jest całkowicie wolne od tamtych złudzeń. Wynika więc to, co zakładano.

8. Jest tylko siedem zwierciadeł, od których zachodzi regularne odbicie¹.

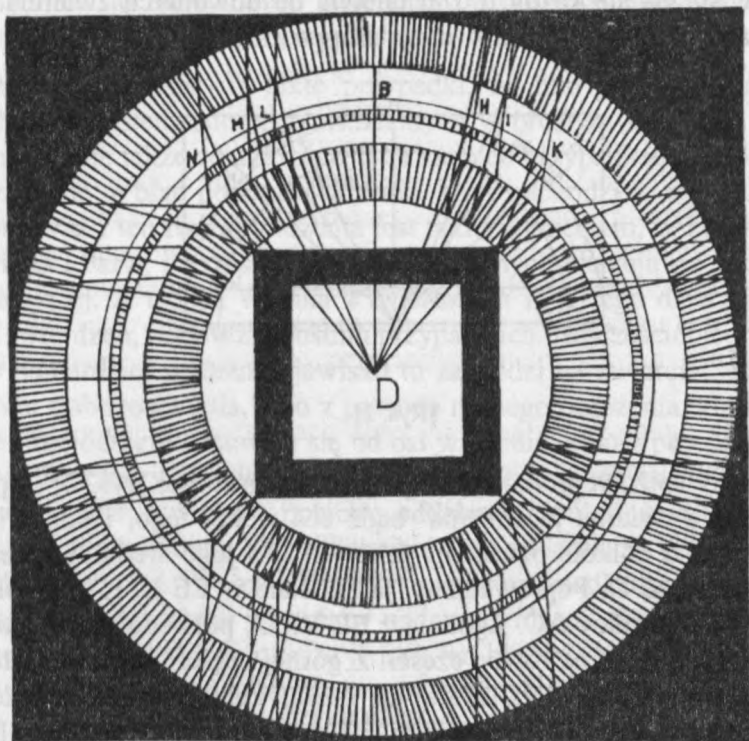
Ponieważ regularne odbicie może zachodzić tylko od przedmiotów regularnych, zaś przedmiotami regularnymi mogą być tylko przedmioty, które najczęściej są płaszczyznami albo mają jedną powierzchnię wklęsłą bądź wypukłą. W taki zaś sposób spostrzega zmysł wzroku: chociaż widok przedmiotów płaskich zmienia się stosownie do kształtów i liczby kątów, to jednak, co się tyczy natury odbicia, to we wszystkich tych przedmiotach płaszczyzna jest tożsama. Nie znajdujemy w nich bowiem żadnej różnicy, która do nich [odnosiłaby się]. Jak wynika z twierdzenia I,118 tego dzieła, każda powierzchnia regularna wypukła bądź wklęsła jest częścią albo powierzchni kulistej, albo walca, albo stożka obrotowego. W ogóle takie właściwości ma więc siedem zwierciadeł, z których jedno jest płaskie o dowolnym kształcie, trzy są wypukłe: kuliste, walcowate i stożkowe, trzy znów wklęsłe: kuliste, walcowate i stożkowe. Nie jest możliwe, aby było więcej zwierciadeł, od których zachodziłoby regularne odbicie. Wynika więc to, co zakładano.

9. Konstruuemy przyrząd, za pomocą którego w sposób doświadczalny przedstawia się każdy rodzaj odbicia od dowolnych zwierciadeł regularnych (Alh. IV,7).



[Rys. 2]

Weźmy spiżowe półkole o odpowiedniej grubości [rys. 2]¹, np. grubości połowy ziarna jęczmienia² bądź coś wokół tego, i odpowiedniej wielkości. To półkole oznaczmy jako ABC, a jego średnicę przez AC, zaś środek jako D. Poprowadźmy, jak podano w EE I,11, linię DB prostopadłą do średnicy AC. Zgodnie z EE VI,33, półśrednica DB koła podzieli więc półkole na równe części. Z górnej części linii DB odetnijmy, jak podano w EE VI,9, szóstą jej część, którą oznaczmy jako BE. Utwórzmy półkole o wielkości linii ED ze środkiem w [punkcie] D oraz oznaczmy to półkole jako FEG. Łuk BC podzielmy na części, zupełnie dowolnie, w punktach H, I, K. Łuk BA podzielmy na tyle samo części w punktach L, M, N, ale w ten sposób, aby łuk LB był równy łukowi BH, łuk ML łukowi HI, a łuk NM łukowi IK, zgodnie z EE I,32 oraz EE III,26, po przeprowadzeniu linii DH, DI, DK, DL, DM, DN. Następnie od półśrednicy DB w dolnej części odetnijmy szóstą jej część i oznaczmy ją jako DO. Od punktu O poprowadźmy, zgodnie z EE I,31, linię równoległą do średnicy półkola, którą jest linia AC; ta równoległa to POQ. Tę linię niech przetną wszystkie linie poprowadzone od środka D do punktów podziału. Punkt więc, w którym linia DN ją przecina, oznaczmy jako R, a punktem, w którym linia DK ją przecina, niech będzie punkt S, zaś punktami, w których przecina tę linię półkole FEG, niech będą punkty T i U. Następnie od całego półkola, z jednej jego strony odetnijmy część DAPR, a z drugiej część DCQS. Wyrównajmy jak najlepiej te powierzchnie. Środek przyjętego półkola niech będzie zaokrąszony³ jak punkt tak, aby tylko punkt D pozostał na tej samej powierzchni półkola razem z poprowadzonymi liniami. My zaś wielkość linii BE, która jest szóstą częścią półśrednicy DB, nazywamy palcem; średnica AC liczy więc dwanaście palców.



[Rys. 2a]

Następnie weźmy drewnianą kwadratową gładką tablicę, której bok wynosi czternaście wspomnianych palców [rys. 2a]⁴ i jest większy od średnicy AC o dwa palce. Jej grubość niech liczy siedem palców. Na tej tablicy zaznaczymy środek, zgodnie z twierdzeniem I,40 tego dzieła. Wokół tego punktu zakresłmy koło, którego wielkość [średnicy, jest równa] bokowi tablicy. To koło będzie więc większe od koła ABC o wielkość jednego palca z każdej strony, ponieważ jego średnica jest większa od średnicy AC o dwa palce. Następnie wokół tego samego środka tablicy drewnianej zakresłmy koło równe kołu FEG. Podzielmy koło na drewnianej tablicy odpowiednio do podziału spiżowego półkola, oznaczonego jako ABC, w taki sposób, aby pierwsza część drewnianego koła odpowiadała pierwszej części półkola ABC, druga drugiej, i tak dalej. Od środka drewnianej tablicy do punktów podziału poprowadźmy linie proste. Na zewnątrz zaokrąglimy drewnianą tablicę zgodnie z większym kołem i wytnijmy wewnętrzną część tablicy obejmującą mniejsze koło. Powstanie pewien rodzaj pierścienia⁵, którego szerokość wynosi dwa palce, średnica zewnętrznego koła czternaście palców, a wewnętrznego

koła dziesięć palców. Głębokość bądź wysokość całego pierścienia będzie wynosiła siedem palców, jego zakrzywione powierzchnie dokładnie wyrównajmy tak, aby otrzymał on kształt walca obrotowego. Na płaszczyźnie tego pierścienia pozostaną linie dzielące koło zgodnie z podziałem półkola ABC. Przez końce tych linii poprowadźmy na [zewnątrznej] wypukłej powierzchni pierścienia linie prostopadłe do płaszczyzny górnej podstawy pierścienia. Postawmy stopkę cyrkla na końcu linii dzielącej koło i zakreślmy na powierzchni wypukłej pierścienia półkole, które, zgodnie z EE III,30, podzielmy na [dwie] równe części i poprowadźmy linię od punktu do punktu. Z twierdzenia I,105 tego dzieła wynika, że ta linia jest prostopadła do płaszczyzny, której częścią jest podstawa cylindra. W ten sam sposób przez końce linii dzielących poprowadźmy prostopadłe na powierzchni wklęsłej pierścienia. Na tej powierzchni od strony nie podzielonej płaszczyzny [tzn. dolnej powierzchni] zaznaczmy wysokość dwóch palców. Na tych wszystkich liniach prostopadłych poprowadzonych na tej powierzchni niech się znajdą znaki. Wzdłuż tych znaków umieścimy [inną] tablicę o ostrych krawędziach⁶, mającą wielkość koła FEG (która może być odpowiednio przygotowana w inny sposób) i narysujemy koło równoległe do płaszczyzny pierścienia. W odległości połowy ziarna jęczmienia [poniżej zaznaczonego] na wysokości dwóch palców [koła] umieścimy inne znaki i zakreślmy koło równoległe do tego pierwszego koła, będące niżej od tamtego o połowę ziarna jęczmienia. Pod tym drugim kołem [znajdującym się] poniżej tamtego koła na wysokości dwóch palców zaznaczmy [w odległości] równej grubości spiżowego półkola ABC inne punkty na wspomnianych powyżej prostopadłych i niech powstanie kolejne koło przechodzące przez te punkty. Wybierzmy jakimś narzędziem drewno między tymi dwoma drugimi kołami i niech wydrążenie ma głębokość jednego palca. Do tego wydrążenia dopasujmy spiżową część półkola, oznaczoną jako PBQ, która wchodzi w to wydrążenie aż do części mniejszego koła (którą oznaczyliśmy TEU) dlatego, że odległość między tymi dwoma łukami wynosi jeden palec, i taka sama jest głębokość wydrążenia zrobionego w drewnianej tablicy. Niech zatem będzie tak, aby powierzchnia koła FEG podzielona linią [poprowadzoną] od środka D do obwodu została dopasowana do części powierzchni [wklęsłej] podzielonego pierścienia w taki sposób, aby linie prostopadłe poprowadzone na wklęsłej powierzchni pierścienia dotykały linii podziału koła FEG i wtedy będą padały prostopadłe na powierzchnię koła FEG. Również na wypukłej powierzchni pierścienia od strony nie podzielonej powierzchni [tzn. powierzchni dolnej] zaznaczmy punkt na każdej spośród poprowadzonych prostopadłych w odległości dwóch palców od tej nie podzielonej płaszczyzny. Umieściwszy stopkę cyrkla w każdym oznaczonym punkcie, zatoczmy koła,

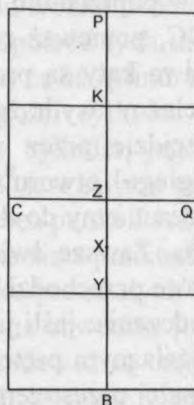
a średnica każdego z nich niech będzie równa wielkości ziarna jęczmienia. Niech powstaną otwory cylindryczne okrągłe. W jednym z nich umieścimy drewniany kołek, który, gdy przejdzie do wewnętrznej wklęsłości pierścienia, dotknie powierzchni półkola FEG, ponieważ, jak to wynika z wcześniejszych rozważań, środek każdego z tych małych kół znajdzie się na obwodzie koła, wcześniej zaznaczonego na wklęsłej powierzchni pierścienia. Od tego koła powierzchnia koła spiżowego FEG jest odległa o połowę ziarna jęczmienia.

Następnie weźmy inną kwadratową drewnianą tablicę, której średnica⁷ niech będzie równa średnicy [zewewnętrznej] drewnianego pierścienia. Znalazłszy, zgodnie z twierdzeniem I,40 tego dzieła, jej punkt środkowy, wokół tego punktu środkowego zakresłmy koło, którego wielkość półśrednicy wynosi DE. To koło będzie równe kołu FEG i podstawie wklęsłości pierścienia. Środek tego koła niech będzie również środkiem kwadratu, którego boki niech mają cztery palce i niech te boki znajdują się w równej odległości od boków tej drewnianej tablicy. A to może się stać na mocy twierdzenia I,41 tego dzieła. Wydrążmy ten kwadrat na głębokość jednego palca. Wyrównajmy wszystkie powierzchnie tego wgłębienia tak, aby miały one równe kąty, a jego dno było płaskie. Następnie do tej tablicy umocujemy na stałe podstawę pierścienia tak, aby koło mniejsze tej tablicy było odpowiednie do wgłębienia pierścienia.

Potem zrobimy metalowy wydrążony walec o dowolnej grubości ścianki, którego średnica podstawy niech będzie równa wielkości ziarna jęczmienia, podobnie jak średnice otworów. Ten walec umieścimy we wcześniej wykonanych otworach. Gdy dojdzie on do wklęsłej części pierścienia, dotknie linii poprowadzonych na kole FEG. Na jednym końcu walca umieścimy jakieś urządzenie, które nie pozwoli na to, aby walec przesunął się poza wyznaczone miejsce. Aby mógł on pewniej stać, dajmy wokół niego nieco wosku. Walec niech będzie o takiej długości, aby wychodząc ponad powierzchnie koła FEG, mógł dotknąć boku kwadratu wydrążonego w drewnianej tablicy, który jest równoległy do linii RS, poprowadzonej na powierzchni koła spiżowego.

Następnie weźmy siedem płaskich drewnianych listew o równoległych powierzchniach prostokątnych, równych i takich samych, które mają sześć palców długości, cztery palce szerokości, o odpowiedniej grubości, a konieczność tego ostatniego założenia wyjaśnię poniżej. Jedną z tych listew przymocujemy do wydrążonego kwadratu tak, aby była prostopadła do dna tego wydrążonego kwadratu i łatwo tam weszła bez wciskania. Wstawmy ją w taki sposób, aby punkt D, tzn. środek koła ABC, dotknął jednej z powierzchni długości listwy. W punkcie zetknięcia na listwie postawmy znak, i niech to będzie X. Przez oznaczony punkt X przeprowadźmy do końców listwy linię równoległą do dłuż-

szych boków listwy, i niech to będzie linia BXP. Jest oczywiste, że będzie to linia długości listwy. Następnie na dłuższej części tej linii [poprowadzonej] przez oznaczony punkt X zaznaczmy długość połowy ziarna jęczmienia. W ten sposób powstanie tam punkt Z. I ten punkt Z będzie punktem środkowym długości listwy, położonym naprzeciw środków otworów. Środki otworów są bowiem położone od powierzchni koła ABC wyżej o połowę ziarna jęczmienia i znajdują się w odległości dwóch palców od [dolnej] podstawy pierścienia. Wobec tego punkt Z od tej samej podstawy znajduje się w odległości dwóch palców, a listwa w kwadratowym wydrążeniu – jednego palca. Ponieważ odległość od końca tej listwy aż do punktu Z wynosi trzy palce, a długość listwy ma tylko sześć palców, to jest oczywiste, że punkt Z znajduje się w połowie długości listwy. Poprowadźmy przez punkt Z linię równoległą do krawędzi listwy i niech to będzie linia CQ. Linią długości płytki jest linia BP, podzielona na równe części w punkcie Z. Jej dwie połowy to linie BZ i ZP. Podzielmy je na równe części w punktach K i Y, przeprowadzając linie szerokości przez punkty przecięcia K i Y prostopadłe do linii długości BP i równoległe do linii CQ. W ten więc sposób linia BP, a w rezultacie cała listwa, zostanie podzielona na cztery równe części [rys. 3]. W taki sam sposób podzielmy również i oznaczmy sześć pozostałych listew. Zrobiono więc to, co zakładano.



[Rys. 3]

10. Na płaskich zwierciadłach odbicie promienia padającego ukośnie zachodzi w przeciwną stronę¹ i doświadczalnie potwierdzono, że kąt padania zawsze jest równy kątowi odbicia (Euc. Catopt., 1; Ptol. Catopt. I,4; Alh. IV,10).

Weźmy płaskie zwierciadło z czystego żelaza o kształcie kolistym. Jego średnica niech wynosi trzy palce, które wcześniej zostały określone². We wspomnianej listwie zrobmy koliste wydrążenie o środku

w punkcie Z, który jest punktem środkowym listwy mającej wielkość średnicy zwierciadła, a jego głębokość niech się równa grubości tego zwierciadła. Umocujmy zwierciadło w taki sposób, aby powierzchnia zwierciadła i listwy tworzyła jedną płaszczyznę, a środek koła okrągłego zwierciadła znalazł się dokładnie w punkcie Z. Linia CQ, dzieląca dłuższą powierzchnię listwy na dwie równe części, podzieli także powierzchnię zwierciadła na dwie równe części. I na tym polega skrupulatność przeprowadzającego doświadczenie. Tę listwę następnie wsuwamy do drewnianego pierścienia, aż środek D, który jest wierzchołkiem spiżowej tablicy, dotknie zwierciadła; wtedy ta listwa wraz ze zwierciadłem niech będzie umocowana jakoś zręcznie do wydrążonego kwadratu tak, aby się nie chwiała, ale mocno stała. Następnie dobrze zakryjmy wszystkie otwory przyrządu, z wyjątkiem jednego, który będzie nachylony do płaszczyzny listwy; i tak dla przykładu niech to będzie otwór odpowiadający linii DL na spiżowym kole ABC i ten odsłonięty otwór skierujemy na promień słoneczny, a lepiej na promień słoneczny padający przez okno do domu. W ten sposób zobaczymy, że promień padający na zwierciadło płaskie odbija się do innego otworu odpowiednio na linii DH na spiżowym kole ABC. Jeśli odsłoniemy otwór punktu H, a zasłonimy, wcześniej otwarty, otwór punktu L, to ten promień odbije się również do tego odsłoniętego [wcześniej] otworu. Kąt zaś BDL jest równy kątowi BDH, jak to wynika z założenia w poprzednim twierdzeniu. Wobec tego kąt LDA jest równy kątowi HDC, ponieważ cały kąt BDA jest równy całemu kątowi BDC, gdyż obydwa kąty są proste. Jeżeli będziemy do osłoniętego otworu wsuwali żelazny wydrążony cylinder, o którym wspominaliśmy, to światło przejdzie przez wydrążenie cylindra do zwierciadła i odbije się do [drugiego] otworu³ tworząc kąt równy, jak poprzednio. Jeśli zaś cylinder przesuniemy do drugiego otworu, promień odbije się do pierwszego otworu. Zawsze światło przechodzące przez cylinder będzie słabsze niż to, które przechodzi przez sam otwór bez cylindra. To jest przyczyną doświadczenia: jeśli jakiś otwór zalepimy woskiem i w jego środku zrobimy żelaznym prętem mały otwór, to wtedy światło odbije się do podobnie małej przestrzeni wokół środka drugiego otworu, odpowiedniego temu pierwszemu, ze względu na równość kąta. A jeśli wydrążenie żelaznego cylindra zostanie zakryte (wykonawszy pierwszy otwór w środku jego podstawy), to światło przejdzie przez oś cylindra i odbije się do środka drugiego otworu, i [tak będzie] w każdym przypadku, o ile zostanie zachowana równość kątów. Jeśli natomiast przyrząd ustawimy w taki sposób, aby światło przechodziło przez dwa otwory, w podobny sposób będzie się odbijało do innych dwóch, podobnych do tamtych, bo zawsze nachylenie linii odbicia jest równe nachyleniu linii padania. Ponieważ linia BXP (a jest to linia środkowa długości

listwy) jest prostopadła do linii szerokości listwy górnej części, równoległej do linii CQ, i jest ona wspólnym przecięciem powierzchni listwy oraz powierzchni dna wydrążonego kwadratu, równoległej do powierzchni ABC spizowego koła, a linia środkowa powierzchni dna jest równoległa do linii DB (a jest to środkowa średnica koła), i ponieważ linia, która jest wspólnym przecięciem półśrednicy ABC i powierzchni listwy, na której znajduje się linia szerokości listwy, jest równoległa do wspólnego przecięcia powierzchni dna i listwy, zgodnie z EE I,28, (gdyż linia BXP jest prostopadła do powierzchni dna), to z twierdzenia I,23 tego dzieła wynika, że linia BXP jest prostopadła do powierzchni koła ABC, równoległej do powierzchni dna tablicy. Zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny, średnica DB jest więc prostopadła do linii BXP, skoro przecinają się one w punkcie D. Wobec tego linia DB jest prostopadła do powierzchni płaskiego zwierciadła i do średnicy tego koła, ponieważ powierzchnia koła ABC jest równoległa do powierzchni koła przechodzącego przez środki otworów, gdyż odległość wszystkich środków otworów od powierzchni koła ABC jest taka sama, tzn. ma wielkość połowy ziarna jęczmienia. Płaszczyzna zaś przechodząca przez środki wszystkich otworów przecina wzdłuż osi żelazny cylinder. Oś cylindra znajduje się więc na tej płaszczyźnie. Ponieważ żelazny cylinder, gdy go wkładamy, dotyka jakiejś spośród linii na powierzchni koła ABC, poprowadzonych od środka D do obwodu, np. dotyka linię DB lub linię DM lub jakąś inną spośród tych linii, to zgodnie z wcześniejszymi wywodami jest oczywiste, że oś cylindra jest równoległa do tej linii, która styka się z linią długości cylindra. Ponieważ niezależnie od tego, w jaki otwór wkładamy cylinder, jego oś zawsze pada na linię BXP i pada punkt Z. Linia ZB⁴ jest zawsze prostopadła do powierzchni ABC, a linia, poprowadzona przez punkt Z leżący na tej listwie prostopadłej do środka otworu, który styka się z punktem N, jest równoległa do linii DN: podobnie jest w przypadku pozostałych środków otworów i punktów M, L, H, I, K, zaznaczonych na obwodzie [łuku] ABC. Wszystkie półśrednice otworów są równe. Ponieważ są częściami linii długości pierścienia, są równoległe do linii ZB, zgodnie z twierdzeniem I,25 tego dzieła, bo półśrednice wszystkich otworów są prostopadłe do powierzchni koła ABC. Także linie LD i DH są równoległe do dwóch linii, które możemy sobie wyobrazić, że zostały poprowadzone przez punkt Z na listwie do dwóch środków, które stykają się z punktami L i H, zgodnie z EE I,33. Zgodnie zatem z EE XI,10, kąty zawarte między tymi liniami na prostopadłych płaszczyznach są równe. Jeśli przez punkt D poprowadzimy linię do środka środkowego otworu, będzie ona, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, równoległa do linii DB, dzieląc kąt, [utworzony przez] prze-

cinające się linie, na równe części, np. linia DB dzieli kąt LDH na równe części. Wynika więc to, co zakładano.

11. Za pomocą przyrządu pokazujemy, że promień padający prostopadłe na zwierciadła płaskie odbija się po tej samej drodze¹ (Alh. IV, 11)

Jeżeli układ przyrządu pozostanie taki jak poprzednio, to listwa, na której ustawione jest zwierciadło płaskie, będzie prostopadła do dna wydrążonego kwadratu, który znajduje się w drewnianej tablicy, będącej podstawą przyrządu; i wtedy będzie można zasłonić wszystkie otwory z wyjątkiem otworu środkowego, któremu odpowiada półśrednica DB koła ABC. Weźmy walcowaty kołek wielkości otworu. Koniec kołka należy zaostrzyć tak, aby powstał jeden punkt, który jest końcem osi walca. Wsuwajmy walec przez otwór aż do zwierciadła. Punkt, w którym koniec osi walca dotknie zwierciadła, zaznaczymy atramentem. Następnie wyciągnąwszy kołek, odsłonięty otwór umieścimy naprzeciw promienia świetlnego. Promień padnie na oznaczony punkt i wokół niego powstanie koło. Na granicy tej kolistej [plamy] światła zaznaczymy punkt i zgodnie z wielkością linii leżącej między zaznaczonymi punktami zakresłmy koło, które będzie większe od koła otworu, zgodnie z twierdzeniem II, 36² tego dzieła, ponieważ zawsze droga światła przechodzącego przez otwór przybiera kształt stożka. W żadnym zaś z pozostałych punktów ani w żadnej części wydrążenia pierścienia nie zobaczymy odbitego światła. Jest więc oczywiste, że światło rozchodząc się wzdłuż osi odbija się po osi i odbicie padającego światła w całości zachodzi po osi. Chociaż kolistą [plamę] światła wokół wewnętrznej podstawy otworu będziemy widzieli jako większą niż światło padające albo promień, i chociaż tę [plamę] światła będziemy widzieli jako większą niż koło tego wewnętrznego światła, to jest sprawą oczywistą, że to światło³ ukazuje się dzięki odbiciu. To zjawisko jednak nie zachodzi w wyniku odbicia promienia padającego prostopadłe, który jest osią tego stożka oświetlenia⁴, ale to zachodzi w wyniku odbicia pozostałych promieni stożka, padających ukośnie na zwierciadło, które odbijają się w przeciwnych kierunkach zgodnie ze swoim ukośnym położeniem, mimo że nie odbijają się po tej samej drodze [po której padają]. A to staje się oczywiste, jeśli zalepimy woskiem obydwie podstawy otworu, pozostawiając jedynie mały otwór na osi. Wtedy, skoro promień słoneczny pada tylko po osi, nie ukaże się odbite światło w kształcie koła wokół wewnętrznej podstawy otworu. Wynika więc, że ta [plama] światła w kształcie koła nie pochodzi od światła odbitego wzdłuż osi, ale od odbitego światła, padającego ukośnie na to zwierciadło. Ponieważ, jeśli listwę, na której zostało umieszczone wspomniane zwierciadło płaskie, odchylimy nieco do tyłu, to wówczas stanie się jasne, że promień przechodzący przez środek otworu nie pada prosto-

padle na powierzchnię zwierciadła i zobaczymy, że światło odbite jest odsunięte od środka otworu proporcjonalnie do wielkości nachylenia zwierciadła. Wtedy środek [plamy] światła zawsze przypadnie na linię poprowadzoną na wklęsłej powierzchni pierścienia, prostopadłą do powierzchni ABC spiżowego koła i przechodzącą przez środek podstawy środkowego otworu. Bo [ta prostopadła] zawsze przecina [plamę] światła odbitego w kształcie koła i dzieli to koło przez środek. Jeśli listwa z prawego lub lewego boku zostanie odchylona, stosownie do tego promień będzie zawsze ukośny, gdy natomiast listwa powróci do prostopadłego położenia, odbicie światła powróci jak poprzednio do wewnętrznej podstawy otworu. Wynika więc to, co zakładano: zawsze promień padający prostopadle na zwierciadła płaskie odbija się po tej samej drodze, a przy promieniach padających ukośnie, kąt padania jest równy kątowi odbicia, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia.

12. Gdy promień pada na zwierciadła kuliste wypukłe i odbija się, to kąt padania jest zawsze równy kątowi odbicia. Z tego wynika, że promień [padający] prostopadle odbija się po tej samej drodze (Euc. Catopt. 1; Ptol. Catopt. I,5; Alh. IV,12).

Przygotujmy z czystego żelaza wypukłe zwierciadło kuliste w następujący sposób: zakreślmy koło największe kuli, której średnica niech ma sześć palców, o których wcześniej mówiliśmy. Zaznaczmy na nim, jak podano w EE IV,1, linię równą półśrednicy, i będzie to cięciwa o wielkości trzech palców. Przez środek kuli poprowadźmy, jak podano w EE I,12, również półśrednicę prostopadle do tej cięciwy i przedłużmy ją do łuku. Padnie ona, zgodnie z EE I,4 oraz EE III,28, w punkt na środku łuku. Głębokość łuku będzie mniejsza niż połowa palca. Odetnijmy także ową mniejszą część koła i wykonajmy zwierciadło, które jest tak wielkie i wklęsłe jak to koło; zwierciadło należy wygładzić i wypolerować bardzo dokładnie na zewnątrz. Weźmy także drewnianą listwę o takich samych wymiarach i kształcie jak poprzednio. Po wykonaniu otworu o wymiarach zwierciadła, na linii¹ przymocujmy zwierciadło do listwy w ten sposób, aby punkt środkowy wypukłego zwierciadła² znalazł się w punkcie środkowym Z listwy. Niech on się znajdzie na powierzchni tej listwy, co możemy sprawdzić przykładając inną listwę albo sznur, co kto woli. Wstawmy również listwę wraz ze zwierciadłem prostopadle do dna kwadratu, jak w przypadku zwierciadeł płaskich, powtarzając wcześniejszą operację. Jeżeli światło przechodzi przez otwór środkowy albo pada ukośnie [przez otwór boczny], odbicie zachodzi jak poprzednio. Podobnie się stanie, jeżeli listwa będzie odchylona. Zawsze bowiem, kiedy światło pada na zwierciadło kuliste wypukłe po różnych liniach ukośnych, odbija się również po różnych liniach ukośnych, a kiedy światło

pada na zwierciadło po liniach prostopadłych, odbija się po tych samych liniach i zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia. A to zakładano.

13. Gdy promień pada na zwierciadło kuliste wklęsłe i się odbija, to zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia (Euc. Catopt. 1; Alh. IV,12).

Weźmy zwierciadło kuliste jak powyżej. Wygładźmy wypukłą część tego koła i bardzo dokładnie wypolerujmy stronę wewnętrzną. Weźmy inną drewnianą listwę podobną do poprzedniej i umocujmy na niej zwierciadło w taki sposób, aby koło podstawy zwierciadła znalazło się na powierzchni listwy, a środek tego koła leżał w punkcie Z. Linię CQ, która dzieli powierzchnię płytki na równe części, połączmy ze średnicą podstawy zwierciadła. Starannie to wykonajmy za pomocą zręcznej sztuki, której wybór pozostawiamy pomysłowości prowadzącego doświadczenie. Wstawmy listwę wraz ze zwierciadłem do tego przyrządu jak poprzednio i w ogóle przeprowadźmy operację podobną do poprzedniej w ten jednak sposób, aby zawsze punkt D, który jest środkiem spizowego półkola, znajdował się w punkcie środkowym zwierciadła. Tego punktu należy bowiem zawsze poszukać we wszystkich zwierciadłach wypukłych i wklęsłych. Okaże się, jak poprzednio, że kąty padania są równe kątowi odbicia i to zarówno dla promieni padających ukośnie, jak i dla promienia prostopadłego. Wynika więc to, co zakładano.

14. Gdy promień pada na zwierciadła cylindryczne wypukłe i odbija się, kąt padania jest zawsze równy kątowi odbicia (Euc. Catopt. 1; Alh. IV,12).

Weźmy okrągły cylinder wysoki na trzy palce. Jego podstawą niech będzie koło o średnicy sześciu palców. Odetnijmy część koła podstawy tego cylindra, jak poprzednio zrobiliśmy to ze zwierciadłami kulistymi. Część cylindra, którego podstawą jest ta część koła, niech będzie z czystego żelaza, a wysokość tego cylindra niech ma trzy palce. Wypukłą część cylindra ukształtujmy stosownie do jego części wydrążonej. Wszystkie linie długości tego cylindra niech będą prostopadłe do obydwu podstaw. Wysokość łuku niech będzie mniejsza niż połowa jednego palca. To zwierciadło bardzo dobrze wypolerowane w jego wypukłej części przymocujmy do jednej z listew, podobnej do wcześniejszych listew tak, aby jego punkt środkowy znalazł się w punkcie środkowym listwy, to jest w punkcie Z, w taki sposób, aby linia długości dzieląca wypukłą powierzchnię zwierciadła na równe części, znalazła się na powierzchni listwy. Przymocujmy zwierciadło do tej listwy wzdłuż jej linii długości, którą jest linia PB. A to może zdarzyć się, jeśli łuki obydwu podstaw

zostaną podzielone na równe części, a oznaczone punkty środkowe zostaną umocowane na linii BP. Wtedy wstawmy listwę wraz ze zwierciadłem do tego przyrządu jak poprzednio i przeprowadźmy operację podobną do poprzedniej. Zostanie dowiedzione, jak powyżej, że kąty padania i odbicia są równe i nie ma żadnej różnicy w zjawisku [odbicia] w przypadku zwierciadeł płaskich i tych zwierciadeł, z wyjątkiem takiego przypadku: jeżeli ta listwa będzie ustawiona ukośnie w prawą bądź lewą stronę, gdy promień pada przez otwór środkowy, to wtedy okaże się, że światło odbija się do tego samego środkowego otworu i środkowa część [plamy] światła do środkowej części otworu¹, a to światło odbija się [pod kątem]² od pozostałych zwierciadeł, dlatego że na zwierciadłach cylindrycznych promień padając prostopadłe na jedną linię długości, pada również prostopadłe na każdą z pozostałych linii położonych naprzeciw siebie. Z tego powodu na tych wszystkich zwierciadłach odbicie jest jednakowe i zawsze promień prostopadły odbija się po tej samej drodze. Wynika więc to, co zakładano.

15. Gdy promień pada na zwierciadła stożkowe wypukłe i odbija się, to zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia (Euc. Catopt. 1; Alh. IV,12).

Weźmy zwierciadło stożkowe zrobione z czystego żelaza, którego podstawa niech będzie równa podstawie zwierciadła cylindrycznego. Cięciwa tej podstawy będzie więc miała długość trzech palców, a wysokość łuku będzie mniejsza od połowy jednego palca. Niech linia długości zwierciadła wynosi cztery i pół palca. Część zewnętrzną bardzo starannie wypolerowaną umocujmy do jednej z tych do siebie podobnych listew w taki sposób wydrążonej, aby punkt środkowy zwierciadła znalazł się w punkcie Z, który jest punktem środkowym listwy, a jego wierzchołek był na końcu linii BP. Linia dzieląca część stożkową na równe części, tzn. ta linia, która została poprowadzona przez wierzchołek stożka do punktu środkowego na łuku podstawy, niech się znajdzie na powierzchni listwy. Również po wstawieniu listwy wraz ze zwierciadłem do przyrządu, przeprowadźmy czynności jak poprzednio. Zachodzą tutaj te wszystkie zjawiska, które wystąpiły w przypadku zwierciadeł cylindrycznych wypukłych. Jest więc i w przypadku tych zwierciadeł kąt padania równy kątowi odbicia, a promień prostopadły zawsze odbija się po tej samej drodze, jak to okazało się w poprzednich twierdzeniach. Wynika więc to, co zakładano.

16. Gdy promień pada na zwierciadła cylindryczne wklęsłe i odbija się, to zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia (Euc. Catopt. 1; Alh. IV,12).

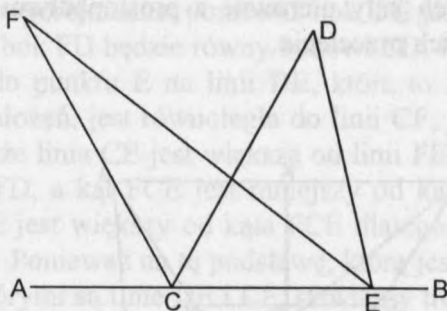
Weźmy zwierciadło żelazne cylindryczne wklęsłe. Wysokość jego łuku niech będzie dokładnie równa wypukłości poprzedniego zwierciadła cylindrycznego. Wewnętrzna wklęsła strona łuku części podstawy niech będzie bardzo dokładnie wypolerowana. To zwierciadło umocujemy na jednej z tych samych listew, wydrążonej jak poprzednio w taki sposób, aby cięciwy łuku jednej i drugiej podstawy wraz z końcami [odpowiadających im] linii długości znajdowały się na powierzchni listwy. Dokonajmy tej czynności, jak poprzednio. Zdarzy się to wszystko, co zdarzyło się na zwierciadłach cylindrycznych wypukłych. I z tego powodu wynika to, co zakładano.

17. Gdy promień pada na zwierciadła stożkowe wklęsłe i odbija się, to zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia (Euc. Catopt. 1; Alh. IV,12).

Weźmy żelazne zwierciadło stożkowe wklęsłe, którego wysokość łuku niech będzie dokładnie równa wypukłości wspomnianego wcześniej zwierciadła stożkowego wypukłego. Wypolerujemy je wewnątrz. Przy mocujemy to zwierciadło do jednej z takich samych listew w ten sposób, aby jego punkt środkowy pokrywał się z punktem Z, a jego wierzchołek znajdował się wprost na linii BP, zaś cięciwa łuku tej podstawy była na powierzchni listwy. Ponieważ linia długości części zwierciadła stożkowego ma długość czterech i pół palca, pozostaje z długości listwy jeden i pół palca zarówno dla zwierciadła wklęsłego, jak i wypukłego. Wsunąwszy listwę wraz z zwierciadłem do przyrządu, wykonajmy te czynności co poprzednio. Zdarzy się to wszystko, co zdarzyło się w przypadku zwierciadeł stożkowych wypukłych podczas odbicia promieni padających ukośnie pod równymi kątami i podczas odbicia promieni prostopadłych, które odbijają się po tej samej drodze. Wynika więc to, co zakładano.

Z poprzednich twierdzeń wynika, że w każdym odbiciu od dowolnych zwierciadeł regularnych wypolerowanych (jest siedem tych zwierciadeł) zawsze promień padając prostopadle po linii prostej odbija się po tej samej linii prostopadłej, a promień padający ukośnie po linii prostej, odbija się po innej linii, ukośnej w taki jednak sposób, że kąt padania jest zawsze równy kątowi odbicia. Odkrywszy [tę zasadę] za pośrednictwem doświadczenia zmysłowego wspartego rozumowaniem, posłużmy się nią jako ogólnym stwierdzeniem w odniesieniu do wszystkich tych zwierciadeł. Chociaż to, co właśnie jest zasadą tego naukowego dzieła, zostało doświadczalnie udowodnione, to można jednak również dojść do takiego stwierdzenia za pomocą rozumowego dowodu. Dlatego my postaramy się tego starannie dowieść, na ile będzie to możliwe. Uznaliśmy, że z tego powodu należy przedstawić dwa następne twierdzenia.

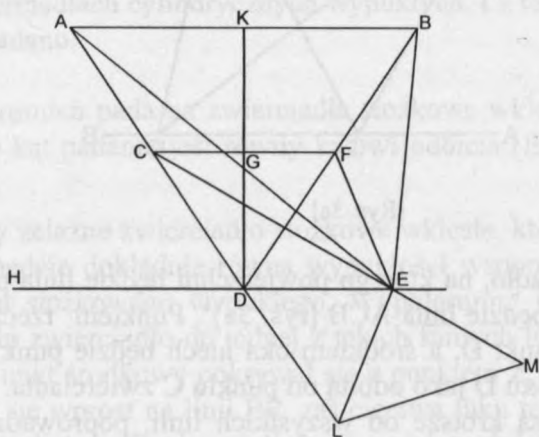
18. Każdą rzecz widzianą w świetle odbitym od dowolnego zwierciadła oko postrzega po najkrótszej linii (Ptol. Catopt. I,4).



[Rys. 3a]

Weźmy zwierciadło, na którego powierzchni będzie linia prosta albo krzywa, i niech to będzie linia ACB [rys. 3a]¹. Punktem rzeczy widzianej niech będzie punkt D , a środkiem oka niech będzie punkt F . Zobaczymy [formę] punktu D jako odbitą od punktu C zwierciadła. Twierdząc, że linie FC i DC są krótsze od wszystkich linii, poprowadzonych od punktów D i F do dowolnych innych punktów na zwierciadle². Poprowadźmy z jakiegoś punktu na powierzchni zwierciadła (niech to będzie punkt E) linie ED i EF , które nie będą krótsze niż linie CD i CF ani nie będą im równe, tylko od nich dłuższe. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 5 tej książki, natura we wszystkich tych sprawach działa po liniach krótszych, zaś rozprzestrzenianie się form do powierzchni zwierciadeł jest naturalne, bo zachodzi zgodnie z działaniem natury, podobnie jak każde inne rozprzestrzenianie się form, jak to wykazaliśmy w dziele pt. *Filozofia naturalna*, w rozdziale „Działanie naturalne”, to podobnie również zupełnie naturalną rzeczą jest odbicie form od powierzchni zwierciadeł do oka, ponieważ dzieje się tak z powodu działania natury. Dokońuje się to dzięki działaniu duszy, podobnie jak każde inne widzenie, jak to wynika z całej czwartej książki tego naszego naukowego dzieła. Dusza bowiem stanowi istotę żyjących stworzeń. Wynika więc, że to rozprzestrzenianie się formy oraz jej odbicie i postrzeganie, które zachodzi dzięki rozprzestrzenianiu się, jest zupełnie naturalne, a zatem będzie zachodziło po liniach krótszych, co jest zgodne z założeniem. Bez powodu więc zachodziłoby po liniach dłuższych, skoro może lepiej i pewniej zachodzić po liniach krótszych.

19. Linie padania i odbicia, tworząc kąty równe z linią prostopadłą do powierzchni zwierciadła płaskiego bądź wypukłego, poprowadzoną przez punkt ich przecięcia, są krótsze od wszystkich [innych] linii, poprowadzonych przez ich końce do tej samej powierzchni zwierciadła, tworzących kąty nierówne z prostopadłymi przeprowadzonymi przez punkty ich przecięcia.



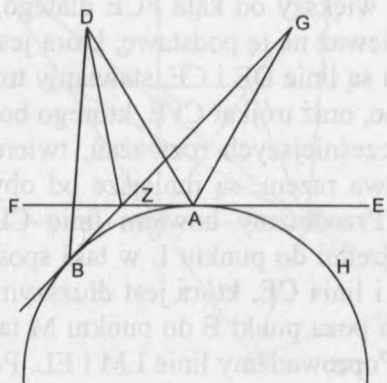
[Rys. 4]

To, co tutaj się zakłada, łatwo można dowieść za pomocą twierdzenia I,17 i I,18 tego dzieła. Ponieważ tego samego można dowieść także w inny sposób, to weźmy dowolną rzecz widzianą, na której niech będzie punkt C [rys. 4]¹. Weźmy zwierciadło płaskie, na powierzchni którego niech będzie linia HDE. Teraz dla przykładu weźmy to zwierciadło płaskie: linia HDE będzie więc linią prostą. Liniami tworzącymi kąty równe z linią HDE niech będą linie CD i DF. Środek oka będzie więc właśnie na linii równoległej do linii HDE, na której jest punkt rzeczy widzianej C albo na niej nie będzie. Jeśli będzie [na tej linii], to środek oka oznaczmy przez F. Poprowadźmy linię CF. Wykreślmy, zgodnie z EE XI,12, z punktu D prostopadłą do powierzchni zwierciadła. A ta linia, po jej przedłużeniu, ponieważ przecina kąt CDF, jak to wynika z twierdzeniem I,29 tego dzieła, przetnie linię CF, bo leży na tej samej płaszczyźnie co linia CF. Wobec tego tą prostopadłą poprowadzoną do linii CF niech będzie linia DG; stąd linia DG będzie, zgodnie z EE I,29, prostopadłą do linii CF, równoległą do linii DE. Ponieważ kąt CDH jest równy kątowi FDE, to po odcięciu tych równych kątów od dwóch kątów prostych, którymi są kąty GDH i GDE, pozostałe kąty będą równe. Kąt CDG jest więc

równy kątowni GDF. Ponieważ dwa kąty w trójkątach CDG i FDG, które mają wierzchołki w punkcie G, są równe, to z EE I,32, wynika w sposób oczywisty, że kąty DCG i DFG są równe, dlatego i trójkąty CDG i FDG są równokątne. Wobec tego, jak wynika z EE VI,4, boki odpowiadające kątom równym są proporcjonalne; ponieważ bok DG jest ten sam w obydwu trójkątach, to i bok FD będzie równy bokowi CD. Po przeprowadzeniu linii FE i CE do punktu E na linii DE, która to linia, jak wynika z wcześniejszych założeń, jest równoległa do linii CF, jest oczywiste na podstawie EE I,19, że linia CE jest większa od linii FE, bo kąt CFE jest większy od kąta GFD, a kąt FCE jest mniejszy od kąta GCD. Wynika więc to, że kąt CFE jest większy od kąta FCE dlatego, że linia CE jest większa od linii FE. Ponieważ na tę podstawę, którą jest CF, i pomiędzy linie równoległe, którymi są linie DE i CF, stawiamy trójkąt CFD, którego boki CD i DF są równe, oraz trójkąt CFE, którego boki CE i FE nie są równe, jak wynika z wcześniejszych rozważań, twierdzę, że boki CD i DF, wzięwszy je obydwie razem, są mniejsze od obydwu boków CE i FE, wziętych razem. Przedłużmy bowiem linię CD poza punkt D w sposób ciągły i bezpośredni do punktu L w taki sposób, aby linia DL była równa linii DF, ale i linia CE, która jest dłuższym bokiem trójkąta CFE, została przedłużona poza punkt E do punktu M tak, żeby linia EM stała się równa linii EF. Poprowadźmy linie LM i EL. Ponieważ, zgodnie z EE I,29, kąt FDE jest równy kątowni DFC, a kąt DFC jest równy kątowni DCF, jak to wynika z wcześniejszych rozważań, to wobec tego kąt FDE będzie równy kątowni EDL, zaś linia DL jest równa linii DF, a linia DE jest wspólna do obydwu trójkątów, którymi są FDE i EDL. Wobec tego, zgodnie z EE I,4, linia FE jest równa linii LE, a zatem również linii EM. W rezultacie, jak wynika z EE I,5, kąty ELM i EML są równe; stąd cały kąt CLM jest większy od kąta CML. Zgodnie z EE I,19, linia CM jest więc większa od linii CL. Wobec tego dwa boki CE i EF razem połączone są dłuższe od dwóch boków CD i DF razem połączonych. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Jeśli natomiast oko i rzecz widziana nie znajdują się na tej samej linii równoległej do linii HE, to punkt rzeczy widzianej oznaczmy jak poprzednio przez C, a środkiem oka niech będzie punkt B [patrz rys. 4]. Poprowadźmy linię BA równoległą do linii HDE, która jest na powierzchni zwierciadła. Przedłużmy linię DC do punktu A i poprowadźmy linie CD, BD, CE, AE, EB. Niech liniami, tworzącymi kąty równe z linią DE, będą linie CD i DB, a nierówne kąty niech utworzą linie CE i BE. Linie AD i BD będą więc, jak powyżej, liniami równymi. Po przeprowadzeniu prostopadłej DK poprzez punkt D^2 i po porównaniu trójkąta ADB z trójkątem AEB [okazuje się, że] linie AD i BD będą mniejsze niż linie AE i EB, jak to wynika w wcześniejszych rozważań. Ponieważ, zgodnie

z EE VI,2 i V,18 oraz wnioskiem z EE V,4³, linie AD i DB są równe, dlatego że linie CD i DF są równe, a linie AE i BE nie są równe, to dwa boki AE i BE razem wzięte będą większe od dwóch boków AD i DB razem wziętych. Wobec tego, zgodnie z EE I,20, gdy dwa boki AC i CE trójkąta ACE są dłuższe od boku AE, to trzy linie AC, CE i EB będą dłuższe od dwóch linii, którymi są linie AD i DB. Dlatego, gdy odejmiemy od jednej i drugiej [sumy linii] linię AC, która jest wspólna, pozostałe linie CE i EB będą większe niż linie CD i DB. A to jest przedmiotem twierdzenia.



[Rys. 5]

W ten sam sposób można przeprowadzić dowód także dla dowolnych innych zwierciadeł wypukłych. Weźmy więc, według uznania, zwierciadło nie płaskie o dowolnym wypukłym kształcie. Dla przykładu niech to będzie teraz zwierciadło wypukłe kuliste HAB, ponieważ to samo zachodzi również w innych zwierciadłach. Środkiem oka niech będzie [punkt] G, zaś punktem widzianym D [rys. 5]⁴. Niech linie GA i DA utworzą kąty równe z linią styczną do koła w punkcie A, którą jest linia EF, w taki sposób, aby kąt EAG był równy kątowi FAD. Niech linie GB i DB padają w inny punkt zwierciadła, którym jest punkt B, w taki sposób, aby utworzyły kąty nierówne z linią styczną do zwierciadła w punkcie B. Twierdzę, że linie GA i AD [razem wzięte] są mniejsze od linii GB i DB [razem wziętych]. Ponieważ kąt styczności, którym jest kąt HAE, jest równy kątowi BAF, bo jeden i drugi, zgodnie z EE III,16⁵, jest najmniejszy z kątów ostrych, a kąt EAG jest równy kątowi FAD, to punktem, w którym linia GB przecina linię styczną, którą jest linia EF, niech będzie punkt Z. Poprowadźmy linię DZ. Z EE I,16 wynika, że kąt EAG jest większy od kąta EZG, a więc kąt DAZ jest większy od kąta GZA. Ale kąt DZF jest większy od kąta DAZ. Wobec tego kąt FZD jest większy od

kąta GZA. Zgodnie z twierdzeniem I,17 tego dzieła, dwie linie GA i DA [razem wzięte] są zatem mniejsze od dwóch linii GZ i DZ [razem wziętych], ale linie GZ i DZ [razem wzięte] są jednak mniejsze od linii GB oraz DB [razem wziętych], ponieważ linia GB jest większa niż linia GZ, jak całość jest większa od części, a zgodnie z EE III,8, linia DB jest większa niż linia DZ. Wynika więc to, co założono ogólnie dla powierzchni dowolnych zwierciadeł wypukłych. Tego samego, jak wspomnieliśmy powyżej, łatwiej można dowieść na podstawie twierdzenia I,17 albo I,18 tego dzieła, ponieważ w nich wykazaliśmy, że linie proste tworzące kąty równe z linią, na którą padają w jednym punkcie, są krótsze do wszystkich linii, poprowadzonych przez ich końce do jednego innego punktu tej samej linii. I to założyliśmy dla linii prostych w twierdzeniu I,17 tego dzieła oraz dla linii wypukłych w twierdzeniu 18 tej samej księgi pierwszej.

20. W każdym odbiciu zachodzącym od dowolnych zwierciadeł zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia. Z tego wynika, że nierówność linii [padania i odbicia] nie zmienia natury odbicia (Euc. Catopt. 1; Ptol. Catopt. I,4,5; Alh. IV,10,18).

Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 18 tej księgi, każda rzecz widziana w dowolnym zwierciadle płaskim albo wypukłym, albo wklęsłym, spostrzegana jest po liniach najkrótszych, to linie, poprowadzone od tych punktów, tj. z punktu rzeczy widzianej i od środka oka, do powierzchni dowolnego zwierciadła, są najkrótsze, gdy tworzą kąty równe z liniami stycznymi do powierzchni zwierciadeł oraz liniami prostopadłymi, poprowadzonymi od punktów swojego przecięcia do powierzchni zwierciadeł, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia. Kąt zaś, który tworzy linia, poprowadzona z punktu rzeczy widzianej, jest kątem padania, a kąt, który tworzy linia, poprowadzona od tego punktu, [na który pada linia padania], do środka oka, jest kątem odbicia. Wynika więc, że kąt padania jest zawsze równy kątowi odbicia, niezależnie od tego, od jakiego zwierciadła, płaskiego czy wypukłego, zachodzi odbicie. Ale to samo odnosi się również do dowolnych zwierciadeł wklęsłych.

Weźmy jakieś zwierciadło wypukłe, na którym niech będzie koło EBD [rys. 6], którego w punkcie B niech dotyka zewnętrzne koło ABC. Poprowadźmy z punktu B linię FBG, styczną do obydwu kół w punkcie B¹. Niech H będzie punktem rzeczy widzianej, którego forma odbija się do oka, znajdującego się w punkcie K, od punktu B zwierciadła wypukłego. Zgodnie z poprzednimi wywodami, kąt HBF będzie równy kątowi KBG, bo kąt ABF jest równy kątowi CBG zgodnie z EE III,16², ponieważ są to kąty styczności. Pozostaje więc kąt HBA, który jest kątem pa-



[Rys. 8]

Dla przykładu, przyjmijmy, że forma punktu A pada na powierzchnię zwierciadła BDC po linii AD prostopadłej do powierzchni BDC [rys. 8]. Twierdzę, że odbicie formy punktu A dokona się po tej samej linii DA. Przyjmijmy, że odbicie będzie zachodziło po innej linii [niż linia DA], podczas gdy, jak wynika z poprzedniego twierdzenia, kąt padania zawsze jest równy kątowi odbicia: przyjęliśmy, że kąt padania jest prosty, a nieskończona [liczba] kątów prostych układa się [wierzchołkami] w punkcie D i forma niech się nie odchyła więcej do jednego [danego] punktu na powierzchni BC niż do jakiegoś innego punktu. W ten sam sposób zachowuje się bowiem linia AD (która jest linią padania) w stosunku do punktu B i do punktu C i do wszystkich pozostałych punktów na powierzchni BC. Z tego powodu będzie więc nieskończona [liczba] odbić od nieskończonej liczby punktów na powierzchni BC, ponieważ w jaki sposób zachodzi odbicie do jednego miejsca, w taki sam sposób zachodzi i do każdego innego; a to jest niedorzeczne. Będziemy musieli więc przyjąć, że odbicie zachodzi po jednej i tej samej linii AD, po której zachodzi padanie. Wobec tego [formy] padające prostopadłe albo nie odbijają się, albo [odbijają się] i powracają po tej samej drodze i działanie takich form się wzmacnia. Jeśli jednak powiemy, że [forma] padając prostopadłe odbija się po innej linii, to niech stanie się, że odbije się ona po linii DE. Wtedy więc, skoro kąt padania, co wynikało z wcześniejszego twierdzenia, jest zawsze równy kątowi odbicia, to kąt ADC będzie równy kątowi ADE; ale kąt ADC jest równy kątowi ADB, zgodnie z założeniem. Wobec tego kąt ADE byłby równy kątowi ADB, ponieważ jest częścią swojej całości, co jest niemożliwe. Wynika więc to, co zakładano.

22. Pomiedzy punktami formy padającej na powierzchnię dowolnego zwierciadła i powierzchnią zwierciadła ustawionego naprzeciwko

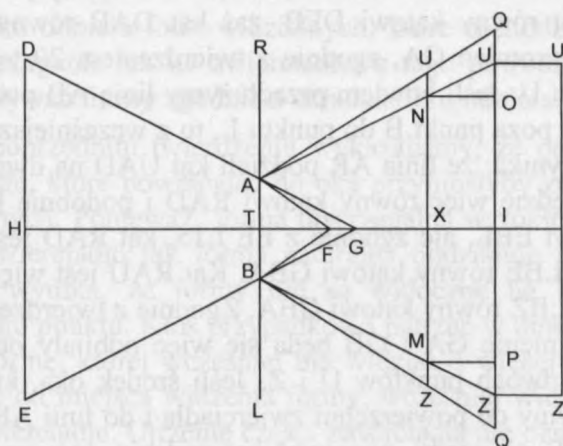
może się ukształtować nieskończona [liczba] stożków, które mają podstawy i wierzchołki na powierzchni formy i odpowiednio na powierzchni zwierciadła (Alh. IV,14).

W twierdzeniu 1 tej księgi wykazano, że z każdego punktu przedmiotu ustawionego naprzeciw [zwierciadła] światło albo barwa przechodzi do każdego punktu zwierciadła. Wszystkie bowiem linie poprowadzone przez dowolny punkt przedmiotu padają w jeden punkt zwierciadła, a forma jednego punktu przedmiotu pada na wszystkie punkty powierzchni całego zwierciadła dzięki temu, że formy rozprzestrzeniają się w każdym kierunku. Cała więc forma przedmiotu będzie na każdym punkcie zwierciadła, a forma każdego punktu przedmiotu na całej powierzchni zwierciadła. Tyle jest więc punktów na powierzchni zwierciadła, ile jest stożków ograniczonych całą powierzchnią formy przedmiotu, która to powierzchnia jest podstawą wszystkich tych stożków, a ile jest punktów na całej powierzchni przedmiotu, którego forma pada na zwierciadło, tyle jest stożków ograniczonych całą powierzchnią zwierciadła, która jest podstawą wszystkich tych stożków. I wszystkie te stożki są ciągle z powodu ciągłości punktów, znajdujących się potencjalnie, a nie w rzeczywistości na wspomnianych powierzchniach. Oś każdego z tych stożków, która pada w punkt na zwierciadle, będzie punktem środkowym całej formy padającej na zwierciadło, ponieważ od tego punktu w równej odległości padają wszystkie pozostałe punkty znajdujące się wokoło w równej odległości od punktu środkowego formy. Wynika więc to, co zakładano.

23. Nie można zobaczyć obrazów na zwierciadłach w wyniku odbicia promieni widzialnych od zwierciadeł do rzeczy widzianych, a jedynie dzięki odbiciu form od zwierciadeł do oka (Alh. IV,20).

Jeżeli promienie widzialne będą się odbijały od zwierciadła do rzeczy, których obrazy uchwyci oko, i promienie przeniosą te formy od zwierciadeł do oka, to wtedy zobaczymy każdy obraz w miejscu tej rzeczy, której jest obrazem. A to jest przeciwne doświadczeniu zmysłowemu. Ponieważ, jak to zostało wykazane w twierdzeniu 2 tej księgi, w obecności światła każdy zabarwiony przedmiot wysyła do przedmiotu wypolerowanego położonego naprzeciw barwę zmieszaną ze światłem, to niekiedy w całości, a niekiedy częściowo odbija się ona od tego przedmiotu wypolerowanego. Jeśli promienie widzialne padające na zwierciadła będą się odbijały od nich do tych rzeczy i przenosiły ze sobą formy, to może się zdarzyć, że zobaczymy dwa obrazy dowolnej rzeczy, z których jeden przenosi do oka ten odbity promień widzialny, a ten drugi obraz formy rzeczy przenosi promień padający na zwierciadło, na któ-

rym odciskają się formy rzeczy, odbite od zwierciadła do oka. To w całości jest niedostrzegalne dla oka.



[Rys. 9]

Ale ktoś ze starożytnych¹ przeprowadził dowód przeciw tym wywodom. Ten dowód również i my zastosowaliśmy do obecnego twierdzenia, aby w sposób bezstronny bardziej je wzmocnić. Dla przykładu weźmy zwierciadło płaskie ustawione prostopadle do płaszczyzny horyzontu. Na zwierciadle niech będzie linia dzieląca płaszczyznę zwierciadła na równe części; i niech to będzie linia AB [rys. 9]². Środkiem oka niech będzie punkt G, przez który poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, linię GT prostopadłą do płaszczyzny zwierciadła. Niech będzie tak, aby linia GT padała na linię AB w punkcie T. Linia GT będzie więc prostopadła do linii AB. Poprowadźmy przez punkt G równe linie GA i GB. Zgodnie z EE I,5, kąty GAB i GBA będą więc równe, a kąty [o wierzchołkach] w punkcie T są proste. Wobec tego, jak wynika z EE I,26 i założenia, linia AT będzie równa linii BT. Przedłużmy również linie GA i GB poza zwierciadło do punktów D i E w ten sposób, aby linie GAD i GBE były równe. Wykreślmy linię DE. Przedłużmy linię GT do linii DE i niech ona pada na tę linię w punkcie H. Zgodnie z wcześniejszymi wywodami i EE I,26, linia DH będzie równa linii HE. Wobec tego, zgodnie z EE I,8 oraz definicją prostopadłej, kąty [o wierzchołkach] w punkcie H są proste, i jak wynika z EE I,28, linie DH i AT są równoległe i linie HE i TB są także równoległe. Przedłużmy linię TG poza [punkt] G [środek] oka tak, aby linia TI była równa linii TH. Poprowadźmy przez punkt I linie IU oraz IZ równoległe do linii AB. Linia UZ niech będzie równa linii DE. Poprowadźmy linie UA i ZB. Ponieważ linia TI jest równa linii TH, oraz linia UZ równa linii DE, zaś linia AB jest równa sobie samej, wobec tego

powierzchnia ABZU będzie równa powierzchni ABDE. Po nałożeniu ich na siebie jedna nie będzie wystawała poza drugą. Linia UA jest więc równa linii AD, linia ZB równa linii BE, a kąt AUZ równy jest kątowi ADE, kąt UZB jest równy kątowi DEB, zaś kąt DAB równy kątowi UAB. Wobec tego promień GA, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, odbije się do punktu U. Jeśli bowiem przedłużymy linię AB poza punkt A do punktu R oraz poza punkt B do punktu L, to z wcześniejszych wywodów i EE I,13 wynika, że linia AR podzieli kąt UAD na dwie równe części. Kąt RAU będzie więc równy kątowi RAD i podobnie kąt ZBL będzie równy kątowi EBL, ale zgodnie z EE I,15, kąt RAD jest równy kątowi GAB, a kąt LBE równy kątowi GBA. Kąt RAU jest więc równy kątowi GAB, a kąt LBZ równy kątowi GBA. Zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, dwa promienie GA i GB będą się więc odbijały od dwóch punktów A i B do dwóch punktów U i Z. Jeśli środek oka, który jest w punkcie G, zbliżymy do powierzchni zwierciadła i do linii AB tak, że dojdzie do punktu F, to wtedy, ponieważ kąt padania, którym jest kąt FAT, jest mniejszy od kąta padania, którym jest kąt GAT, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, kąt odbicia, którym jest kąt QAR, będzie mniejszy od poprzedniego kąta odbicia, którym jest kąt UAR, a kąt QAR będzie większy od kąta UAG, zaś linia QI będzie większa od linii UI. Kiedy więc oko będziemy zbliżali do powierzchni zwierciadła, nie zobaczymy punktów skrajnych rzeczy wcześniej widzianej, którymi są punkty U i Z, w punktach skrajnych zwierciadła, którymi są punkty A i B. Jeśli jednak oko pozostanie w punkcie G, a linia UZ przybliży się do zwierciadła aż do punktu X (który jest na linii IH), nie zobaczymy punktów skrajnych linii UZ, którymi są punkty U i Z, ale tylko jakieś na niej punkty, w których promień widzialny GA odbity od powierzchni zwierciadła przecina linię UZ; i niech to będą punkty M i N. Linia MN będzie bowiem mniejsza niż linia UZ. A to wynika z EE I,34 po przeprowadzeniu linii równoległych i prostopadłych, którymi niech będą linie NO oraz MP. Jeśli linia UZ zostanie odsunięta od powierzchni zwierciadła, żadnego z jej punktów nie zobaczymy wzdłuż promieni AU i BZ, ponieważ pozostałe promienie widzialne nie odbijają się od punktów skrajnych tego zwierciadła [a są to punkty A i B] do jakiegoś punktu na linii UZ, ale poza nimi. A to wynika z EE I,34, jeśli wykreślimy linie równoległe, którymi niech będą linie UU i ZZ. W takiej sytuacji nie zobaczymy na zwierciadle żadnego punktu na linii UZ; a to jest wbrew doświadczeniu oraz zmysłom. Zdarza się bowiem, że punkty skrajne rzeczy zbliżanej do zwierciadła i oddalanej od niego niekiedy są widoczne, jak to założyliśmy na początku tej księgi. I jak to jest oczywiste w przypadku zwierciadeł płaskich, podobnie jest to widoczne również w przypadku innych dowolnych zwierciadeł, ponieważ ten dowód odnosi się do wszystkich

zwierciadeł. Wynika więc to, co zakładano albo przynajmniej z tego nie wynika twierdzenie temu przeciwne.

24. Tylko odbicie form widzialnych, które zachodzi do oka, powoduje postrzeganie ich na zwierciadle; z tego powodu na oko muszą oddziaływać formy zgodnie z układem linii odbicia (Alh. IV,21).

W poprzednim twierdzeniu wykazaliśmy, że od oka nie wychodzą promienie, które powracając do oka przyniosłyby ze sobą formy rzeczy widzialnych. Ponieważ forma dostrzegalna wzrokiem nie oddziałuje na samo zwierciadło jak forma naturalna oddziałuje na samą materię, to z tego wynika, że formy nie są widoczne na każdym zwierciadle z każdego punktu. Ktoś przypadkowo patrząc w umocowane zwierciadło widzi formę, której wcześniej nie widział, i więcej jej nie zobaczy odchodząc od miejsca widzenia formy, wcześniej widzianej na umocowanym zwierciadle. Ujrzenie części zwierciadła nie oznacza, że zobaczymy część form ukazujących się na zwierciadle. Inni obserwatorzy mogą w tym samym punkcie zwierciadła zobaczyć różne i oddzielne formy, które jednak nie będą mogły równocześnie ukształtować się na tej samej części zwierciadła, skoro pewne działania są ograniczone. Na zwierciadłach widoczna jest także forma rzeczy, która nie może się rozprzestrzeniać do oka po linii prostej; również wiele innych rzeczy się zdarza, które w końcu są wyjaśnione, chociaż dowodzi to, że nie można wielu rzeczy [wyjaśnić]. Oczywiście jest również, że formy nie wychodzą od zwierciadła, jak gdyby znajdowały się na zwierciadle i rozprzestrzeniały się do oka, ale formy padają na zwierciadło od rzeczy obdarzonych formami i odbijają się od zwierciadeł do oka. Na oko musi więc oddziaływać układ linii odbicia. Niekiedy oko rzeczywiście nie widzi innej rzeczy, jeśli nie postrzega jej formy odbitej od zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano.

25. Podczas każdego odbicia, zachodzącego od dowolnego zwierciadła, płaszczyzna odbicia musi być prostopadła do powierzchni tego zwierciadła bądź do płaszczyzny stycznej do tego zwierciadła w punkcie odbicia (Alh. IV,13).

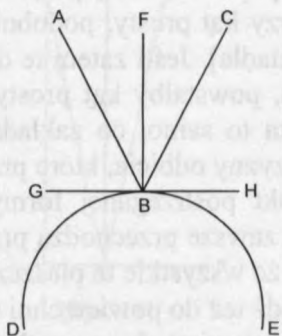
Jeżeli bowiem światło bądź forma pada na dowolne zwierciadło po linii prostopadłej, to, zgodnie z twierdzeniem 21 tej książki, odbija się ona po tej samej linii. Wtedy jest oczywiste, że padanie i odbicie zachodzi po tej samej linii, a płaszczyzna odbicia, zgodnie z EE XI,18, musi być prostopadła do powierzchni tego zwierciadła. Jeśli natomiast światło albo forma pada po liniach ukośnych na powierzchnię dowolnego zwierciadła, to wtedy zawsze kąty padania i odbicia będą na tej samej płaszczyźnie

odbicia, jak to wynika z ich definicji. Ale na tej samej płaszczyźnie znajdują się również linia prostopadła do powierzchni zwierciadła oraz linie padania i odbicia, które tworzą wspomniane kąty z linią, będącą wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, jak to wynika z definicji płaszczyzny odbicia¹. Zgodnie z EE XI,18, ta płaszczyzna jest więc prostopadła do powierzchni zwierciadła bądź do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie odbicia. I to widać przykładowo na powierzchni koła przecinającego pierścień przyrządu, przedstawionego w twierdzeniu 9 tej księgi, równoległe do podstaw [pierścienia] poprzez wszystkie środki otworów. To koło jest równoległe do powierzchni koła spizowego, które oznaczamy jako ABC^2 . Bo kiedy promień pada przez środkowy otwór i listwa ze zwierciadłem jest odchylna, ma zastosowanie to samo dowodzenie, które odnosi się do promieni padających ukośnie. Wtedy bowiem promień zawsze odbija się do linii długości pierścienia, która nie jest równoległa do linii BZP, będącej linią długości listwy, chociaż wówczas zachodzi odbicie z punktu Z. Na ten punkt pada oś walca okrągłego bądź promienia prostopadłe do linii CQ, która jest wspólnym przecięciem powierzchni listwy i powierzchni koła przechodzącego przez środki otworów, a do tej osi równoległa jest linia DB, pół średnica koła ABC; te linie znajdują się więc na tej płaszczyźnie, zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła. Ale linia DB jest prostopadła do linii długości listwy, która jest wspólnym przecięciem powierzchni listwy i koła ABC. Wobec tego, zgodnie z definicją płaszczyzny prostopadłej do powierzchni, powierzchnia, na której znajdują się oś żelaznego walca bądź promienia padającego oraz linia DB, jest prostopadła do powierzchni listwy bądź zwierciadła. Na tej powierzchni leży linia prostopadła, która jest linią wysokości pierścienia, przechodzącą przez punkt B i przez środek środkowego otworu, po której to linii zachodzi odbicie światła [padającego wzdłuż] osi stożka promieniowego. Wynika więc to, co zakładano w odniesieniu do dowolnego zwierciadła, ponieważ, jak wynika z poprzednich wywodów, do każdego zwierciadła stosuje się ten dowód.

26. Przy każdym odbiciu od powierzchni dowolnego zwierciadła linia, dzieląca na równe części kąt utworzony przez linie padania i odbicia, musi być prostopadła do linii, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła bądź płaszczyzny stycznej do powierzchni zwierciadła w punkcie padania. Z tego wynika, że ta linia została poprowadzona do płaszczyzny w tym punkcie, w którym jest ona styczna do zwierciadła.

Niech będzie tak, aby forma punktu A padała na powierzchnię jakiegoś zwierciadła w punkcie B [rys. 10]. Niech się ona odbije do punktu C.

Linia padania jest linia AB, a linia odbicia linia BC, które znajdują się na jednej płaszczyźnie, poprowadzonej do powierzchni zwierciadła, zgodnie z poprzednim twierdzeniem. Niech jakaś płaszczyzna będzie styczna do powierzchni zwierciadła w punkcie B. Wspólnym przecięciem tej powierzchni [zwierciadła] i płaszczyzny odbicia niech będzie linia DBE. Niech linia BF podzieli kąt ABC na równe części. Twierdzę, że linia FB musi być prostopadła do linii DBE. Ponieważ kąt DBA jest równy kątowi EBC na podstawie twierdzenia 20 tej księgi, bo kąt padania DBA jest równy kątowi odbicia, którym jest kąt EBC, i ponieważ z założenia kąt ABF jest równy kątowi FBC, jest oczywiste, że cały kąt FBD jest równy całemu kątowi FBE. Linia FB, na podstawie definicji linii prostopadłej, jest więc prostopadła do linii DE. Tak jest, jeśli linia DBE będzie prosta, jeśli natomiast ta linia będzie krzywa, to linia prosta GH będzie do niej styczna w punkcie B, zgodnie z EE III, 17¹. Ponieważ kąty styczności GBD i HBE są równe, wynika stąd, że kąty FBG i FBH są równe. Również linia FB będzie prostopadła do linii GH i do linii DE. Ponieważ linia FB została poprowadzona na płaszczyźnie odbicia, która, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, jest prostopadła do powierzchni zwierciadła bądź do płaszczyzny, która jest styczna do zwierciadła w punkcie padania, i ponieważ jest ona prostopadła do ich wspólnego przecięcia, jest oczywiste, że linia FB jest prostopadła do płaszczyzny, która jest styczna do zwierciadła w tym punkcie, bo z wszystkimi liniami poprowadzonymi na tej płaszczyźnie tworzy kąty proste. Ponieważ w ten sam sposób można przeprowadzić dowód dla innych części [zwierciadła], wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 10]

27. Na każdej płaszczyźnie odbicia od dowolnych zwierciadeł musi się znajdować środek oka, punkt widzianej formy, punkt odbicia, punkt końcowy prostopadłej [do powierzchni zwierciadła] oraz jednej i dru-

giej prostopadłej¹. Z tego wynika, że linia prostopadła, poprowadzona przez punkt odbicia, jest wspólna dla wszystkich płaszczyzn odbicia, przechodzących przez ten punkt (Alh. IV, 23).

W twierdzeniu 25 tej księgi wykazaliśmy, że przy każdym odbiciu, zachodzącym od dowolnego zwierciadła, zawsze płaszczyzna odbicia (na której znajdują się linie odbicia i padania oraz prostopadła poprowadzona przez punkt odbicia do powierzchni zwierciadła) jest prostopadła do powierzchni zwierciadła, od którego zachodzi odbicie. Ponieważ linia padania zaczyna się w punkcie postrzeganej formy, a kończy się w punkcie odbicia, zaś linia odbicia zaczyna się w punkcie odbicia, a kończy się w środku oka, jest rzeczą oczywistą, że te trzy punkty znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Skoro ta prostopadła została poprowadzona prostopadle do powierzchni zwierciadła, do której, zgodnie z twierdzeniem 25 tej księgi, prostopadła jest płaszczyzna odbicia, gdyż właśnie na tej płaszczyźnie znajduje się cała prostopadła, i skoro sama prostopadła w punkcie odbicia przecina linie padania i odbicia, z którymi, jak to wynika z samej definicji, leży na tej samej płaszczyźnie, wobec tego, zgodnie z EE XI, 1, punkt krańcowy prostopadłej wyżej położony musi znajdować się na tej samej płaszczyźnie co wcześniej wspomniane punkty. Jeżeli bowiem ta prostopadła będzie się kończyła w innym punkcie poza płaszczyzną odbicia, to jest oczywiste, że ta prostopadła będzie leżała na innej płaszczyźnie, co jest sprzeczne z definicją płaszczyzny odbicia. Podobnie, jeśli znajdzie się na innej płaszczyźnie, powstałby kąt prosty mniejszy od prostego, co jest niemożliwe. Bowiem linia poprowadzona przez punkt odbicia na płaszczyźnie odbicia, prostopadła do powierzchni zwierciadła, wraz z linią poprowadzoną przez ten sam punkt na powierzchni zwierciadła tworzy kąt prosty; podobnie jest z linią prostopadłą [do powierzchni zwierciadła]. Jeśli zatem te dwie linie będą się kończyły w różnych punktach, powstałby kąt prosty większy od prostego. Ale z tego dowodu wynika to samo, co zakładano dla prostopadłych. Ponieważ wszystkie płaszczyzny odbicia, które przechodzą przez ten sam punkt odbicia i jakiś punkt postrzeganej formy (choćby kończą się w różnych środkach oczu), zawsze przechodzą przez ten sam punkt końcowy prostopadłej, dlatego że wszystkie te płaszczyzny są prostopadłe do powierzchni zwierciadła bądź też do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie odbicia, to jest oczywiste, że wszystkie przecinają się na prostopadłej. A zatem prostopadła jest wspólna dla nich wszystkich. A tego można dowieść za pomocą rysunku.

Weźmy powierzchnię dowolnego zwierciadła ACB, na którą w jej punkt C po linii FC pada promień od punktu rzeczy widzianej, którym niech będzie punkt F. Ten promień niech odbija się po linii CE do środka oka, który oznaczmy jako punkt E. Poprowadźmy również, jak podano

w EE XI,11, prostopadłą od powierzchni zwierciadła (którą jest BCA) przez punkt C; niech będzie to linia CD [rys. 11]. Wyobraźmy sobie również, że przez punkt E prowadzimy, jak podano w EE XI,11, prostopadłą do powierzchni BCA albo do powierzchni, która jest jej przedłużeniem; niech to będzie linia EA. Linia EA będzie, jak wynika z EE XI,6, równoległa do linii DC, ponieważ obydwie te linie są prostopadłe do tej samej powierzchni zwierciadła, którą jest BA². Ponieważ linie DC i EA są równoległe, to z twierdzenia I,1 tego dzieła wynika, że znajdują się one na tej samej płaszczyźnie, a linia prosta AB z pozostałymi dwiema tymi liniami, tzn. DC i EA, utworzy kąt prosty i będzie, zgodnie z EE XI,2, na tej samej płaszczyźnie co te dwie linie, zaś linia EC utworzy z tymi liniami, którymi są EA i DC, kąty ostre w wyniku podziału kątów prostych. Ponieważ linia padania i odbicia wraz z prostopadłą DC znajdują się na tej samej płaszczyźnie, a linia prosta EC łączy punkty skrajne linii EA i DC, ona sama, zgodnie z EE XI,2, znajdzie się na tej samej płaszczyźnie co wspomniane prostopadłe. Wobec tego wszystkie linie, a są to linie: EA, EC, DC, FC, znajdują się na jednej i tej samej płaszczyźnie. Z tego powodu również cztery wspomniane wcześniej punkty leżą na tej samej płaszczyźnie odbicia. A to zakładano, ponieważ zawsze zachodzi to samo położenie linii promieniowych w stosunku do tych prostopadłych, chociaż patrzymy na jakiś inny punkt widzianego przedmiotu albo zwierciadła. Podobnie, zgodnie z EE XI,1, przedstawia się sytuacja w stosunku do obydwu prostopadłych, [prostopadłej] padania i odbicia. Wynika więc to, co zakładano. Z tego dowodu wynika wniosek w sposób dość oczywisty.

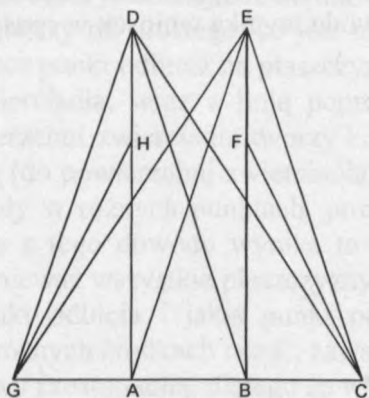


[Rys. 11]

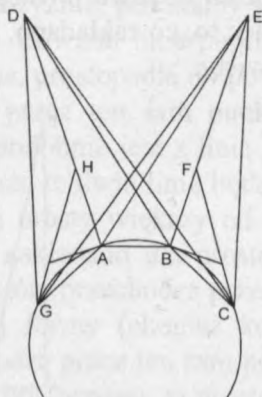
28. Każdy punkt odbicia formy punktu, padającej ukośnie na zwierciadło, musi się znajdować na powierzchni zwierciadła pomiędzy prostopadłą padania i prostopadłą odbicia.

Weźmy powierzchnię dowolnego zwierciadła. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie linia

ABC, prosta albo krzywa. Niech punkt D będzie punktem rzeczy widzianej, a punkt E środkiem oka [rys.12]¹. Niech prostą padania będzie [linia] DA, a prostą odbicia EB. Twierdzą, że każdy punkt odbicia formy punktu D do środka oka, [tj. do punktu] E, musi się znajdować między punktami A i B na powierzchni zwierciadła. Jeśli bowiem przyjmujemy, że w punktach A lub B zachodzi odbicie formy punktu D do oka E, to niech się stanie tak, aby odbicie zaszło od punktu na zwierciadle, którym jest punkt A. Poprowadźmy linię AE: skoro linia DA jest prostą, wtedy linia AE nie będzie prostą. Zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, kąt padania jest równy kątowi odbicia, a zatem kąt EAB będzie prosty; ale i kąt EBA jest prosty. Wobec tego w trójkącie EAB dwa kąty są proste: a to jest niemożliwe. W podobny sposób trzeba wnioskować, jeśli przyjmujemy, że odbicie zachodzi od punktu B, ponieważ to również jest niemożliwe. Odbicie nie zachodzi więc od punktu A albo B, na które padają proste [padania i odbicia]. Nie zachodzi również od jakiegoś punktu na linii ABC, [który jest] poza punktami A i B. Niech będzie tak, aby forma punktu D odbiła się do oka E od punktu C na zwierciadle. Wobec tego po przeprowadzeniu linii DC i CE kąt DCE podzielmy, jak podano w EE I,9, na równe części i poprowadźmy linię CF dzielącą linię BE w punkcie F, i zgodnie z poprzednim twierdzeniem, linia CF będzie prostą do linii AC; w rezultacie dwa kąty w trójkącie BFC są proste, a to jest niemożliwe jak poprzednio.



[Rys. 12]



[Rys.13]

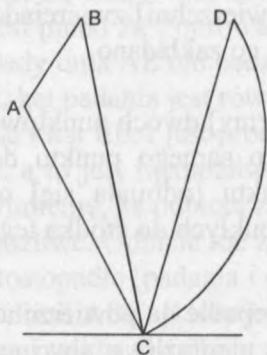
W ten sam sposób można dowodzić, jeśli przyjmujemy, że odbicie zachodzi od dowolnego punktu na linii ABC, [który jest] poza punktem A, np. od punktu G, po przeprowadzeniu linii GH, dzielącej kąt DGE na równe części. Wynika więc, że odbicie zachodzi tylko między punktami A i B od jakiegoś punktu na linii AB, tzn. między prostą padania

i prostopadłą odbicia. To zakładano dla zwierciadeł płaskich, a okazuje się, że jest to założenie uniwersalne, [prawdziwe] dla każdego rodzaju odbicia od dowolnego zwierciadła, ponieważ, jeśli przyjmiemy założenie przeciwne, wynikną te same niemożliwe wnioski, skoro zostanie poprowadzona cięciwa łuku leżącego między założonymi punktami odbić oraz punktami poprowadzonych prostopadłych i zostaną poprowadzone linie styczne w tych punktach do tych powierzchni zwierciadeł albo do linii, które są wspólnymi przecięciami tych [powierzchni] zwierciadeł i płaszczyzny odbicia [rys. 13]². Wynika więc to, co zakładano.

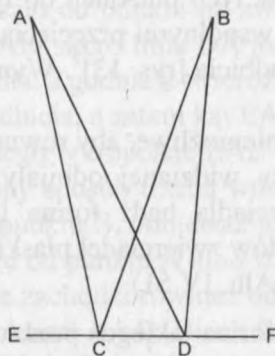
29. Jest niemożliwe, aby równocześnie [formy] dwóch punktów tej samej rzeczy widzianej odbijały się od tego samego punktu dowolnego zwierciadła bądź forma jednego punktu [odbijała się] od dwóch punktów zwierciadeł płaskich albo wypukłych do środka tego samego oka (Alh. IV, 51).

Gdy forma jakiegoś punktu pada prostopadle na powierzchnię zwierciadła, wtedy, jak wynika z EE XI, 13, jest niemożliwe, aby inna linia od innego punktu tej samej rzeczy lub innej została poprowadzona prostopadle do tego samego punktu na tej samej powierzchni [zwierciadła]. Z twierdzenia 21 tej książki wynika, że [forma padająca] prostopadle odbija się po drodze swego padania. Nie mogą więc dwa punkty tej samej widzianej formy odbijać się prostopadle od tego samego punktu zwierciadła do środka tego samego oka. To również nie może się zdarzyć, gdy linia padania jest ukośna. Każdy bowiem punkt dowolnej formy, zgodnie z twierdzeniem 18 tej książki, pada na zwierciadło i odbija się do oka po linii krótszej i każde tego rodzaju odbicie do oka oraz postrzeganie tych form zachodzi zgodnie z układem linii odbicia, jak to wynika z twierdzenia 24 tej książki. Jeśli zatem te dwie formy¹ padają w jeden punkt, odbijają się od niego i dochodzą do środka oka, to wtedy [formy] tych dwóch punktów, od których zachodzi padanie ich form, odbite od jednego punktu, zobaczymy jako [formę] jednego punktu, ponieważ nie dochodzą one do oka inaczej niż po liniach swego padania. W ten sposób dokonuje się zmieszanie form w oku. Jeśli bowiem linie padania form różnych punktów nie mają różnych punktów odbicia, ale padają w jeden punkt, to jest oczywiste, że albo jakaś cała forma, albo wiele punktów tej formy może padać w jeden punkt i odbijać się do jednego punktu, którym jest środek oka, zobaczymy wtedy całą formę jako jeden punkt. Również, jeśli założymy, że linie padania i odbicia zawsze są różne zależnie od ich kątów [padania], skutkiem tego, jeżeli mamy dwie linie padania, które padają z różnych punktów formy na ten sam punkt zwierciadła, tak też istnieją dwie linie odbicia, które kończą się w tym samym środku oka: np. jeśli z dwóch punktów formy padającej na zwierciadło (a są to punkty

A i B) dwie linie AC i BC padają w ten sam punkt zwierciadła (a jest to punkt C) [rys. 14], i odbijają się od niego do tego samego środka oka, którym niech będzie punkt D. Z tego wynikałoby, że, jeśli z jednego punktu odbicia C dochodzą do środka oka D formy różnych punktów A oraz B, to dwie linie proste, którymi są CD^2 , ograniczą powierzchnię, co jest niemożliwe. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 14]



[Rys. 15]

Nie jest jednak możliwe, aby równocześnie od dwóch punktów dowolnego zwierciadła płaskiego albo wypukłego do środka tego samego oka odbijał się ten sam punkt formy. Niech będzie tak – o ile to jest możliwe – aby forma punktu A odbijała się do oka B z dwóch punktów jakiegoś zwierciadła płaskiego lub wypukłego, którymi niech będą punkty C i D, zaznaczone na linii EF, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła bądź płaszczyzny stycznej do zwierciadła wypukłego [rys. 15]. Skoro zatem, zgodnie z twierdzeniem 24 tej książki, w oku powstaje [obraz] zawsze stosownie do układu linii odbicia, to wówczas forma punktu A, która jest niepodzielna, dochodzi do oka jako forma linii CD, która jest linią podzielną. Dojdzie więc do oka tylko jeden punkt formy odbitej od jednego punktu zwierciadła. I nie może odbić się jeden punkt od dwóch punktów zwierciadła płaskiego lub wypukłego. A to jest przedmiotem twierdzenia.

30. Nie może od jednego punktu powierzchni dowolnego zwierciadła odbijać się forma jednego punktu rzeczy widzianej do dwojga oczu (Alh. IV,51).

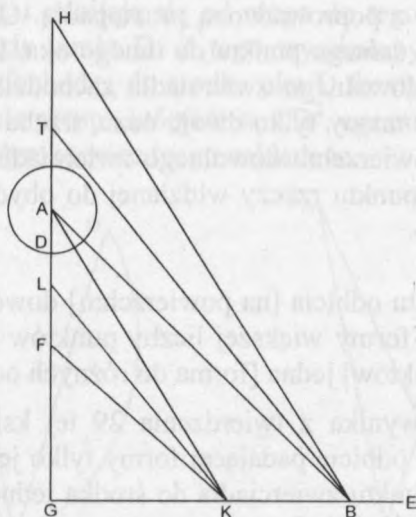
Ponieważ linia odbicia dochodząc do jednego oka tworzy z prostopadłą do powierzchni zwierciadła, poprowadzoną przez punkt odbicia, kąt, równy kątowi, który tworzy linia padania z tą właśnie prostopadłą, jak to wynika z twierdzenia 20 tej książki, to jest rzeczą oczywistą, że na tej

płaszczyźnie [odbicia] nie można poprowadzić innej linii, która utworzyłaby taki sam kąt z poprowadzoną prostopadłą. Od tego punktu nie odbija się forma tego samego punktu do innego oka. Potrzeba więc, aby z różnych punktów dowolnego zwierciadła zachodziło odbicie do różnych oczu. Ponieważ mamy tylko dwoje oczu, trzeba przynajmniej, aby z dwóch punktów powierzchni dowolnego zwierciadła zachodziło odbicie [formy] jednego punktu rzeczy widzianej do obydwu oczu. Wynika więc to, co zakładano.

31. Od jednego punktu odbicia [na powierzchni] dowolnego zwierciadła mogą odbijać się formy większej liczby punktów do różnych oczu¹, a od różnych [punktów] jedna [forma do różnych oczu] (Alh. IV,51).

Chociaż, jak to wynika z twierdzenia 29 tej książki, możliwe jest w tym samym czasie odbicie padającej formy tylko jednego punktu wyłączenie od jednego punktu zwierciadła do środka jednego oka, to jednak jest możliwe, aby zachodziło w tym samym czasie odbicie do różnych oczu od jednego punktu zwierciadła padających form różnych punktów, ponieważ [formy] tych punktów padają pod różnymi kątami i pod różnymi kątami się odbijają. Wobec tego w różnych punktach kończą się linie odbicia, na których znajdujące się tam różne oczy postrzegają formy różnych punktów odbite od jednego punktu zwierciadła do różnych oczu. Jeśli jedno oko poruszy się i zmieni położenie, a zwierciadło pozostanie nieporuszone, to wtedy także stosownie do jego innego położenia formy różnych punktów odbijają się od tego samego punktu zwierciadła do oka; zawsze jednak utworzy się stożek z pozostałych form. Ale i jedno poruszone oko lub różne oczy zobaczą tę samą formę odbitą z różnych punktów zwierciadła. Skoro padająca forma każdego punktu, która pada na całą powierzchnię zwierciadła, odbija się w jakąś przeciwną stronę² i w sposób, który przedstawiliśmy w twierdzeniu 22 i 24 tej książki, jest jasne, że różnią się stożki form. Ponieważ jednak na różne oczy padają różne osie stożków, które należą do tej samej formy, zdarza się, że w różnych oczach widoczna jest jedna forma odbita od różnych punktów powierzchni zwierciadła. To samo zachodzi również, gdy oko poruszy się, a zwierciadło pozostaje nieruchome. Wynika więc to, co zakładano.

32. Nie jest możliwe, aby [forma] jakiegoś punktu linii, poprowadzonej przez środek oka, prostopadłej do powierzchni dowolnego zwierciadła płaskiego lub wypukłego, odbiła się do oka, z wyjątkiem [formy] tego jednego punktu, w którym poprowadzona prostopadła przecina powierzchnię oka i tylko od tego punktu [ona się odbija], w którym poprowadzona prostopadła pada na powierzchnię tego zwierciadła (Alh. V,13).



[Rys. 16]

Niech środkiem oka będzie punkt A [rys. 16]¹. Niech linia, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni dowolnego zwierciadła płaskiego lub wypukłego będzie teraz, dla przykładu, linią BG danego zwierciadła płaskiego. Niech prostą poprowadzoną przez punkt A do linii BG będzie linia AG. Również niech będzie tak, aby linia AG przecięła powierzchnię kulistą wypukłą oka w punkcie D. Twierdzą, że na całej prostopadłej AG, niezależnie od tego, dokąd ją poprowadzimy, nie ma żadnego innego punktu, którego [forma] odbije się od tego zwierciadła do środka oka A, z wyjątkiem jednego punktu D. Jeśli bowiem [forma] innego punktu ze wspomnianej prostopadłej odbija się do oka oprócz [formy] punktu D, to ten punkt leży powyżej środka oka albo poniżej oka. Jeśli znajduje się powyżej oka, to niech to będzie punkt H. Jest więc sprawą oczywistą, że jego forma nie dojdzie do zwierciadła, po prostopadłej HA, ponieważ na przeszkodzie stoi gęste ciało, które znajduje się powyżej oka i jest nim głowa patrzącego. Forma punktu H nie odbije się więc wzdłuż prostopadłej HG. Jeśli natomiast przyjmujemy, że od innego punktu na zwierciadle prócz punktu G może odbić się forma punktu H do oka A, to niech to będzie punkt B, a linią padania niech będzie HB, zaś linią odbicia BA^2 i niech kąt HBA zostanie podzielony, jak podano w EE I,9, na równe części linią BT poprowadzoną do prostopadłej HG. Linia BT, zgodnie z twierdzeniem 26 tej książki, będzie więc prostopadła do linii BG, ale i linia TG jest prostopadła do tej samej linii BG³. Wobec tego przez ten sam punkt T można by poprowadzić dwie prostopadłe do linii BG i do tej powierzchni zwierciadła, co

jest niemożliwe. Okazałoby się bowiem, że dwa kąty trójkąta ABG są proste, tzn. kąty TGB i TBG, i przez ten sam punkt można by poprowadzić więcej linii prostopadłych do tej samej powierzchni, co jest sprzeczne z twierdzeniem I,20 tego dzieła. Z tego powodu żadna forma punktów linii HD nie może odbić się do oka z wyjątkiem jedynie punktu D, ponieważ ten sam dowód można przeprowadzić w stosunku do wszystkich pozostałych punktów.

Nie można bowiem twierdzić, że jakaś forma dowolnego punktu leżącego pomiędzy punktami A i D odbije się do oka, chyba że po linii prostopadłej DA, ponieważ punkty pomiędzy środkiem oka i jego powierzchnią są bardzo słabe⁴. Dlatego nie dochodzi do oka forma żadnego z nich ani nie odbija się od jakiegoś zwierciadła tak, aby ją dostrzec wzrokiem.

Forma jakiegoś z punktów na linii DG nie może odbić się do oka A z punktu G na zwierciadle, np. forma punktu F, ponieważ, jeśli punkt [F]⁵ będzie leżał na gęstym ciele, to jest jasne, że to ciało przeszkadza w odbiciu do oka wzdłuż linii DG, gdyż z powodu gęstości tego ciała forma punktu F nie będzie mogła przez nie przejść i dotrzeć do oka. Jeśli natomiast ciało będzie rzadkie, forma odbita od zwierciadła zmiesza się z nim, przylgnie do niego i nie dojdzie do oka. Forma jakiegoś z tych punktów nie może się odbić od innego punktu na zwierciadle z wyjątkiem punktu G, np. od punktu K, ponieważ po przeprowadzeniu linii FK i AK oraz po podzieleniu kąta AKF na równe części linią KL, wyniknie taka sama niemożliwa sytuacja co poprzednio, a to oznacza, że linie LK oraz LG są prostopadłe do powierzchni zwierciadła lub powierzchni stycznej do zwierciadła, co jest sprzeczne z twierdzeniem I,20 tego dzieła. [Forma] żadnego z punktów linii HG nie odbija się do oka A z wyjątkiem [formy] punktu D. Ponieważ dowolny punkt całego widzialnego przedmiotu, na którym znajduje się linia HG, z wyjątkiem punktu D, odcisniętego na powierzchni oka, nie jest położony naprzeciw zwierciadła pod kątem prostym, i ponieważ wszystkie punkty znajdujące się wokół punktu D zbiegają się w środku oka A i tworzą stożek, którego podstawa znajduje się na powierzchni zwierciadła wokół osi AG, formy wszystkich tych punktów będą widoczne na prostopadłych, poprowadzonych od nich do powierzchni zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ na zwierciadłach wypukłych linia HG jest zawsze prostopadła do powierzchni zwierciadła i, zgodnie z twierdzeniem I,20 tego dzieła, nie można poprowadzić od dowolnego punktu na niej innej prostopadłej do powierzchni zwierciadła. Jednak, co wcześniej zostało dowiedzione dla jednego tylko oka, należy rozumieć tak, że odnosi się to do wszystkich zwierciadeł płaskich i dowolnych wypukłych, jak zakłada twierdzenie. Ponieważ forma tego samego punktu rzeczy widzianej odbita do

dwojga oczu, chociaż do jednego oka pada prostopadłe, może do drugiego oka padać ukośnie po linii odbicia, padającej ukośnie od powierzchni zwierciadła do środka oka, to ten sam punkt rzeczy widzianej dwoje oczu zobaczy zgodnie z różnym sposobem odbicia. Natomiast dla dowolnych zwierciadeł wklęsłych jest inaczej⁶.

33. Nie może forma padająca ukośnie na zwierciadło odbijać się do oka po linii swojego padania lub w stronę swojego kąta mniejszego¹ (Euc. Catopt. 3).

Niech będzie tak, aby forma punktu C padała ukośnie na zwierciadło ADB w punkt D w taki sposób, aby kąt CDB był większy od kąta CDA [rys. 17]². Twierdzę, że forma punktu C nie odbije się po linii CD, tzn. po tej samej linii z powodu nierówności kątów, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 20 tej książki, zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia, ale [nie odbije się] również w stronę kąta mniejszego, którym jest kąt CDA. Niech będzie tak, aby ta forma odbiła się po linii DE, dzielącej kąt CDA. Kąt CDB będzie [wtedy] równy kątowi EDA, ale kąt CDB jest większy od kąta CDA³, zgodnie z założeniem. Kąt EDA będzie więc większy od kąta CDA jak część od swojej całości, co jest niemożliwe. Zawsze więc odbicie będzie zachodziło pod kątem większym, którym, zgodnie z założeniem, jest kąt CDB. A to zakładano.

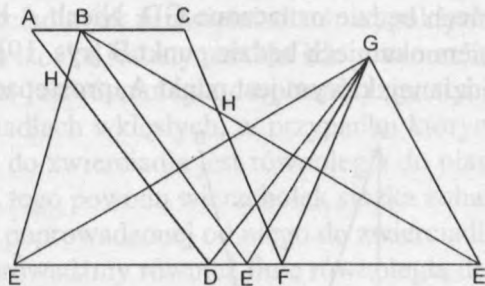


[Rys. 17]

34. Na każdym zwierciadle odbicie form punktów środkowych¹ dowolnej rzeczy widzianej zachodzi między punktami odbicia form punktów skrajnych tej rzeczy widzianej.

Przyjmijmy, że rzecz jest widziana dzięki odbiciu od jakiegoś zwierciadła i oznaczmy ją jako ABC [rys. 18]. Jej punktami skrajnymi niech będą A i C. Spośród zaś punktów środkowych na linii ABC obierzmy jakiś punkt B. Niech powierzchnia tego zwierciadła będzie płaska albo wypukła albo wklęsła, na której wspólnym przecięciu płaszczyzny od-

bicia i powierzchni zwierciadła niech będzie linia DEF. Środkiem oka niech będzie punkt G. Niech forma punktu A odbija się do oka G od punktu na zwierciadle, którym niech będzie punkt D, forma punktu C od punktu na zwierciadle, którym niech będzie punkt F, a forma punktu B, którym niech będzie jakiś punkt środkowy na linii ABC, niech się odbije do oka od punktu E na zwierciadle. Twierdząc, że punkt E musi być między punktami D i F, które są punktami odbicia form punktów skrajnych A i C. Jeśli punkt E będzie leżał poza punktami D i F, to linia BE, która jest linią padania formy punktu B, przetnie którąś z linii AD i CF: gdyby ta linia przecięła którąś z tych linii, to niech H będzie punktem przecięcia. Jest jasne, że forma punktu H odbija się do oka G od dwóch punktów zwierciadła, którymi są punkty E i F bądź punkty E i D. Z twierdzenia 29 tej książki wynika, że to jest niemożliwe dla zwierciadeł płaskich i wypukłych. W zwierciadłach wklęsłych punkty odbić, właściwych dla tych zwierciadeł, będą się podwajały². W ten sposób żadna forma na jakimś spośród tych zwierciadeł nie byłaby widoczna zgodnie z położeniem i własnym układem swoich części, co w ogóle jest niemożliwe. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 18]

35. Jeżeli kształt¹ powierzchni przedmiotu, [którego forma] pada [na zwierciadło], i kształt zwierciadła jest taki sam oraz ich położenie jest odpowiednie², to na każdym zwierciadle formy przedmiotu i kształtu [zwierciadła] będą się dopełniały (Alh. IV,22).

Kiedy bowiem kształt zwierciadła i przedmiotu jest taki sam i takie samo jest położenie, np. jeśli zwierciadło i przedmiot mają kształt płaski i są równoległe, to wówczas forma pierwszego punktu powierzchni widzianego przedmiotu pada na punkt pierwszy zwierciadła, a forma punktu drugiego na punkt drugi, i tak jest w stosunku do wszystkich pozostałych punktów sobie odpowiadających. W ten więc sposób na powierzchni zwierciadła znajduje się cały kształt powierzchni widzianego przedmiotu, co nie zdarza się w przypadku zwierciadła o innym kształ-

cie. Podobnie jest, jeśli weźmiemy dowolną część zwierciadła, którego kształt jest taki sam jak kształt przedmiotu, a położenie jest równoległe. Zawsze kształt przedmiotu dopełni się na tej [części]. I kiedy nieskończone będą te części zwierciadła, to jest oczywiste, że nieskończone będą również formy przedmiotu padające na zwierciadło, które zawsze odbijają się w różnych punktach, z których różne oczy postrzegają formę przedmiotu na tym samym zwierciadle. To odnosi się do wszystkich zwierciadeł, ale najbardziej jest to widoczne na zwierciadłach płaskich. Kiedy bowiem [forma] dowolnego punktu powierzchni płaskiej pada na powierzchnię zwierciadła płaskiego, kształt części znajdujących się wokoło zachowuje taki sam porządek i położenie, a odbicie ze wszystkich punktów jest takie same, zachodzi równocześnie i w ten sam sposób. Tak dopełniają się na zwierciadle formy przedmiotu i kształtu [zwierciadła]. A to zakładano.

36. Na dowolnym zwierciadle widać [formę] każdego punktu, spostrzeżoną na prostopadłej jej padania (Euc. Catopt. 16, 17, 18; Alh. V,9).

Weźmy dowolne zwierciadło. Dla przykładu niech to będzie zwierciadło płaskie i niech będzie oznaczone GD. Niech A będzie widzianym punktem, a środkiem oka niech będzie punkt B [rys. 19]. Poprowadźmy z punktu rzeczy widzianej, którym jest punkt A, prostopadłą padania, którą



[Rys. 19]

niech będzie [linia] AG. Twierdzę, że obraz punktu A zawsze będzie widoczny na linii AG¹. Na początku tej księgi w drugim postulatcie przyjęliśmy, że jednoznaczne [określenie] położenia punktu rzeczy widzianej względem powierzchni dowolnego zwierciadła, od której odbija się jego forma, możliwe jest tylko na prostopadłej jej padania, formą zaś, którą widzimy w zwierciadle, jest obrazem rzeczy widzianej, jak to wynika z definicji. Ten obraz musi się pojawić, gdy będzie odpowiednie położenie punktu rzeczy widzianej względem zwierciadła, ponieważ ina-

czej nie będziemy mogli zobaczyć tej formy jako obrazu. Będzie więc ona widoczna na tej prostopadłej swojego padania. A to zakładano, bowiem taki sam dowód można przeprowadzić dla pozostałych zwierciadeł.

37. Miejsce obrazu rzeczy widzianej na dowolnych zwierciadłach musi się znajdować w punkcie przecięcia linii odbicia z prostopadłą padania (Alh. V,2,4,6,7,8).

Na to taki jest przykład: jeśli stożek prostokątny wznosi się prostopadle do powierzchni dowolnego zwierciadła, wtedy oko zobaczy inny stożek połączony ze stożkiem zewnętrznym jakby na kształt rombu, a wtedy wierzchołki tych stożków zobaczymy jakby były w jednakowej odległości do powierzchni zwierciadła. I jeśli wyobrazimy sobie linię prostą, poprowadzoną od wierzchołka jednego stożka do wierzchołka drugiego stożka, to jest oczywiste, że będzie ona prostopadła do podstawy widzianego stożka i z tego powodu także będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła, skoro tą samą powierzchnią jest powierzchnia zwierciadła i powierzchnia podstawy widzianego stożka, jak to jest w zwierciadłach płaskich. Podstawa stożka widzianego jest równoległa do płaszczyzny stycznej do zwierciadła jak w zwierciadłach wypukłych, w których podstawa widzianego stożka jest styczna do ich powierzchni, albo podstawa widzianego stożka jest równoległa do płaszczyzny stycznej do zwierciadła jak w zwierciadłach wklęsłych, w przypadku których podstawa stożka prostopadłego do zwierciadła jest równoległa do płaszczyzny stycznej do zwierciadła. Z tego powodu wierzchołek stożka zobaczymy zawsze na linii prostopadłej poprowadzonej od niego do zwierciadła.

Podobnie poprowadźmy również linię równoległą do osi z dowolnego punktu stożka; padnie ona zawsze w punkt, który będzie symetryczny do tego punktu na tym drugim stożku. Ta proponowana linia, jak wynika z EE XI,8, będzie zawsze prostopadła do podstaw wspomnianych stożków i do powierzchni zwierciadła bądź do płaszczyzny stycznej do zwierciadła. Wobec tego obraz dowolnego punktu na stożku w ten sposób ustawionym naprzeciw zwierciadła leży na prostopadłej, którą w wyobraźni prowadzimy od tego punktu do powierzchni zwierciadła¹.

Umieśćmy dowolny punkt materialny naprzeciw zwierciadła; teraz musimy sobie wyobrazić stożek prostopadły do powierzchni zwierciadła lub do jej przedłużenia albo do płaszczyzny stycznej do samego zwierciadła albo do płaszczyzny równoległej do tej stycznej płaszczyzny (jak to wynika z twierdzenia 22 tej księgi), a wierzchołek tego stożka jest widziany jako ten punkt, zaś podstawa tego stożka jako powierzchnia zwierciadła albo powierzchnia z nią połączona. Z tego wynika, że musimy sobie wyobrazić inny stożek, położony naprzeciw tamtego, który

jakby z nim połączony tworzy równoległobok, i że dla jednego i drugiego stożka jest ta sama podstawa albo jedna z podstaw jest równoległa do drugiej. A linia prostopadła poprowadzona od wierzchołka jednego do wierzchołka drugiego stożka będzie linią prostopadłą do powierzchni zwierciadła.

Ponieważ obraz dowolnego punktu położonego naprzeciw zwierciadła leży na linii poprowadzonej prostopadle od punktu do powierzchni zwierciadła albo do powierzchni z nim połączonej, to jest rzeczą oczywistą, że miejsce obrazu znajduje się na tej linii prostopadłej, co także wynika z poprzedniego twierdzenia. Skoro jednak na dowolnym zwierciadle, jak to wynika z twierdzenia 24 tej książki, nie zachodzi postrzeganie formy inaczej jak tylko po liniach odbicia, to jest też oczywiste, że obraz dowolnego widzianego punktu jest na linii odbicia, a ponieważ każda z tych linii jest prosta, wobec tego obraz dowolnego punktu formy odbitej znajduje się w punkcie przecięcia prostopadłej [padania] i linii odbicia.

Dlatego niekiedy forma jest widoczna poniżej powierzchni zwierciadła, gdy przecięcie tych linii, tzn. linii odbicia i prostopadłej padania, będzie zachodzić tylko pod powierzchnią zwierciadła. Linia odbicia po jej przedłużeniu przecina się zaś z prostopadłą padania, ponieważ linia odbicia przecina się z linią prostopadłą poprowadzoną od punktu odbicia do tej powierzchni zwierciadła, jak to wynika z poprzednich twierdzeń. Jednak na płaskich zwierciadłach ta prostopadła, zgodnie z EE XI,6, jest równoległa do prostopadłej padania, ponieważ obydwie linie są prostopadłe do powierzchni zwierciadła. Jest więc oczywiste, na podstawie twierdzenia I,2 tego dzieła, że na tych zwierciadłach linia odbicia przecina się z prostopadłą padania. Na innych zaś zwierciadłach jest to jednak bardziej widoczne, ponieważ na większości z nich prostopadła padania przecina się z prostopadłą do powierzchni zwierciadła poprowadzoną z punktu odbicia i obraz jest widoczny na przecięciu tych² linii. Jednak przypadki dla poszczególnych zwierciadeł przedstawimy w następnych twierdzeniach. Tam znajduje się więc miejsce obrazu, jak zakładano.

To zaś musi być tak, ponieważ, skoro przestrzeń pomiędzy punktem dostrzeżonym przez oko i powierzchnią zwierciadła nie jest pusta, zachodzi odbicie formy ośrodka będącego między nimi do oka, jak np. [formy] punktu ciała, na które patrzy oko. Nie ma żadnej różnicy pomiędzy odbiciem formy ciała będącego pośrodku i odbiciem formy spostrzeganego punktu, chyba że chodzi o jakąś formę jednego całego połączonego ciała, którego uważa się, że tylko niewielka część jest widoczna. Gdyby np. zakładano, że otwór igły jest widoczny na zwierciadle i jego forma rozprzestrzenia się do oka, to także na zwierciadle układa się cała forma igły. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 34 tej książki, formy

znajdujące się w oczach i na pewnych regularnych zwierciadłach zachowują pierwotny porządek swoich części i kształtów, dlatego punkty form padających na zwierciadła muszą niekiedy być widziane w pewnej odległości, skoro czasami punkty rzeczy znajdują się w pewnej odległości poza [powierzchnią zwierciadła].

Niekiedy znów linia odbicia i prostopadła [padania] przecinają się pod powierzchnią zwierciadła bądź pomiędzy okiem i zwierciadłem (ale nie na samej powierzchni zwierciadła), bądź z tyłu oka; w tych wszystkich przypadkach powód ogólnie jest ten sam, o którym mówiliśmy poprzednio, chociaż te różnice są zależne od różnych sposobów odbicia. Zdarza się bowiem, że przedmioty różnią się właściwymi dla siebie formami i wraz z tymi właściwościami formy tych przedmiotów rozprzestrzeniają się przez ośrodek do powierzchni zwierciadła. Jednak w sposób zmysłowo dostrzegalny do zwierciadeł dochodzi tylko światło, barwa, kształt i tym podobne [cechy], które nie wyznaczają różnicy jakościowej, np. w drzewie i kamieniu, chociaż zdolność rozróżniająca postrzega różnicę jakościową dzięki poznaniu przypadłości, tzn. dzięki przypisaniu tych przypadłości odpowiednim przedmiotom, których przypadłości ukazują się oczom, patrzącym na wprost³. Wobec tego jak formy części jednego ciągłego ciała naturalnego dochodzą do powierzchni zwierciadła z zachowaniem całej formy i kształtu, tak części bardziej oddalone od powierzchni zwierciadła muszą być widoczne jako bardziej oddalone, aby forma i kształt oglądanych przedmiotów nie zlewały się. Z tego powodu następuje to, że formy wszystkich punktów przedmiotów widzianych [w zwierciadle] przez ośrodek, jakim jest powietrze, muszą być widziane odpowiednio do formy rzeczy widzianej [na wprost] przez ośrodek, jakim jest powietrze, np. położenie formy wcześniej umieszczonej w powietrzu. W innym bowiem przypadku kształt i forma rzeczy wielokrotnionych na powierzchni zwierciadła mogłyby się mieszać. I wydawało mi się, że to jest przyczyną tego zjawiska, które inni⁴ zbadali za pomocą zawiłych argumentów.

Z tego powodu przedmiot musi być widziany na prostopadłej, ponieważ, jak wynika z twierdzenia I,21 tego dzieła, jest to jego najkrótsza odległość od powierzchni zwierciadła, od której zachodzi odbicie do oka, albo od powierzchni, która jest jej przedłużeniem. I wzdłuż tej prostopadłej zachodzi jednoznaczne w stosunku do zwierciadła usytuowanie rzeczy widzianej. Dzięki temu forma rzeczy nazywa się obrazem, jak stwierdziliśmy w poprzednim twierdzeniu.

Chociaż więc forma rzeczy odbija się do oka po innej linii, to jednak osąd zdolności widzenia dokonuje się po linii najkrótszej, po której pada widziana forma na powierzchnię zwierciadła albo na jej przedłużenie, z powodu odpowiedniego układu form na powierzchni zwierciadła i w

oku oraz z tego powodu, że takie poznanie jej wielkości jest pewniejsze. Ponieważ obraz musi być widziany na linii odbicia, to, jeżeli będzie widoczny po stronie prostopadłej [padania], bliższej oka, zobaczymy go jako większy, jeśli [będzie] po drugiej stronie prostopadłej [padania], zobaczymy go jako mniejszy, bo jest widziany z większej odległości. Na prostopadłej [padania] natomiast jest widziany zgodnie ze swoją prawdziwą wielkością, na ile na to pozwala kształt zwierciadła i odległość oczu.

Obraz musi więc być widoczny na przecięciu linii odbicia z prostopadłą padania. Oko bowiem, gdy spostrzega formy w wyniku odbicia, nie spostrzega, że to spostrzeżenie dokonuje się w wyniku odbicia, ponieważ odbicie, jak powiedzieliśmy we wstępie do tego naukowego dzieła, nie jest właściwością oka⁵. Bo nawet jeśli odsuniemy oko, zachodzi odbicie od zwierciadeł, ponieważ forma cielesna w dalszym ciągu pada na powierzchnie zwierciadeł. Skoro jednak napotyka przeszkodę na swej drodze z powodu gęstości ciała zwierciadła, odbija się od niego. A jeśli się zdarzy, że oko znajdzie się w miejscu, gdzie nastąpiło nagromadzenie odbitych linii, oko spostrzeże te formy na końcach tych linii. Każda forma odbita od dowolnego zwierciadła znajduje się w tym zwierciadle nie w taki sposób, jakby ona tam doszła, ale jakby była naturalną formą zwierciadła, chociaż nie należy do istoty tego zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano.

38. Forma każdej rzeczy widzianej, postrzeganej w wyniku odbicia od powierzchni jakiegoś zwierciadła musi w czymś być podobna do kształtu powierzchni tego zwierciadła (Alh. VI,37).

Skoro, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, miejsce obrazu każdego punktu widzianej formy znajduje się na przecięciu linii odbicia z prostopadłą padania, zaś punkt przecięcia tych linii zależy od kształtu powierzchni zwierciadeł, od których zachodzi odbicie, dlatego że położenie punktu przecięcia prostopadłej padania i prostopadłej, poprowadzonej od punktu odbicia formy padającej na powierzchnię zwierciadła, od której zachodzi odbicie do oka, lub na powierzchnię styczną do zwierciadła w punkcie odbicia, jest zależne od układu tego kształtu, a od położenia punktu przecięcia tych prostopadłych zależy [położenie punktu] przecięcia linii odbicia z prostopadłą padania, to na tym przecięciu jest miejsce obrazu, jak wykazano w poprzednim twierdzeniu. Powierzchnia zwierciadła, od której zachodzi odbicie, posiada zatem jakieś znaczenie przy kształtowaniu widzianych obrazów, które widzimy w świetle od nich odbitym, ale nie zawsze to podobieństwo odnosi się do całego układu form, chyba że miejsca obrazów znajdują się raczej na

tych powierzchniach zwierciadeł, a nie poniżej albo powyżej nich. Jednak i wtedy widziane formy są nieco podobne do tych form lub kształtów zwierciadeł, ponieważ na zwierciadłach stożkowych pojawiają się formy nieco stożkowate i to samo zachodzi także na innych zwierciadłach. Wynika więc to, co zakładano.

39. Jeżeli podzielimy powierzchnię dowolnego zwierciadła, to zdarzy się, że [obraz] formy jednego punktu rzeczy widzianej liczy [tyle obrazów], na ile części [zostało podzielone zwierciadło].

To, co tutaj zakładamy, jest prawdziwe, jeżeli w wyniku podziału jakiegoś zwierciadła występuje dostrzegalna różnica w układzie i położeniu częściowych powierzchni na nim samym i w stosunku do oka. A to najczęściej zachodzi przy szklanych zwierciadłach ołowianych, które w przypadku pęknięcia łatwo odłamują się od jednej powierzchni, co nie tak łatwo się zdarza w przypadku innych zwierciadeł. Kiedy zatem powierzchnie innych zwierciadeł w wyniku pęknięcia, jakiego doznały te zwierciadła, łamią się stosownie do położenia i porządku od jednej powierzchni w opisany sposób, zdarza się, że forma jednego punktu tyle liczy [form], na ile części [z zwierciadło] się podzieliło. Wtedy bowiem na prostopadłej padania są różne formy tego samego punktu rzeczy widzianej stosownie do tych różnych częściowych powierzchni i tak samo różne są punkty odbić i różne linie odbić do środka tego samego oka. Ponieważ miejsce dowolnego obrazu znajduje się zawsze w punkcie przecięcia linii odbicia z prostopadłą padania, jak to wynika z twierdzenia 37 tej książki, dlatego jest oczywiste, że liczba obrazów formy tego samego punktu zależy od liczby tych linii i ich przecięć. Wynika więc to, co zakładano.

40. Na powierzchni każdego zwierciadła odbicie form zachodzi wzdłuż, a także wszczep odpowiednio do kierunku, w jakim wypolerowano zwierciadło.

To, co tutaj się zakłada, jest widoczne na przykładach dowolnych zwierciadeł wypolerowanych ręką rzemieślnika. Jeśli bowiem są one wypolerowane wzdłuż, jak to się dzieje na powierzchni mieczy, to wtedy twarz patrzącego będzie się wydawała wydłużona w stosunku do jej właściwego kształtu, a jeśli jakieś powierzchnie będą wypolerowane wszczep, wtenczas obraz twarzy patrzącego będzie się wydawał szerszy niż jest jej właściwy kształt. Niekiedy obraz wydaje się poprzeczny, bo połysk ma kierunek poprzeczny. We wszystkich tych przypadkach przyczyną [znieskształceń] jest większa spójność powierzchni przedmiotów wypolerowanych. Formy odbite od nich i ich części po odbiciu łączą się i dochodzą

do oka. Ponieważ, jak powiedzieliśmy na początku tej księgi w 1 definicji, gładkość oznacza ciągłość części powierzchni wypolerowanego przedmiotu bez dostrzegalnych pór i przerw, dlatego, gdy są wygładzone w jakimś określonym kierunku, to formy padające na większą liczbę tych punktów muszą zlewać się i łączyć się w jedną formę stosownie do tego kierunku i w zależności od kierunku [wygładzania] widziana forma w wyniku odbicia powiększa się i wydaje się być większa. Natomiast gdy mamy inne kierunki, musi być widoczny własny kształt formy lub do niej zbliżony. W tym przypadku zdarza się czasami zniekształcenie w obrazach form tak widzianych, ponieważ ich odbicie z obydwu stron nie jest takie same i odpowiednio staje się nieregularne¹. Wobec tego, aby odbicie od przedmiotów wypolerowanych ręką rzemieślnika było regularne, odpowiednie do układu odbitych form, ich powierzchnie nie mogą być wypolerowane ani wzdłuż, ani wszerz lub w poprzek, ale koliście, aby ich własny układ² nie został zdeformowany kierunkiem wygładzania. Wynika więc to, co zakładano.

41. Na każdym zwierciadle się zdarza, że ten sam obraz jest czasami widziany podwójnie przez dwoje oczu.

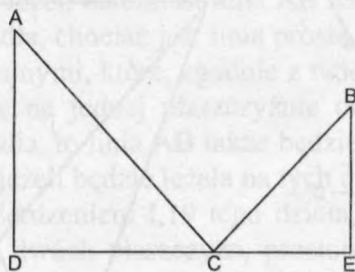
Przypadek tego rodzaju zachodzi w oku, gdy widzimy jeden obraz odbity od dowolnego zwierciadła, i taki sam błąd zdarza się również podczas widzenia prostego przedmiotów, kiedy występują te same okoliczności lub niektóre z nich, o których mówiliśmy w księdze IV w twierdzeniach 103, 104, 105, 106 i 107, np. gdy forma tej samej rzeczy odbita od tego samego zwierciadła dochodzi do jednego oka prostopadłe, a do drugiego ukośnie, albo gdy odbita forma znalazłszy się między osiami promieniowymi¹ dochodzi do dwojga oczu ukośnie. W każdym takim przypadku zdarza się bowiem, że forma tej samej rzeczy jest widziana podwójnie i jest możliwe, że w tych samych przypadkach obraz tej formy widać podwójnie, jeśli odbije się do oczu od jakiegoś zwierciadła, w zależności od rodzaju widzenia. Z tego powodu nie należy zatrzymywać się dłużej nad tymi przypadkami ponad to, co zostało powiedziane na temat widzenia prostego. To zjawisko nie zachodzi bowiem z powodu różnicy w [położeniu] punktów odbicia formy tego samego punktu do dwojga oczu, ponieważ albo w ogóle nie ma takiej różnicy, albo jest ona niedostrzegalna. Dlatego nie powoduje to żadnego złudzenia dostrzegalnego dla oczu, lecz dwoje oczu dzięki temu dobrze zachowuje pojedyncze widzenie tej samej formy, jak to wykazemy później. Wynika więc to, co zakładano.

42. Na każdym zwierciadle widać, że obraz widzianej rzeczy jest przesunięty, gdy rzecz widziana została przesunięta.

Nie ma innej przyczyny tego zjawiska jak tylko ta, że jednakowe jest odbicie od każdego punktu na zwierciadle, do którego nastąpiło przesunięcie. Skoro wszystkie punkty rzeczy widzianej odbijają się od innych punktów niż poprzednio, powstaje więc nowy obraz całej rzeczy widzianej, ponieważ punkty, od których dokonało się odbicie, zmieniają się z powodu przesunięcia. Widać także, że forma się przesunęła, chociaż naprawdę nie przesunęła się, ale raczej powstał nowy obraz rzeczy widzianej po zmianie położenia. To zaś zdarzyło się dzięki ciągłości punktów odbicia na powierzchni zwierciadeł. Wynika więc to, co zakładano.

Tak więc po przedstawieniu tych wspólnych zjawisk dla wszystkich zwierciadeł pozostaje nam opisać zjawiska właściwe dla zwierciadeł płaskich.

43. Przy każdym odbiciu, zachodzącym od zwierciadeł płaskich, [długości] linii padania i odbicia są proporcjonalne do długości prostopadłych, wykreślonych przez ich punkty skrajne, oraz do ich podstaw, położonych pośrodku na powierzchni zwierciadeł (Euc. Catopt. 3 założenie).



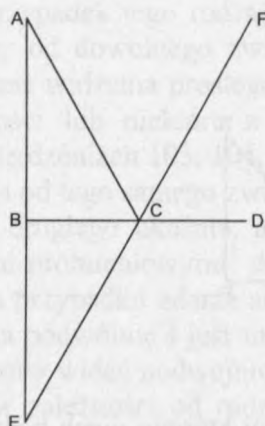
[Rys. 20]

Weźmy zwierciadło płaskie, na powierzchni którego niech będzie linia DCE, linią padania niech będzie AC, a linią odbicia CB [rys. 20]. Poprowadźmy prostopadłe padania AD i odbicia BE. Twierdzę, że jaki jest stosunek AD do BE, taki sam jest AC do BC oraz DC do CE. Ponieważ w trójkącie ADC kąt prosty, którym jest kąt ADC, jest równy kątowi prostemu BEC, a kąt ACD, który jest kątem padania jest, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, równy kątowi BCE, który jest kątem odbicia, to, jak wynika z EE I,32, kąt DAC w trójkącie ADC musi być równy kątowi CBE w trójkącie BEC. Wobec tego, zgodnie z EE VI,4, boki tych trójkątów, tworzące odpowiednio równe kąty, są proporcjonalne: tzn.

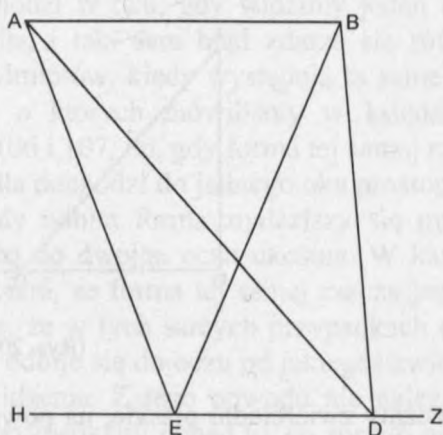
stosunek linii AD do linii BE jest taki sam jak stosunek linii AC do BC oraz linii DC do EC. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ zawsze pozostaje ten sam stosunek wynikający z równości kątów.

44. Gdy forma punktu rzeczy widzianej pada na powierzchnię zwierciadła płaskiego, to można znaleźć miejsce, w którym, gdy znajdzie się tam oko, zachodzi do niego odbicie.

Weźmy punkt A, którego forma pada na zwierciadło płaskie, a linia BCD niech będzie wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła i niech zostanie poprowadzona na powierzchni zwierciadła [rys. 21]. Forma punktu A niech pada na zwierciadło w punkcie C. Poprowadźmy linię padania, którą jest AC. Z punktu A poprowadźmy, jak podano w EE I,12, linię AB prostopadłą do linii BCD i przedłużmy ją aż do punktu E tak, aby linia BE, była równa linii AB, co można zrobić zgodnie z EE I,3. Poprowadźmy także linię EC i przedłużmy ją poza punkt C do punktu F. Twierdzę, że gdy oko znajduje się w dowolnym miejscu na linii CF, to zawsze do niego będzie zachodziło odbicie i będzie ono widziało formę punktu A. Wykreślmy linię AC. Kąt



[Rys. 21]



[Rys. 22]

ABC będzie równy kątowi CBE, ponieważ, jak to wynika z poprzednich wywodów, obydwa te kąty są proste. Skoro wobec tego, jak wynika z EE I,4 i z założenia, linia BE jest równa linii AB, bok BC jest wspólny, trójkąty ABC i CBE są równokątne, to kąt ACB będzie równy kątowi BCE, ale, zgodnie z EE I,15, kąt FCD jest równy kątowi BCE. Skutkiem tego kąt FCD jest równy kątowi ACB. A zatem, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, skoro linia AC jest linią padania, linia CF będzie linią odbi-

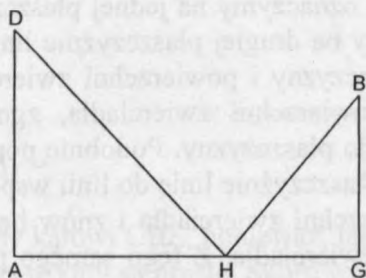
cia i kiedy na niej umieścimy oko, wtedy do niego będzie zachodziło odbicie. A to jest przedmiotem twierdzenia.

45. Forma punktu odbija się od zwierciadła płaskiego do tego samego oka tylko od jednego punktu [zwierciadła] (Alh. V,14).

Niech środkiem oka będzie punkt A, a punktem widzianym B, zaś ZH niech będzie powierzchnią zwierciadła płaskiego [rys. 22]. Twierdząc, że tylko od jednego punktu na powierzchni ZH odbija się forma punktu B do oka A. Gdyby bowiem było możliwe odbicie od dwóch punktów, to [niech] będą to punkty D i E. Poprowadźmy linię od środka oka, tzn. od punktu A do punktu widzianego B i niech to będzie linia AB. Ta linia AB, przedłużona poza jeden z punktów, którymi są punkty B lub A, albo przetnie się z powierzchnią zwierciadła albo będzie do niej równoległa. Jeżeli się przecina, to obojętnie, czy będzie ona prostopadła do powierzchni zwierciadła, od którego zachodzi odbicie, czy nie będzie prostopadła, zawsze to odbicie będzie musiało zachodzić tylko na jednej płaszczyźnie odbicia. Jeśli bowiem ta linia będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła, wtedy stanie się oczywiste, zgodnie z twierdzeniem 27 tej książki, że ta linia znajduje się na jednej płaszczyźnie odbicia, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 21 tej książki, [forma] tej linii odbija się po tej samej linii. Jeżeli natomiast linia AB nie będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła, chociaż jest linią prostą, poprowadzoną między dwoma punktami skrajnymi, które, zgodnie z twierdzeniem 25 tej książki, muszą znajdować się na jednej płaszczyźnie odbicia, prostopadłej do powierzchni zwierciadła, to linia AB także będzie leżała tylko na tej jednej płaszczyźnie. Bo jeżeli będzie leżała na tych dwóch płaszczyznach, to wtedy, zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła, będzie ona wspólnym przecięciem dla tych dwóch płaszczyzn, prostopadłych do powierzchni zwierciadła. Dlatego, jeśli oznaczymy na jednej płaszczyźnie punkt i od tego punktu poprowadzimy na drugiej płaszczyźnie linię do linii wspólnej dla tej pierwszej płaszczyzny i powierzchni zwierciadła, to ta linia będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła, zgodnie z definicją płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny. Podobnie poprowadźmy przez ten sam punkt na drugiej płaszczyźnie linię do linii wspólnej dla tej [drugiej] płaszczyzny i powierzchni zwierciadła i znów będzie ta linia prostopadła do powierzchni zwierciadła. Z tego samego punktu można by zatem poprowadzić dwie prostopadłe do tej samej powierzchni zwierciadła: a to jest niemożliwe i niezgodne z twierdzeniem I,20 tego dzieła. Wobec tego, zgodnie z EE XI,1, linia BA będzie tylko na jednej płaszczyźnie odbicia, prostopadłej do powierzchni zwierciadła płaskiego, i będą trzy punkty A, E, B na tej samej płaszczyźnie odbicia, a linie AE, ED, EB, zgodnie z twierdzeniem 25 tej książki, będą na tej płaszczyźnie

odbicia, na której znajduje się linia AB, i podobnie linie ED, DB i DA. Dlatego, zgodnie z EE XI,2, linie EA i EB będą na tej samej płaszczyźnie co linie DA i DB. Jednak, jak wynika z EE I,16, kąt AEH jest większy od kąta ADE, bo kąt zewnętrzny jest większy od kąta wewnętrznego, ale, jak wynika z twierdzenia 20 tej książki, kąt padania, którym jest kąt AEH, jest równy kątowi odbicia, którym jest kąt BED, a kąt ADE jest równy kątowi BDZ, a zatem kąt DEB jest większy od kąta ADE, równego temu kątowi, tzn. kątowi BDZ, co jest sprzeczne z EE I,16, bo kąt zewnętrzny, którym jest kąt BDZ, jest większy od kąta wewnętrznego, którym jest kąt BED, stąd i kąt ADH jest większy od kąta BED: w ten sposób ten sam kąt będzie zarówno i większy, i mniejszy od tego samego kąta, co jest niemożliwe. Od jednego więc punktu zwierciadła płaskiego zachodzi odbicie formy punktu B do oka A. Jeśli natomiast linia AB będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła płaskiego, to z twierdzenia 32 tej książki wynika, że tylko jeden punkt odbija się po tej linii do oka i tylko od jednego punktu zwierciadła. Bo jeśli linia AB nie przetnie się z jakąś z tych linii poprowadzonych na powierzchni zwierciadła, ale będzie do którejś z nich równoległa, to, zgodnie z EE XI,9, będzie ona równoległa do dowolnej równoległej linii, poprowadzonej na powierzchni zwierciadła. Niech więc będzie równoległa do linii HZ: linie AB i HZ, zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła, znajdą się na tej samej płaszczyźnie. Wobec tego musi być taki sam wniosek jak poprzednio, że kąt wewnętrzny będzie większy od kąta zewnętrznego, co jest niemożliwe. W rezultacie niemożliwe jest i to założenie, na podstawie którego wniosek został wyprowadzony. Wynika więc to, co zakładano.

46. Na zwierciadłach płaskich znaleźć punkt odbicia [formy] danego punktu widzianego do środka danego oka (Alh. V,12).

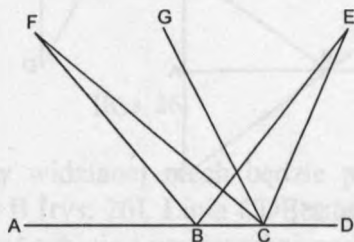


[Rys. 23]

Weźmy zwierciadło płaskie, na którego powierzchni niech będzie linia AG, a środkiem oka niech będzie punkt B, zaś punktem rzeczy widzianej niech będzie punkt D [rys. 23]. Poprowadźmy, jak podano w EE

XI,11, prostopadłe linie AD i GB prostopadłe do płaszczyzny zwierciadła. Podzielmy, jak podano w twierdzeniu I,119 tego dzieła, linię AG w punkcie H tak, aby stosunek linii AH do linii HG był taki jak linii AD do linii GB. Twierdzą, że forma punktu D odbija się do oka B od punktu H na zwierciadle. Poprowadźmy bowiem linie DH i BH. Z EE VI,6 i z założenia wynika, że trójkąt DHA jest równokątny z trójkątem HGB, bo kąt HAD jest równy kątowi HGB, gdyż obydwa są kątami prostymi, a stosunek linii AD do linii GB jest taki jak linii AH do linii HG. Również kąt AHD jest równy kątowi GHB. Zatem z punktu na zwierciadle, którym jest punkt H, odbija się forma punktu D do oka B, jak to wynika z twierdzenia 20 tej książki, bowiem kąt padania jest równy kątowi odbicia. Jeśli coś zakryje punkt H, np. wosk, smoła lub coś podobnego, to wtedy nie zobaczymy żadnego obrazu punktu D, gdy środek tego oka umieścimy w miejscu wcześniej podanym, to jest w punkcie B, ponieważ, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, jest rzeczą niemożliwą, aby odbicie zachodziło od innego punktu. Bowiem w przypadku innego punktu stosunek zmienia się, a kąty padania i odbicia stają się nierówne¹. Wynika więc to, co zakładano.

47. Linie odbicia [formy] tego samego punktu od różnych punktów zwierciadła płaskiego nie są równoległe, a jednak nie przecinają się w środku jednego oka. Z tego wynika, że jedno oko nie może widzieć obrazu tej samej formy, odbitego z różnych punktów tego samego zwierciadła płaskiego (Euc. Catopt. 4; Ptol. Catopt. I,7).



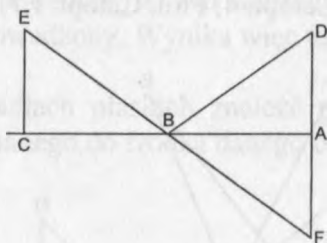
[Rys. 24]

Weźmy płaskie zwierciadło, na powierzchni którego niech się znajduje linia ABCD, na którą w dwóch punktach B i C z punktu rzeczy widzianej, którym jest punkt E, niech padają dwie linie [padania] EB i EC. Środkiem oka niech będzie punkt G [rys. 24]¹. Linia EB niech się odbije po linii BF, a linia EC po linii CG². Twierdzą, że linie [odbicia] CG i BF nie są równoległe i nie przetną się w środku jednego oka, chociaż znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Kąt padania bowiem, którym jest kąt ECD, jest równy kątowi odbicia, którym jest GCA, a kąt EBD jest równy

kątowi FBA, jak to wynika z 20 twierdzenia tej książki. Ponieważ bok BC trójkąta EBC rozciąga się do punktu D, to, zgodnie z EE I,16, kąt zewnętrzny ECD będzie większy od kąta wewnętrznego, którym jest kąt EBD. Z twierdzenia 20 tej książki wynika więc, że również kąt GCA jest większy od kąta FBA. A zatem, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie GC i BF nie są równoległe. Kąt zewnętrzny jest bowiem większy od kąta wewnętrznego, gdy linia AD dotyka obydwie linie GC i BF; a więc nie przetną się one w środku jednego oka. Bo jeśli przyjmiemy, że przetną się one w środku oka, którym jest punkt F, a linia EC odbije się do oka F po linii CF, to wtedy (ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 20 tej książki, kąt padania, którym jest EBD jest równy kątowi odbicia, którym jest kąt FBA³, a kąt ECD jest równy kątowi BCF, ale kąt FBA jest większy od kąta FCB, jak to wynika z EE I,16) kąt wewnętrzny EBC będzie większy od kąta zewnętrznego ECD, a to jest sprzeczne z tym samym twierdzeniem EE I,16 i jest niemożliwe. Wynika więc to, co zakładano.

Z tego wyraźnie wynika cały wniosek. Jeśli bowiem linie odbicia formy tego samego punktu nie mogą się przeciąć w środku jednego oka, to wtedy jest rzeczą oczywistą, że jedno oko nie może zobaczyć obrazu tej samej formy, odbitej z różnych punktów tego samego płaskiego zwierciadła. A to jest całe twierdzenie.

48. Znaleźć miejsce obrazu na zwierciadłach płaskich, gdy forma punktu odbiła się do środka oka.



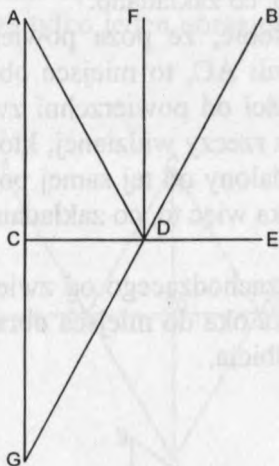
[Rys. 25]

Wzmy płaskie zwierciadło. Na jego powierzchni niech będzie linia ABC [rys. 25]. Niech będzie tak, aby forma punktu rzeczy widzianej, którym jest [punkt] D, odbiła się od punktu B na zwierciadle do środka oka, którym jest punkt E. Poprowadźmy również linię padania, którą jest linia DB i linię odbicia, którą jest linia BE. Twierdzą, że jest możliwe znalezienie miejsca, w którym jest widoczna forma punktu D.

Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 27 tej książki, punkty D, B, E znajdują się na tej samej płaszczyźnie, to na podstawie EE XI,1 i XI,2 jest oczywiste, że i linia ABC oraz linie DB i BE znajdują się na tej sa-

mej płaszczyźnie. Wyobraźmy więc sobie, że linia ABC rozciąga się nieprzerwanie i że z punktu E zostanie do niej poprowadzona, jak podano w EE I,12, prostopadła, którą niech będzie linia EC, i [poprowadzimy], jak podano w EE I,31, do tej linii [ABC] prostopadłą z punktu D, którą niech będzie linia DA. Ponieważ linia EB przecina się z linią EC w punkcie E, jest oczywiste na podstawie twierdzenia I,2 tego dzieła, że przetnie się ona z przedłużoną linią DA. Miejscem przecięcia niech będzie punkt F. Utrzymuję na podstawie twierdzenia 37 tej księgi, że punkt F jest miejscem obrazu formy punktu D. Wynika więc to, co zakładano.

49. Miejsca obrazu znajduje się w tej samej odległości pod powierzchnią zwierciadła płaskiego jak punkt widziany ponad tą samą powierzchnią zwierciadła płaskiego (Euc. Catopt. 19; Alh. V,11).



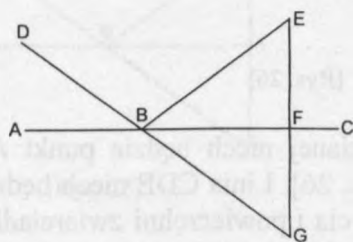
[Rys. 26]

Punktem rzeczy widzianej niech będzie punkt A, a środkiem oka niech będzie punkt B [rys. 26]. Linia CDE niech będzie wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła płaskiego. Niech D będzie punktem odbicia. Z punktu D poprowadźmy, jak podano w EE I,11, linię DF prostopadłe do linii CDE lub, jak podano w EE XI,12, do całej powierzchni zwierciadła płaskiego. Przez punkt A poprowadźmy, zgodnie z EE XI,11, prostopadłą do powierzchni zwierciadła, którą niech będzie linia AC, i przedłużmy ją poza zwierciadło. Poprowadźmy linię padania, którą niech będzie linia AD, oraz linię odbicia, którą niech będzie linia BD. Z twierdzenia 27 tej księgi wynika zatem, że linie AD, FD, BD znajdują się na płaszczyźnie odbicia. Ponieważ linia FD jest równoległa do linii AC, co wynika z EE I,28 albo EE XI,6, a linia BD przecina

się z linią FD w punkcie D , co wynika z twierdzenia I,2 tego dzieła, zaś linia BD po jej przedłużeniu przetnie się z przedłużoną linią AC (niech się więc przetnie w punkcie G), to twierdzą, że linia GC jest równa linii AC . Skoro kąt BDE jest równy kątowi ADC , zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, bo są one kątami padania i odbicia, natomiast, zgodnie z EE I,15, kąt BDE jest równy kątowi CDG , gdyż są to kąty położone naprzeciw siebie, wobec tego kąt ADC jest równy kątowi CDG , zaś kąt ACD jest równy kątowi DCG , gdyż jeden i drugi jest kątem prostym. Dlatego, jak wynika z EE I,32, kąt CAD trójkąta CAD jest równy kątowi CGD trójkąta CGD . Zgodnie zatem z EE VI,4, boki zawierające kąty równe są proporcjonalne, ale bok CD jest równy sobie samemu, stąd pozostałe boki, mające odpowiednio między sobą kąty równe, będą równe, np. bok AC bokowi CG , a bok AD bokowi DG ¹. Skoro w punkcie G znajduje się miejsce obrazu, jak wynika z twierdzenia 37 tej księgi, a linia CG jest równa linii AC , wynika więc to, co zakładano.

Jeśli zatem wyobrazimy sobie, że poza powierzchnią zwierciadła odetniemy linię CG , równą linii AC , to miejsce obrazu zawsze będzie w punkcie G w takiej odległości od powierzchni zwierciadła płaskiego pod zwierciadłem, na ile punkt rzeczy widzianej, którego forma widoczna jest na zwierciadle, jest oddalony od tej samej powierzchni zwierciadła ponad zwierciadłem. Wynika więc to, co zakładano.

50. Podczas każdego odbicia, zachodzącego od zwierciadeł płaskich, linia poprowadzona od środka oka do miejsca obrazu jest równa połączonym liniom padania i odbicia.

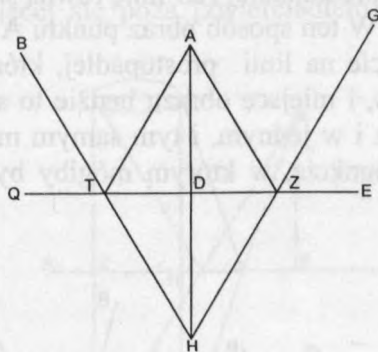


[Rys. 27]

Na zwierciadle płaskim niech będzie linia ABC [rys. 27]. Niech środkiem oka będzie punkt D , a punktem rzeczy widzianej niech będzie E . Odbicie formy punktu E do oka D niech dokona się od punktu na zwierciadle płaskim, którym niech będzie punkt B . Będzie więc linia padania, którą jest linia EB i linia odbicia, którą jest linia BD . Niech miejscem obrazu będzie punkt G . Ten punkt, zgodnie z twierdzeniem 37 tej księgi, będzie więc na przecięciu [przedłużonej] linii odbicia DB z prostopadłą

padania. Niech więc będzie tak, aby poprowadzona prostopadła EG przecięła linię AC w punkcie F. Skoro, jak wynika z twierdzenie 20 tej książki, kąt padania, którym jest kąt EBF, jest równy kątowi odbicia, którym jest kąt ABD, a zgodnie z EE I,15, kąt GBF równy kątowi ABD, to kąt GBF jest równy kątowi EBF, a kąt EFB jest równy kątowi GFB, ponieważ obydwa kąty są kątami prostymi. W rezultacie, zgodnie z EE I,32, trójkąty BGF i BEF są równokątne, a jak wynika z EE VI,4, ich boki, tworząc kąty równe, są proporcjonalne, lecz bok BF jest taki sam [w obu trójkątach], zatem bok GB jest równy bokowi BE. Linia DG, poprowadzona przez środek oka do miejsca obrazu G, jest więc równa obydwu połączonym liniom DB i BE. A to jest przedmiotem twierdzenia.

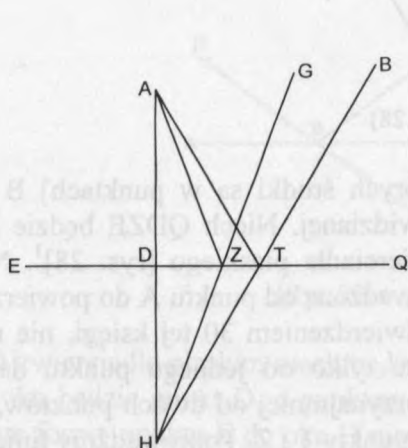
51. Gdy jedno i drugie oko spostrzega [formę] jednego punktu, to na zwierciadle płaskim będzie to samo miejsce obrazu dla dwoje oczu. Z tego wynika, że tylko jeden obraz ukazuje się jednemu i drugiemu oku (Alh. V,15).



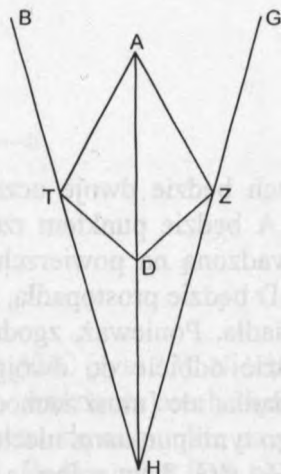
[Rys. 28]

Niech będzie dwoje oczu, [których środki są w punktach] B i G. Niech A będzie punktem rzeczy widzianej. Niech QDZE będzie linią, poprowadzoną na powierzchni zwierciadła płaskiego [rys. 28]¹. Niech linia AD będzie prostopadłą, poprowadzoną od punktu A do powierzchni zwierciadła. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 30 tej książki, nie może zachodzić odbicie do dwojga oczu tylko od jednego punktu danego zwierciadła, ale [musi zachodzić] przynajmniej od dwóch punktów, wobec tego tymi punktami niech będą punkty T i Z. Poprowadźmy linie BT, AT, AZ i ZG. Z twierdzenia 25 tej książki wynika, że linie BT i AT oraz AD znajdują się na tej samej płaszczyźnie odbicia, prostopadłej do powierzchni zwierciadła. Podobnie linie AD, AZ i ZG znajdują się na tej samej płaszczyźnie, a linia DT, zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła,

jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia, którą jest [płaszczyzna] ADTB, i powierzchni zwierciadła. Również linia DZ jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia, którą jest [płaszczyzna] ADZG, i powierzchni zwierciadła. Jeśli zatem obydwie linie odbicia, którymi są linie BT i GZ, znajdują się na tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do powierzchni zwierciadła, to jest oczywiste, że linia TDZ będzie jedną linią prostą, dlatego że, jak wykazano w EE XI,3, wspólnym przecięciem powierzchni zwierciadła i dowolnej płaszczyzny do niej prostopadłej jest linia prosta. Wtedy prostopadła AD będzie na tej samej płaszczyźnie co dwie linie odbicia, którymi są linie TB i GZ, i będzie między nimi² [rys. 28] albo poza nimi na innej płaszczyźnie [rys. 28a]³. Jakkolwiek będzie przypadek, zawsze linia odbicia, którą jest BT, odetnie po jej przedłużeniu od prostopadłej AD, przedłużonej poza zwierciadło, część równą linii AD (zgodnie z twierdzeniem 49 tej książki), którą jest linia DH, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 27 tej książki, linie BT i AD zawsze znajdują się na jakiejś jednej płaszczyźnie, jak wykazano powyżej. Podobnie, na mocy twierdzenia 49 tej książki, linia GZ przedłużona poza zwierciadło odetnie od przedłużonej prostopadłej AD linię równą samej linii AD oraz odetnie ją w punkcie H. W ten sposób obraz punktu A będzie dostrzeżony w tym samym punkcie na linii prostopadłej, którym jest punkt H, przez jedno i drugie oko, i miejsce obrazu będzie to samo. Wobec tego będzie tylko jeden obraz i w jednym, i tym samym miejscu zobaczymy go dwójgiem oczu, w punkcie, w którym mógłby być on dostrzeżony tylko jednym okiem.



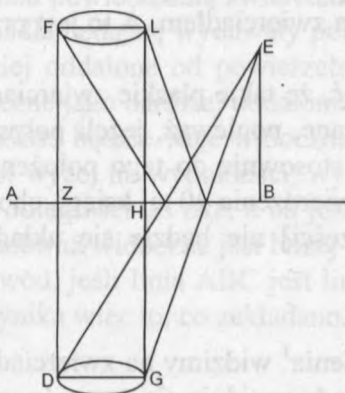
[Rys. 28a]



[Rys. 28b]

Jeśli natomiast punkty T i Z nie będą się znajdowały na tej samej płaszczyźnie odbicia [rys. 28b]⁴, to po przeprowadzeniu tego samego dowodu [można wykazać, że] zobaczymy tylko jeden obraz i będzie tylko jedno miejsce obrazu jak poprzednio. Zawsze bowiem jedna i druga linia odbicia odetnie od prostopadłej, po jej przedłużeniu, część równą tej linii AD, a zgodnie z twierdzeniem 37 tej księgi, przecięcie obydwu linii odbicia z prostopadłą będzie w tym samym punkcie H, i to przecięcie zawsze będzie miejscem obrazu. A to jest założeniem. Jeśli bowiem środki dwojga oczu, którymi są punkty B i G, znajdą się po tej stronie rzeczy widzianej, którą jest A, to zawsze można przeprowadzić dowód w ten sam sposób, skoro linie odbicia przetną się z prostopadłą w tym samym punkcie oraz będzie to samo miejsce obrazu i ten sam obraz dojdzie do oczu.

52. Na zwierciadłach płaskich nie zmienia się kształt rzeczy widzianych, położenie oraz ich szerokość i długość. Z tego wynika, że obraz każdej rzeczy widzianej na zwierciadle płaskim jest taki sam jak kształt rzeczy znajdującej się poza [zwierciadłem] (Euc. Catopt. 19; Alh. VI,2).



[Rys. 29]

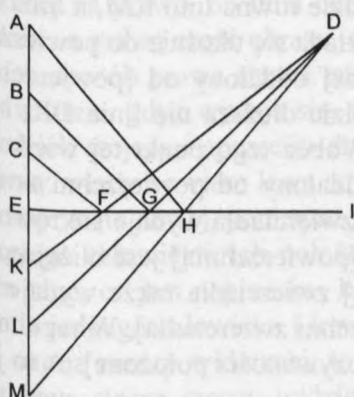
Weźmy zwierciadło płaskie. Wspólnym przecięciem powierzchni tego zwierciadła i płaszczyzny odbicia niech będzie linia AB [rys. 29]. Dwoma punktami skrajnymi dowolnej rzeczy widzianej niech będą punkty F i L. Poprowadźmy prostopadłą do powierzchni zwierciadła przez punkt L, którą niech będzie linia LH, a przez punkt F prostopadłą, którą niech będzie FZ. Dwa punkty Z i H, zgodnie z twierdzeniem 27 tej księgi, znajdują się na płaszczyźnie odbicia. Te prostopadłe przedłużmy pod [powierzchnię] zwierciadła w taki sposób, aby linia HG była równa

linii LH, a linia ZD równa linii FZ. Środkiem oka niech będzie punkt E. Jak podano w EE XI,11, poprowadźmy przez punkt E prostopadłą do [powierzchni] zwierciadła, którą niech będzie linia EB. Z twierdzenia 28 tej księgi wynika, że forma punktu L odbija się do oka E od jakiegoś punktu zwierciadła leżącego na linii HB, a miejscem jej obrazu jest punkt G, będący, zgodnie z twierdzeniem 49 tej księgi, w takiej odległości od powierzchni zwierciadła poniżej [powierzchni] zwierciadła, w jakiej jest punkt L powyżej [powierzchni] zwierciadła. Podobnie forma punktu F odbija się do oka E od jakiegoś punktu linii ZB, a miejscem obrazu jest punkt D. Również po przeprowadzeniu linii FL i linii DG jest rzeczą oczywistą, że [forma] dowolnego punktu linii FL odbija się do oka E i podobnie miejsce jego obrazu jest w takiej odległości od powierzchni zwierciadła poniżej [powierzchni] zwierciadła, w jakiej ten punkt jest powyżej [powierzchni] zwierciadła. Wydaje się więc, że każdy punkt linii FL leży w takiej odległości [od zwierciadła] pod [powierzchnią] zwierciadła, w jakiej ten punkt leży ponad [powierzchnią] zwierciadła. Zatem, jeśli linia FL będzie prosta, będzie też prosta linia DG, a jeśli linia FL będzie łukiem koła, również linia DG będzie łukiem koła, zawsze o takim samym zakrzywieniu i usytuowaniu¹. Będzie się więc zawsze wydawało, że linia FL [widziana w zwierciadle] ma tę samą wielkość oraz kształt, jaki ma poza zwierciadłem. A to jest przedmiotem twierdzenia.

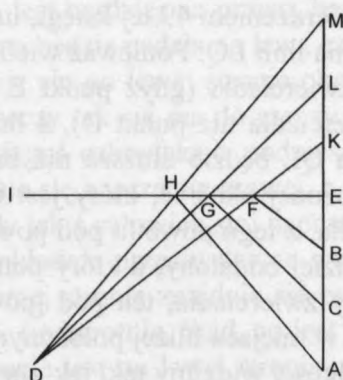
Trzeba jednak przyjąć, że takie płaskie zwierciadło musi być w równym stopniu wypolerowane, ponieważ, jeżeli połysk zbyt słabo ułoży się wzdłuż albo wszcz, to stosownie do tego położenia ułoży się również forma, jak to wynika z twierdzenia 40 tej księgi, chociaż właściwe dla tej formy położenie [jej części] nie będzie się układało ani wszcz, ani wzdłuż.

53. Wypukłości i wgłębienia¹ widzimy na zwierciadłach płaskich w [postaci] odwróconej, kiedy znajdują się one w [pozycji] prostopadłej do powierzchni tych zwierciadeł (Euc. Catopt. 7).

Przyjmijmy, że spostrzeżona została wypukłość, którą oznaczmy jako ABCE. Niech środkiem oka będzie punkt D, a wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła płaskiego niech będzie linia EFGHI [rys. 30]. Niech forma punktu A pada po linii AH, a odbija się po linii HD. Forma punktu B niech pada po linii BG, a odbija się po linii GD, zaś forma punktu C niech pada po linii CF, a odbija się po linii FD. Twierdzą, że wypukłość EA będzie widać jako odwróconą. Po przeprowadzeniu linii EA, która jest prostopadłą do linii EI, pod [powierzchnią] zwierciadła i po przeprowadzeniu wszystkich linii odbicia tak, aby



[Rys. 30]



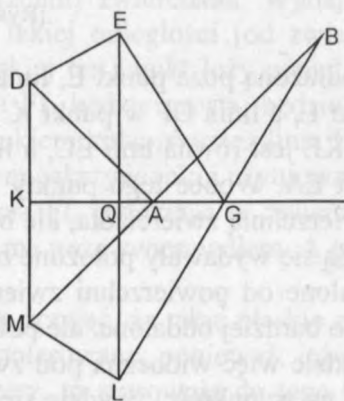
[Rys. 30a]

się przecięły z linią AE, przedłużoną poza punkt E, linia DH niech pada w punkt M, linia DG w punkt L, a linia DF w punkt K. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że linia KE jest równa linii EC, a linia LE linii EB, zaś linia ME równa jest linii EA. Wobec tego punkty wypukłości EA, które znajdują się ponad powierzchnią zwierciadła, ale bliżej niej, to pod powierzchnią zwierciadła będą się wydawały położone bliżej powierzchni, zaś punkty bardziej oddalone od powierzchni zwierciadła, [choć są] wyżej, będą widoczne jako bardziej oddalone, ale położone niżej, pod zwierciadłem. Wypukłość będzie więc widoczna pod zwierciadłem jako odwrócona, bo co jest wyżej na wypukłości, wydaje się niżej, ponieważ widać to w większej odległości od oka, a co jest niżej w wypukłości, to wydaje się wyżej, ponieważ widoczne jest bliżej oka. W ten sposób można przeprowadzić dowód, jeśli linia ABC jest linią wgłębienia dowolnej rzeczy [rys. 30a]². Wynika więc to, co zakładano.

54. Wielkości ukośne względem zwierciadeł płaskich ukazują się w taki sposób, w jaki są położone względem zwierciadła (Euc. Catopt. 9).

Niech wielkość DE położona ukośnie będzie tak nachylona do powierzchni zwierciadła płaskiego, aby jej punkt, którym jest E, był bardziej oddalony od tej powierzchni zwierciadła, zaś wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie linia KQAG, a środkiem oka niech będzie punkt B [rys. 31]. Forma punktu D niech pada na samo zwierciadło po linii DA i niech się odbija po linii AB do środka oka, zaś forma punktu E niech pada po linii EG, a do oka niech się odbija po linii GB. Przedłużmy prostopadłą DK oraz linię odbicia, którą jest BA, tak, aby przecięły się one w punkcie M, a prostopadłą EQ

przedłużmy tak, aby przecięła się z linią BG w punkcie L. Zgodnie z twierdzeniem 49 tej książki, linia DK będzie równa linii KM, a linia EQ równa linii LQ. Ponieważ wielkość DE uклада się ukośnie do powierzchni zwierciadła (gdyż punkt E jest bardziej oddalony od [powierzchni] zwierciadła niż punkt D), a linia EQ będzie dłuższa niż linia DK, stąd linia QL będzie dłuższa niż linia KM. Wobec tego punkt tej wielkości położonej ukośnie, który jest bardziej oddalony od powierzchni zwierciadła, z tego powodu pod powierzchnią zwierciadła wydaje się również bardziej oddalony, a który punkt ponad [powierzchnią] jest bliżej położony zwierciadła, ten pod [powierzchnią] zwierciadła także wydaje się być w miejscu bliżej położonym [powierzchni zwierciadła]. W rezultacie wielkości widzimy tak, jak one są [w rzeczywistości położone]. A to jest to, co zakładano.

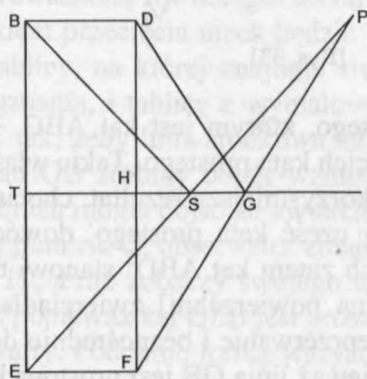


[Rys. 31]

55. W zwierciadłach płaskich prawa strona wydaje się lewą, a lewa prawą (Euc. Catopt. 19).

Niech będzie zwierciadło płaskie GST. Rzecz widziana niech będzie DB, a liniami padania niech będą linie DG i BS, zaś środkiem oka niech będzie punkt P [rys. 32]¹. Liniami odbicia niech będą linie PG i PS. Niech będzie tak, aby linia odbicia, którą jest PG, przecięła się w punkcie F z prostopadłą padania, którą jest DH, a linia odbicia, którą jest PS, niech się przetnie z prostopadłą BT w punkcie E. Poprowadźmy linię FE, która, zgodnie z twierdzeniem 51 tej książki, jest obrazem rzeczy widzianej, i jest nią linia DB: wobec tego prawa strona będzie się wydawała lewą, a lewa prawą. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 33 tej książki, odbicie zachodzi zawsze do kąta większego od kąta padania, tzn. zachodzi w stronę przeciwną do tej, z której [forma] pada, jest oczywiste, że prawa strona rzeczy widzianej będzie zawsze widoczna po linii odbicia

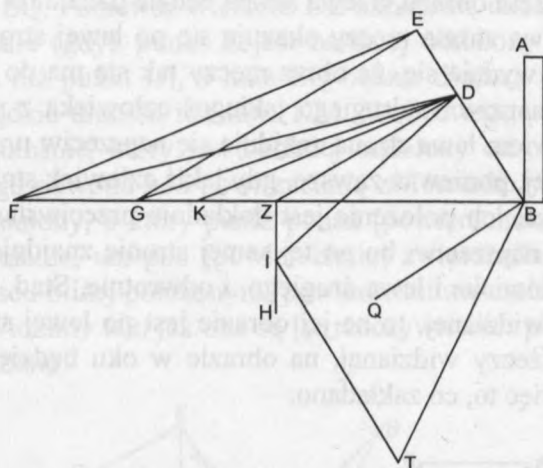
[położonej] bardziej na lewo, a lewa strona po linii odbicia [położonej] bardziej na prawo, bo linia odbicia, która jest bardziej na prawo, będzie padała na prawą część obrazu, a lewa strona będzie padała na lewą część. W ten sposób prawa strona rzeczy ukazuje się po lewej stronie obrazu, i odwrotnie, gdyż wydaje się, że obraz rzeczy tak się ma do rzeczy, jak człowiek stojący naprzeciw drugiego jakiegoś człowieka z podniesioną twarzą: wtedy bowiem lewa strona znajduje się naprzeciw prawej, a prawa naprzeciw lewej, ponieważ zawsze, gdy jakiś człowiek stoi naprzeciw drugiego człowieka, ich położenie jest dokładnie przeciwstawne względem tego, co jest naprzeciw, bo po tej samej stronie znajduje się prawa strona jednego człowieka i lewa drugiego, i odwrotnie. Stąd, co jest prawą stroną rzeczy widzianej, to na jej obrazie jest po lewej stronie, a co jest lewą stroną rzeczy widzianej, na obrazie w oku będzie po prawej stronie. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 32]

56. Zwierciadło płaskie może być w taki sposób usytuowane, że patrzący nie widzi swojego własnego obrazu, a widzi obraz innej rzeczy, niewidocznej [bezpośrednio] (Ptol. Catopt. II,9).

Niech AB będzie drewnianą tablicą umocowaną prostopadłe do [płaszczyzny] horyzontu albo do płaszczyzny równoległej do [płaszczyzny] horyzontu bądź inaczej jakoś ustawioną: i niech tą [płaszczyzną] będzie powierzchnia BG [rys. 33]¹. Weźmy zwierciadło płaskie, na którym niech będzie linia DB, i niech będzie ono kwadratowe. Ponieważ tablica AB jest usytuowana prostopadłe do płaszczyzny GB, poprowadźmy linię GB tak, aby dotknęła [tablicy]. Jest więc rzeczą oczywistą, że kąt ABG jest prosty. Podzielmy zatem, jak podano w twierdzeniu I,28 tego dzieła, ten kąt prosty na trzy równe części. Nachylmy zwierciadło DB w stosunku do tablicy AB w taki sposób, aby ten kąt DBA był trzecią



[Rys. 33]

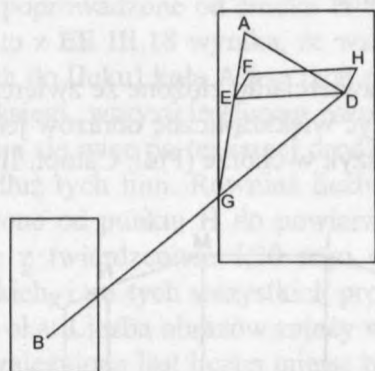
częścią jednego kąta prostego, którym jest kąt ABG . Kąt DBG będzie więc wielkości dwóch trzecich kąta prostego. Takie właśnie mechaniczne działanie ma zaletę i daje korzystniejszy rezultat, chociaż jest oczywiste, że jakkolwiek odetniemy część kąta prostego, dowód doprowadzi do tego samego wyniku. Niech zatem kąt ABD^2 stanowi trzecią część kąta prostego. Poprowadźmy [na powierzchni] zwierciadła linię, którą jest linia BD , poza punkt D nieprzerwanie i bezpośrednio do punktu, którym niech będzie punkt E . Ponieważ linia GB jest prostopadła do linii AB , to właśnie z linią [na powierzchni] zwierciadła, którą jest linia DB , tworzy kąt ostry. Z punktu G , znajdującego się na płaszczyźnie, która może być poprowadzona prostopadle do powierzchni zwierciadła, poprowadźmy, jak podano w EE I,12, linię prostopadłą do linii BE ; i niech to będzie linia GE . Wobec tego kąt BEG będzie prosty. Miejscem oka niech będzie natomiast punkt G , od którego poprowadźmy linię GD do punktu D . Również od punktu D poprowadźmy linię, która padając na linię BG , niech padnie na punkt Z tak, aby kąt ZDG był równy kątowi EGD o wierzchołku na końcu linii GD , co można wykonać na podstawie EE I,23. Linia ZD będzie więc równoległa do linii GE , jak to wynika z EE I,27. Stąd na podstawie EE XI,8 linia ZD , poprowadzona prostopadle do powierzchni zwierciadła, będzie prostopadłą do wspólnego przecięcia płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, a tym przecięciem jest linia BD . Kąt ZDB , jak wynika z wcześniejszych rozważań oraz EE I,29, jest więc prosty, równy kątowi GED . Również z punktu Z poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, linię ZH , prostopadłą do płaszczyzny GB , i na

końcu linii ZD w punkcie D umieścimy [wierzchołek] kąta, równego kątowi GDZ, i niech to będzie kąt ZDI. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia I,2 tego dzieła, linia DI przetnie się z linią ZH dlatego, że linia DI po jej przedłużeniu poza punkt D przetnie się z linią AB³, jak to wynika z poprzednich rozważań oraz twierdzenia I,14 tego dzieła, to przecięcie linii DI i ZH niech nastąpi w punkcie I. Poprowadźmy, jak podano w EE I,31, przez punkt I linię równoległą do linii BD, i niech to będzie linia IT, a z punktu B poprowadźmy, jak podano w EE XI,12, prostopadłą do powierzchni zwierciadła, i niech to będzie linia BQ. Jak wynika z EE I,28, linia BQ będzie równoległa do linii GE, a zatem, na mocy EE XI,8, linia BQ, podobnie jak i linia GE, została poprowadzona prostopadle do powierzchni zwierciadła, którą jest DB. W punkcie B, końcu linii QB, umieścimy [wierzchołek] kąta, równego kątowi GBQ, i niech to będzie kąt QBT. Linia BT, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie się zatem z linią poprowadzoną równoległe do linii DB przez punkt I, którą jest linia IT. Punktem przecięcia niech będzie T. Wykonajmy tablicę IT. Wymalujmy na tablicy, na której znajduje się linia IT, dowolny obraz według naszego uznania, i tablicę z wymalowanym obrazem umieścimy w miejscu linii IT tak, żeby linia środkowa na tablicy zbiegła się z linią ZI. Na powierzchni GB zrobmy otwór wzdłuż linii ZB tak, aby forma wymalowanego obrazu mogła dojść do zwierciadła DB. Ponieważ środek oka znajdzie się w punkcie G, obserwator zobaczy formę wymalowanego obrazu na tablicy IT, a nie zobaczy swojego własnego wizerunku. A na to jest taki dowód: ponieważ kąt GEB jest prosty, to z EE I,16 wynika, że kąt GDB jest rozwarty. Podobnie formy wszystkich punktów albo twarzy tego obserwatora, które padają na zwierciadło DB, na podstawie tego samego twierdzenia 16, tworzą kąty rozwarte⁴. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 20 tej książki, kąty padania są zawsze równe kątom odbicia, to z EE I,13 wynika, że nigdy nie nastąpi odbicie formy samego obserwatora do środka oka, ale zawsze do punktów, które znajdują się pod okiem, co wynika z twierdzenia 33 tej książki. Nigdy więc ktoś, kogo środek oka znajduje się w punkcie G, nie zobaczy swojego własnego wizerunku na zwierciadle płaskim, które ma takie usytuowanie. Jeśli oko odśuniemy od zwierciadła do dowolnego punktu poza punkt G, np. do punktu F, jest rzeczą oczywistą, że kąt FEB jest większy niż kąt prosty, ale i kąt FDB jest większy od kąta FEB, jak to wynika z EE I,16. Wobec tego odbicie nigdy nie będzie zachodziło do punktu F, ale zawsze do innego punktu poniżej linii. Podobnie będzie również, gdy oko zbliżymy do zwierciadła w dowolnym punkcie na linii GZ, z wyjątkiem punktu Z. Obserwator nie zobaczy nigdy swego własnego wizerunku, bo jedynie [formy] padające po tej prostopadłej, którą jest linia ZD, jak wynika to z wcześniejszych rozważań, odbijają się, zgodnie z twierdzeniem 21 tej

księgi, po tej samej drodze. Z tego powodu, gdy środek oka znajdzie się w punkcie Z, obserwator zobaczy formę swojego własnego oka, odbitą od zwierciadła płaskiego w ten sposób ustawionego, a nie zobaczy innej części twarzy, ponieważ tylko prostopadła jest jedną jedyną linią, która odbija się po swojej własnej drodze. W ten sposób zachodzi odbicie [formy] wyłącznie jednego punktu, a nie ma odbicia [form] innych punktów. Jeśli zatem oko z punktu G przybliży się do zwierciadła w punkcie K, który leży między punktami G i Z, i jeśli od punktu K poprowadzimy linię do punktu D (i niech to będzie linia KD), to z twierdzenia I,¹⁴ tego dzieła i wcześniejszych wywodów wynika, że linie DK i EG przetną się poza linią GK, bo tylko linia DZ jest równoległa do linii EG, zaś kąt GED jest prosty i kąt ZDB jest także prosty: wobec tego kąt KDB jest rozwarty, a odbite [formy] dojdą do innego punktu poniżej punktu K. Z punktu Z natomiast, jak powiedziano wcześniej, odbicie dokona się do samego punktu Z z tego powodu, że linia ZD, będąc równoległą do linii GE, jest prostopadła do linii DB, zgodnie z EE I,²⁹ i założeniem. Podobnie jest, gdy umieścimy oko w dowolnym punkcie linii ZB. Ponieważ od dowolnego punktu tej linii można poprowadzić prostopadłą do powierzchni zwierciadła albo do linii DB, a każda z tych linii, zgodnie z 21 twierdzeniem tej księgi, odbija się do siebie samej, to stąd wynika, że po umieszczeniu oka na linii GZ obserwator nie zobaczy obrazu siebie samego, skoro, jak to stwierdziliśmy, wyłącznie prostopadła w jednym punkcie odbija się do oka i nie widać żadnego innego punktu formy. Ponieważ kąt IDZ jest równy kątowi ZDG, a linia ZD jest prostopadła do powierzchni zwierciadła DB, wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, forma punktu I odbija się od punktu D na zwierciadle do oka, znajdującego się w punkcie G. Skoro kąt TBQ jest równy kątowi GBQ, jak to wynika z wcześniejszych rozważań, a linia BQ jest prostopadła do powierzchni zwierciadła, to z twierdzenia 20 tej księgi wynika, że forma punktu T odbija się od punktu B na zwierciadle do oka w punkcie G, a zatem, jak wynika z twierdzenia 34 tej księgi, forma całej linii IT odbija się od zwierciadła DB do oka w punkcie G. Nie będzie zaś widać samej pomalowanej tablicy IT, ponieważ jest pod powierzchnią, na której znajdują się zwierciadło i oko. A to można zauważyć, jeśli wzdłuż linii ZB zostanie postawiony na ziemi mur, na dole wydrążony, a w górze naprzeciw zwierciadła otwarty, tak wysoki jak obserwator. Na tym murze umieścimy wymalowaną deskę, którą jest IT, równoległe do zwierciadła, a oko niech się znajdzie w takiej odległości od zwierciadła, w jakiej jest punkt G, i zabezpieczmy je w taki sposób, aby nie mogło bliżej się przesunąć, bo wtedy wszystkie formy punktów z wymalowanego obrazu [bezpośrednio] wpadną do oka. Według naszej pomysłowości umieścimy wymalowaną tablicę w taki sposób, aby w ogóle nie była widoczna,

a zwierciadło w stosunku do światła niech będzie ustawione tak, aby powietrze wokół zwierciadła było oświetlone. Podobnie wymalowana tablica niech będzie w takim miejscu, aby padało na nią światło, ponieważ w przeciwnym wypadku, ukrywając się w cieniu, nie będzie mogła być widoczna, a dzięki pośrednictwu światła forma tablicy będzie się rozprzestrzeniać przez ośrodek i forma dojdzie do zwierciadła i odbije się do oka. Wynika więc to, co zakładano.

57. Można umieścić w odpowiednim pomieszczeniu jedno zwierciadło płaskie w taki sposób, że będzie widać na nim to, co dzieje się w innym domu albo w sąsiedztwie i na ulicach (Ptol. Catopt. II, 7).

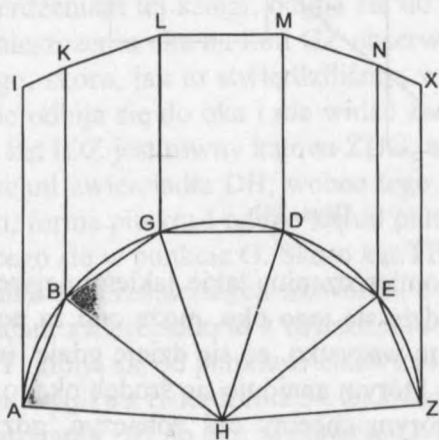


[Rys. 34]

Wybermy w pomieszczeniu takie jakieś miejsce dla obserwatora, w którym, gdy znajdzie się jego oko, może ono za pomocą zwierciadła płaskiego zobaczyć to wszystko, co się dzieje gdzie indziej. To miejsce w pomieszczeniu, w którym znajduje się środek oka, oznaczmy punktem A, a miejsce, w którym chcemy coś zobaczyć, gdzie się coś dzieje, oznaczmy punktem B [rys. 34]¹. W pomieszczeniu obserwatora niech będzie szpara albo okno naprzeciwko miejsca B, a tym otworem niech będzie G. Poprowadźmy linię BG. Przedłużmy ją w sposób ciągły i bezpośredni do wnętrza pomieszczenia do jakiegoś punktu, którym niech będzie punkt D. A tego można dokonać za pomocą astrolabium bądź kwadrantu albo innego przyrządu, pozwalającego oczom na sprawdzenie [tego ustawienia]. Bo jeśli oko umieścimy w punkcie B i będziemy przesuwali wzrok, podczas gdy przyrząd pozostanie nieruchomy, to przez te same nieporuszone otwory padnie on w pomieszczeniu na punkt D. Poprowadźmy więc linie DA i GA. Podzielmy linię GA, zgodnie z twier-

dzeniem I,119 tego dzieła, w punkcie E tak, aby stosunek linii AE do EG był taki sam jak linii AD do linii DG: obydwie te linie zostały wyznaczone przez zastosowanie przyrządu. Poprowadźmy linię ED. Linia DE, jak wynika z EE VI,3, podzieli więc kąt ADG na równe części. Umieśćmy, na mocy odwróconego twierdzenia EE XI,11, zwierciadło prostopadłe do linii DE w punkcie D i na tym zwierciadle niech będzie linia FH. Z punktu D na zwierciadle odbije się więc forma punktu G do oka A, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, a zatem również forma punktu B [odbije się] do oka na mocy tego samego twierdzenia 20 tej księgi, bo odległość nie zmienia natury odbicia w przypadku tej samej linii. Dlatego oko wraz ze swoim środkiem, znajdując się w pomieszczeniu w punkcie A, zobaczy wszystko, co będzie się znajdowało i co będzie się działo w miejscu B, obojętnie czy to będzie inny dom, czy sąsiedztwo, czy ulica. A to jest to, co zakładano.

58. Można skonstruować zwierciadło złożone ze zwierciadeł płaskich, na którym uda się zobaczyć większą liczbę obrazów jednego obserwatora, tworzących jakby szysk w chórze (Ptol. Catopt. II,6).



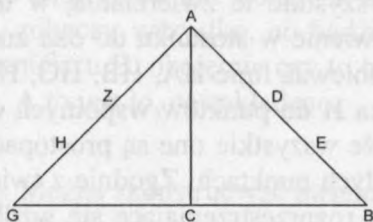
[Rys. 35]

Przyjmijmy łuk koła AZ, którego środkiem niech będzie punkt H [rys. 35]¹. Ponieważ zakładamy, że łuk AZ jest nieokreślony, niech będzie tak, aby dla przykładu został on podzielony na pięć równych części albo na tyle części, na ile się nam podoba, w taki sposób, aby łukowi AB równe były łuki: BG, GD, DE, EZ. Poprowadźmy cięciwy: AB, BG, GD, DE, EZ. One wszystkie, zgodnie z EE III,29, będą równe. Od środka H poprowadźmy linie HA, HB, HG, HD, HE, HZ. Po usunięciu łuków [opartych] na cięciwach AB i BG i pozostałych łuków ustawmy zwier-

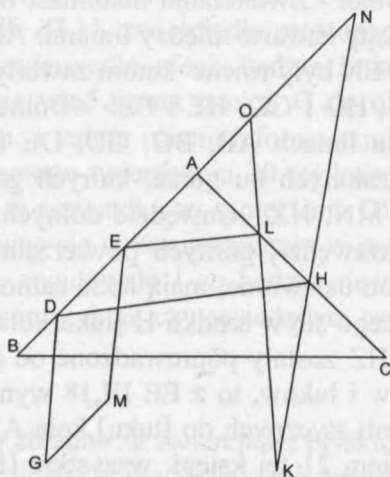
ciadła płaskie czworokątne [o powierzchniach] równoległych tak, aby ich boki AI, BK, GL, DM, EN, ZX były równoległe, a zwierciadła były ze sobą połączone w taki sposób, żeby ich boki: BK, GL, DM i EN były wspólne. <Zwierciadła natomiast niech będą w ten sposób zestawione, aby kąty zawarte między liniami: AI i IK, BK i KL, GL i LM, DM i NM, EN i EX były równe kątom zawartym pomiędzy liniami: HA i AB, HB i BG, HG i GD, HE i EZ>². Dolne [krawędzie] powierzchni opierające się na liniach AB, BG, GD, DE i EZ stanowią podstawę zwierciadeł wzniesionych ku górze, których górne [krawędzie] są liniami IK, KL, LM, MN, NX. Krawędzie dolnych powierzchni niech będą równoległe do [krawędzi] górnych powierzchni. Wszystkie te zwierciadła, w taki sposób ustawione, mają takie samo ustawienie w stosunku do oka znajdującego się w środku H [łuku koła]. Ponieważ linie HA, HB, HG, HD, HE, HZ zostały poprowadzone od środka H do punktów wspólnych dla cięciw i łuków, to z EE III,18 wynika, że wszystkie one są prostopadłe do linii stycznych do [łuku] koła AZ w tych punktach. Zgodnie z twierdzeniem 21 tej księgi, wszystkie [formy rozprzestrzeniające się wzdłuż tych] linii odbijają się więc po tej samej drodze i stąd rozdzielenie obrazów nastąpi wzdłuż tych linii. Również liczba prostopadłych, które zostały poprowadzone od punktu H do powierzchni zwierciadeł płaskich, wynosi, zgodnie z twierdzeniem I,20 tego dzieła, tylko tyle, ile jest zwierciadeł płaskich, i po tych wszystkich prostopadłych zachodzi takie samo odbicie do oka. Liczba obrazów zależy więc od liczby zwierciadeł, a od tej liczby uzależniona jest liczba miejsc obrazów, dlatego że poprowadzone od punktu H prostopadłe nie przecinają się poza zwierciadłem, chociaż wszystkie zbiegają się w punkcie H, a miejsce każdego obrazu, zgodnie z twierdzeniem 37 tej księgi, znajduje się na przecięciu prostopadłej z linią odbicia. Ponieważ te zwierciadła są rozmieszczone w taki sam sposób w stosunku do oka, [znajdującego się] w punkcie H, to jest oczywiste, że w jaki sposób zachodzi odbicie od jednego ze zwierciadeł do oka, w ten sam sposób zachodzi odbicie od każdego z nich. W ten sposób liczba linii odbicia jest równa liczbie prostopadłych. Zobaczmy więc większą liczbę obrazów, ustawionych obok siebie, w zależności od liczby i układu zwierciadeł. Ponieważ zwierciadła zwrócone są do oka, jako do swego środka, tworząc łuk koła, również obrazy siebie samego obserwator będzie widział jakby ustawione w chórze. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Dzięki zwierciadłu można wywołać, zmieniając jego położenie, więcej układów obrazów, np. jeśli zwierciadło AB ustawimy wzdłuż podstawy AI równoległe do horyzontu albo zmienimy położenie w inny jakiś sposób, w zależności od naszej woli, ale to, naszym zdaniem, należy pozostawić pomysłowości przeprowadzającego doświadczenie.

59. Można skonstruować zwierciadło, złożone ze zwierciadeł płaskich, na którym obserwator może zobaczyć siebie samego, zawieszonego w przestrzeni (Ptol. Catopt. II,6).



[Rys. 36]



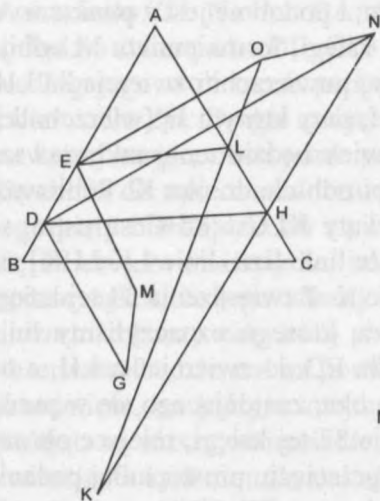
[Rys. 37]

Weźmy trójkąt równoramienny z kątem prostym i niech to będzie trójkąt BAG [rys. 36]¹. Jego kąt BAG niech będzie prosty, a linia BG niech będzie przecięta na dwie równe części w punkcie C. Poprowadźmy linię AC. Na linii AG umieścimy zwierciadło płaskie i niech to będzie zwierciadło ZH. Na linii BA umieścimy inne zwierciadło płaskie i niech to będzie zwierciadło DE. Oko obserwatora niech będzie na linii AC oraz według jego woli niech patrzy na dowolne z tych zwierciadeł, np. na zwierciadło ZH. Drugie zwierciadło, tzn. ED, niech leży na płaszczyźnie, na której stojąc, obserwator patrzy [na zwierciadło]², a następnie niech się zbliża do zwierciadła i niech się od niego oddala tak długo, aż forma jego pięty nie dojdzie do zwierciadła ED. Twierdzę, że ta forma odbija się na drugim zwierciadle, jakim jest ZH, na które patrząc obserwator będzie sądził, że jego własny obraz jest zawieszony w przestrzeni, ponieważ zobaczy cały swój obraz uniesiony w przestrzeni, chociaż sam obserwator będzie stał na powierzchni ziemi bądź na powierzchni innego przedmiotu, na którym znajduje się zwierciadło ED, gdyż forma pięty padając na niższe zwierciadło, którym jest ED, odbija się do wyższego zwierciadła i na nim ukształtuje się cała forma obserwatora. Jeśli obserwator nieco się poruszy, w taki jednak sposób, że nie zmieni się jego położenie względem odbić, które zachodzą od zwierciadeł, to, zgodnie z twierdzeniem 42 tej książki, będzie się wydawało, że obraz porusza się w przestrzeni i z tego powodu obserwator zobaczy, że jego obraz się porusza w powietrzu. A to zakładamy.

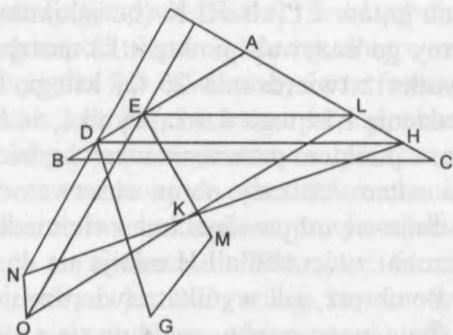
W tej sprawie zdolny fachowiec znajdzie inne liczniejsze wyjaśnienia, aby to założenie, przedstawione za pomocą rysunku, uczynić jaśniejszym. Weźmy trójkąt prostokątny ABC, którego kąt BAC jest prosty [rys. 37]³. Na jego boku umieścimy zwierciadło płaskie. Jego linią środkową niech będzie [linia] DE, której punkt D niech będzie bliżej punktu B niż punkt E. Bok AB trójkąta ABC niech będzie umieszczony w płaszczyźnie horyzontu albo na innej dowolnej płaszczyźnie, ponad którą została wyniesiona postać obserwatora, którego stopa znajduje się w punkcie G, nieco wzniesiona ponad linię AB. Poprowadźmy linię GD. W punkcie D, na końcu linii BD, zgodnie z EE I,23, niech powstanie kąt po przeprowadzeniu linii DH do linii AC, równy kątowi GDB, i niech to będzie kąt HDA. W punkcie H, końcu linii CH, niech powstanie kąt DHK, równy kątowi DHA, po przeprowadzeniu linii HK do linii BC. Umieścimy środek oka w punkcie K. Z poprzednich wywodów i twierdzenia 20 tej książki wynika, że forma punktu G odbija się od punktu H do oka, jeśli punkt H będzie punktem na jakimś zwierciadle. Jeśli, zgodnie z twierdzeniem 46 tej książki, zostanie znaleziony na zwierciadle DE punkt odbicia formy punktu M, który znajduje się na wierzchołku głowy obserwatora, to punktem odbicia formy tego punktu będzie punkt E: poprowadźmy linię ME. Po przeprowadzeniu linii EL do linii AC wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt AEL [o wierzchołku] w punkcie E, na końcu linii ME, równy kątowi MED. Między punktami A i H umieścimy zwierciadło (niech to będzie [zwierciadło] LH) w taki sposób, aby punkty L i H były na powierzchni tego zwierciadła; i podobnie jest z punktem A. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 22 tej książki, forma punktu M odbija się od punktu E na zwierciadle DE do całej powierzchni zwierciadła LH, to również od tego punktu zwierciadła LH, przy którym są [wierzchołki] równych kątów ELA i HLK (bo jakkolwiek będzie ten punkt, zawsze będziemy go nazywali punktem L) nastąpi odbicie do oka K. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 26 tej książki, kąty KLC i KHC są ostre, to z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika, że te linie [tzn. linie LK i HK] się przetną, a punktem przecięcia niech będzie K. Z twierdzenia 34 tej książki wynika zatem, że cały obraz obserwatora, którego oznaczyliśmy linią GM, odbija się od powierzchni zwierciadła ED do zwierciadła LH, a od powierzchni zwierciadła LH odbija się do oka, znajdującego się w punkcie K. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 37 tej książki, miejsce obrazu formy dowolnego punktu znajduje się na przecięciu prostopadłej padania z linią odbicia, to poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, z punktu D zwierciadła DE, od którego zachodzi odbicie formy punktu G, linię prostopadłą do powierzchni zwierciadła AH. Jest oczywiste, że ta prostopadła jest linią DA, ponieważ z założenia kąt DAH jest prosty. Podobnie również prostopadła, poprowadzona od punktu odbicia formy punktu M,

który znajduje się na zwierciadle DE w punkcie E, do powierzchni zwierciadła AH, jest tą samą linią co linia EA. Dlatego ta linia jest prostopadłą padania form punktów G i M, odbitych od punktów D i E do zwierciadła LH. Ponieważ, jak wykazano to wcześniej, z twierdzenia 26 tej księgi wynika, że kąty KHC i KLC są ostre, i ponieważ linia dzieląca kąt DHL albo kąt ELK na równe części jest prostopadła do linii LH, a kąt DAH jest prosty, to wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linia DEA przetnie się z obydwoma liniami KL oraz KH i w rezultacie punktem przecięcia linii DA i KH będzie punkt N, a punktem przecięcia linii EA i KL będzie punkt O. Linia ON będzie więc obrazem formy całej linii MG, a punkt, który jest obrazem formy punktu G, tzn. stóp tego obserwatora, w przestrzeni będzie wyżej niż punkt O, który jest obrazem formy punktu M, wierzchołka głowy obserwatora. Patrząc na zwierciadło LH z punktu K [obserwator] zobaczy więc swój obraz zawieszony w przestrzeni, ponieważ zobaczy, że stopy wyżej są w przestrzeni niż sama głowa.

W ten sposób można dowodzić, jeśli trójkąt ABC będzie ostrokątny [rys. 38], o ile obraz obserwatora nie zmieni swojego położenia, bo [przy zmianie położenia] prostopadłe padania inaczej padają na powierzchnię zwierciadła niż poprzednio, zawsze jednak, gdy trójkąt ABC jest prostokątny albo ostrokątny, obraz obserwatora zobaczymy pod [powierzchnią] zwierciadła zawieszony w przestrzeni.



[Rys. 38]

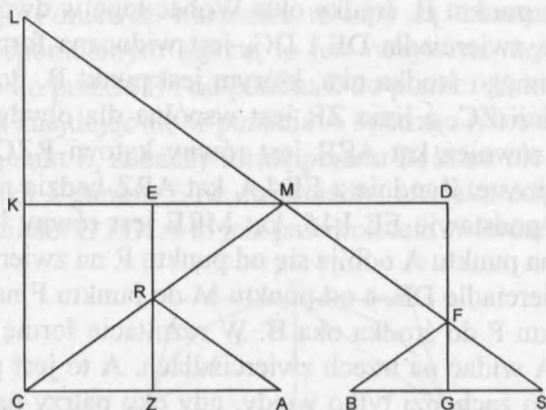


[Rys. 39]

Jeśli natomiast kąt ABC będzie rozwarty [rys. 39], może się zdarzyć, że obraz będzie zawieszony w przestrzeni z tyłu oka, ponieważ, jak to

wynika z twierdzenia I,14 tego dzieła, prostopadłe padania i linie odbicia przetną się z tyłu środka oka i nie będzie widać takiego obrazu, ponieważ zawsze będzie on uciekał, zakryty przez samo oko, chyba że przypadkiem zajdzie odbicie do oka od innego trzeciego zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano, to znaczy: gdy oko zwrócone jest wyłącznie na zwierciadło AH, a nie na zwierciadło DE. I to właśnie zostało udowodnione. A jeśli od punktów pierwotnych odbić, którymi są punkty D i E, poprowadzimy prostopadłe padania, to, jeśli sobie wyobrazimy, że zostały one poprowadzone od miejsc pierwotnych obrazów, zobaczymy, że obrazy wtórne, które są widoczne na zwierciadle AH, widać bardziej wyraźnie jako zawieszone w przestrzeni.

60. Obraz tego samego punktu można zobaczyć za pomocą dwóch albo trzech zwierciadeł płaskich ustawionych względem siebie pod kątem prostym (Euc. Catopt. 13).



[Rys. 40]

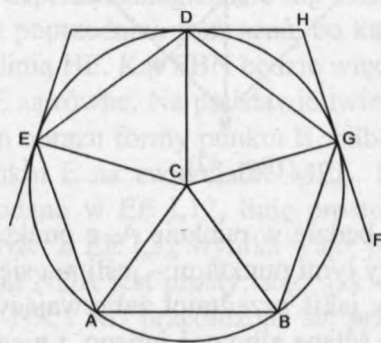
Weźmy coś widzialnego, na którym niech będzie punkt A. Środkiem oka niech będzie punkt B [rys. 40]¹. Weźmy trzy płaskie zwierciadła GD, DE i EZ ustawione względem siebie pod kątem prostym. Poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, z punktu A linię AZ, prostopadłą do powierzchni zwierciadła EZ. Przedłużmy linię AZ w nieskończoność. W punkcie C, zgodnie z EE I,3, przetnijmy ją w taki sposób, aby linia ZC była równa linii AZ, a od punktu B, który jest środkiem oka, poprowadźmy linię BG prostopadłą do zwierciadła DG. Poprowadźmy ją w taki sposób, aby linia GS była równa linii BG. Również z punktu C poprowadźmy prostopadłą do powierzchni zwierciadła DE i niech to będzie linia CK, którą przedłużmy poza punkt K do punktu L tak, aby linia CK była równa linii KL. Z punktu L poprowadźmy linię do punktu S, która przetnie zwier-

ciadło DE w punkcie M, a zwierciadło DG w punkcie F. Z punktu M poprowadźmy do punktu C linię MC, która przecina zwierciadło EZ w punkcie R. Poprowadźmy linie AR i BF. Ponieważ linia BG jest równa linii GS, a linia GF jest wspólna dla obydwu trójkątów SGF i GFB, zaś kąt BGF jest równy kątowi SGF, dlatego że obydwie te kąty są proste, to, zgodnie z EE I,4, linia BF będzie równa linii SF, a kąt GFB będzie równy kątowi GFS, zaś kąt FBG równy kątowi FSG, ale kąt FSG jest równy kątowi DFM na mocy EE I,15; zatem kąt DFM jest równy kątowi GFB. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, forma punktu M może się odbić do oka B. Ponieważ linia CK jest równa linii KL, a linia KM jest wspólna dla obydwu trójkątów CKM i LMK, to również kąt LKM jest równy kątowi MKC. Skoro obydwie kąty są proste, to, zgodnie z EE I,4, linia LM będzie równa linii MC, a kąt LMK będzie równy kątowi KMC. Kąt DMF jest więc równy kątowi KMC, ponieważ, zgodnie z EE I,15, on sam jest równy kątowi LMK. A zatem, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, forma punktu R może się odbić od punktu M do punktu F, a od punktu F do punktu B, środka oka. Wobec tego w dwóch zwierciadłach, którymi są zwierciadła DE i DG, jest widoczna forma punktu R odbita do tego samego środka oka, którym jest punkt B. Ponieważ linia AZ jest równa linii ZC, a linia ZR jest wspólna dla obydwu trójkątów ARZ i ZRC, to również kąt AZR jest równy kątowi RZC, dlatego że obydwie kąty są proste. Zgodnie z EE I,4, kąt ARZ będzie równy kątowi RZC, a stąd, na podstawie EE I,15, kąt MRE jest równy kątowi ARZ. Wobec tego forma punktu A odbija się od punktu R na zwierciadle ZE do punktu M na zwierciadle DE, a od punktu M do punktu F na zwierciadle DG, zaś od punktu F do środka oka B. W rezultacie formę i obraz tego samego punktu A widać na trzech zwierciadłach. A to jest przedmiotem twierdzenia: ale to zachodzi tylko wtedy, gdy oko patrzy na zwierciadło DG.

61. Można zobaczyć obraz tego samego punktu na tylu zwierciadłach płaskich, na ilu ktoś sobie życzy, ustawionych względem siebie na kształt wielokąta równobocznego i równokątnego (Euc. Catopt. 14; Ptol. Catopt. II,8).

Niech środkiem oka będzie punkt A, a punktem rzeczy widzianej niech będzie punkt B. Poprowadźmy linię AB. Zgodnie z wielkością linii AB wykreślmy wielokąt równoboczny i równokątny o tylu bokach, ile zwierciadeł będzie chciał ustawić¹ przygotowujący doświadczenie [rys. 41]. Na przykład, niech to będzie pięciokąt AEDGB. Na nim, jak podano w EE IV,14, zakreślmy koło. Poprowadźmy od [wierzchołków] kątów wielokąta linie do środka koła, którym jest punkt C; i niech to będą linie

AC, EC, DC, GC, BC. Jest oczywiste, że wszystkie te linie, zgodnie z definicją koła, są równe. Wobec tego, jak wynika z EE I,5 i I,8, wszystkie kąty przy podstawach są równe. Na każdym przecięciu wspomnianych boków umieścimy zwierciadło płaskie, z wyjątkiem punktów A i B, np. w punktach E, D, G, albo umieścimy więcej zwierciadeł, jeśli wielokąt ma więcej boków. Wszystkie te zwierciadła ustawmy prostopadłe do linii, poprowadzonych do środka koła, np. są to linie DC i GC. Na mocy EE XI,11 stanie się to, że zwierciadło FH będzie stało prostopadłe do linii GC: przy jednym zaś kącie niech będzie punkt rzeczy widzianej, przy drugim, temu najbliższym, niech będzie środek oka, np. tutaj są to punkty A i B. Ponieważ kąt CGF jest równy kątowi HGC, gdyż obydwa kąty są proste na mocy EE III,18, a i kąt CGB jest równy kątowi CGD, jak to wynika z poprzednich wywodów i EE I,8, wobec tego kąt BGF jest równy kątowi DGH. Forma punktu B odbija się zatem od punktu G na zwierciadle FH do punktu najbliższego zwierciadła, tzn. do punktu D, bo każde odbicie zachodzi po równych kątach², jak to wynika z twierdzenia 20 tej książki. Ponieważ wszystkie te kąty są tożsame i równe dwóm wcześniej wspomnianym kątom, to jest oczywiste, że zachodzi odbicie od punktu D do punktu E i od punktu E do punktu A, który jest środkiem oka. Oko zaś znajdując się w punkcie A i patrząc tylko na zwierciadło, na którym jest punkt E, zobaczy formę punktu B, która nie odbije się bezpośrednio do oka z punktu E na zwierciadle, ale jako odbitą za pośrednictwem zwierciadeł G i D. A to jest przedmiotem twierdzenia.



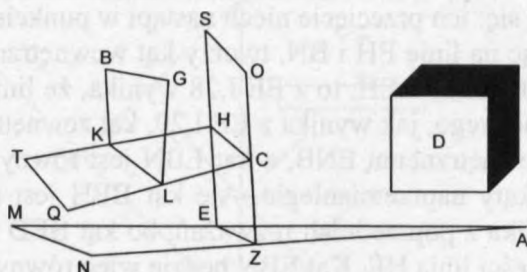
[Rys. 41]

Jeśli środek oka będzie w punkcie C, który jest środkiem koła, i do jego obwodu są styczne wszystkie zwierciadła, umieszczone na [wierzchołkach] wielokątów, to jest rzeczą oczywistą, że forma punktu C odbije się od wszystkich punktów po tej samej linii, [po której pada], ponieważ wszystkie linie – a są to linie: CA, CB, CG, CD, CE – są prostopadłe do powierzchni zwierciadeł; wobec tego [formy padające] odbijają

prostopadle linię LEM i wyobraźmy sobie, że na tych dwóch liniach KDC i LEM zostały umieszczone dwa płaskie zwierciadła. Forma punktu B padnie na zwierciadło płaskie, którym jest MEL, w punkcie E i odbije się do punktu D, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, ponieważ kąty BEM i DEL są równe, bo i kąty HEL i HEM są równe, dlatego że są proste, ale i kąty HED i HEB są równe na podstawie wcześniejszych rozważań. Wobec tego forma padając na zwierciadło KDC, odbije się, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, od punktu D tego zwierciadła do punktu A, który jest środkiem oka, ponieważ, jak okazało się powyżej, kąty EDZ i ZDA są równe. Oko znajdujące się w punkcie A zobaczy więc formę punktu B, chociaż rzecz, na której leży punkt B, sama przez się nie jest widoczna². Linia odbicia do oka, którą jest linia DA, jest zawsze jedna, chociaż liczba linii padania zależna jest od liczby takich zwierciadeł. Jeśli od punktu rzeczy widzianej, którym jest punkt B, poprowadzimy, zgodnie z EE XI,11, linię prostopadłą do powierzchni zwierciadła, która niech będzie linią BM, przecinającą linię ELM w punkcie M, to kąt BME będzie prosty, a zatem, zgodnie z EE I,32, kąt EBM będzie ostry. Skoro kąt BED jest prosty, to z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika, że linie BM i ED przetną się: ich przecięcie niech nastąpi w punkcie N. Ponieważ linia MEL padając na linie EH i BN, tworzy kąt wewnętrzny EMB, równy kątowi zewnętrznemu LEH, to z EE I,28 wynika, że linie BN i EH są równoległe. Wobec tego, jak wynika z EE I,29, kąt zewnętrzny DEH jest równy kątowi wewnętrznemu ENB, a kąt EBN jest równy kątowi BEH, ponieważ są to kąty naprzemianległe. Ale kąt BEH jest równy kątowi HED, jak to wynika z poprzednich rozważań, bo kąt BED został podzielony na równe części linią HE. Kąt EBN będzie więc równy kątowi ENB, a zatem linie NE i BE są równe. Na podstawie twierdzenia 37 tej księgi, punkt N jest miejscem obrazu formy punktu B, odbitej do oka, które jest w punkcie D, od punktu E na zwierciadle MEL. Również z punktu N poprowadźmy, jak podano w EE I,12, linię prostopadłą do linii CDK, niech to będzie linia NK. Z EE I,32 wynika więc, jak poprzednio, że kąt DNK jest ostry, ale kąt NDA jest prosty, stąd, jak wynika z twierdzenia I,14 tego dzieła, linie NK i AD przedłużone się przetną: niech S będzie punktem przecięcia. Ponieważ linia DK padając na linie ZD i NS tworzy zewnętrzny kąt ZDC, równy kątowi wewnętrznemu NKD, bo jeden i drugi z tych kątów jest prosty, to z EE I,28 wynika, że linie NS i ZD są równoległe. Wobec tego, zgodnie z EE I,29, zewnętrzny kąt ZDA jest równy wewnętrznemu kątowi NSD, bo kąty SND i NDZ są równe, dlatego że są naprzemianległe, a kąty NDZ i ZDA są równe, co wynika z wcześniejszych rozważań. Kąt NDA dzieli na równe części linia ZD, stąd kąt DNS jest równy kątowi DSN, a zatem, jak wynika z EE I,6, dwie linie DS i DN są równe. Ponieważ linia EN jest równa linii EB, to linia

DN będzie równa [sumie] dwóch linii DE i EB. Dlatego linia DS jest równa [sumie] tych samych dwóch linii DE i EB. Skoro na mocy twierdzenia 37 tej książki, punkt S jest miejscem obrazu formy punktu N, odbitej od punktu D na zwierciadle KDC do oka znajdującego się w punkcie A, to jest rzeczą oczywistą, że linia AS, która określa odległość obrazu od środka oka, jest równa [sumie] dwóch linii padania, którymi są linie BE i ED, a ponadto linii odbicia, którą jest linia DA. A to jest przedmiotem twierdzenia: ponieważ jeśli nastąpi odbicie od większej liczby zwierciadeł, dowód będzie można przeprowadzić dokładnie w ten sam sposób.

63. Jeżeli odbicie zachodzi od wielu zwierciadeł płaskich do jednego oka, to przy nieparzystej liczbie zwierciadeł prawa strona wydaje się lewą, a lewa prawą, zaś przy parzystej liczbie prawa strona wydaje się prawą, a lewa lewą, natomiast odległość obrazu od oka jest równa [sumie] długości wszystkich linii padania i linii odbicia (Ptol. Catopt. II,3).



[Rys. 43]

Niech punkt A będzie środkiem oka, a GB linią na rzeczy widzianej. Jeśli to wam się podoba, to między środkiem oka i rzeczą widzianą umieścimy jakieś gęste ciało, które przeszkadza widzeniu prostemu, np. ścianę albo coś podobnego, i niech to będzie ciało D [rys. 43]¹. Niech odbicie zachodzi od trzech zwierciadeł, a są nimi; EZ, HC, KL. Odbicie formy linii GB niech się dokona od tych trzech zwierciadeł do oka znajdującego się w punkcie A. Niech będzie tak, aby punkt B linii BG padł na zwierciadło KL w punkcie K, na zwierciadło HC w punkcie H, a na zwierciadło EZ w punkcie E. Niech odbicie od tego punktu do oka A zajdzie po linii EA. Podobnie forma punktu G niech pada na zwierciadło KL w punkcie L, na zwierciadło HC w punkcie C, a na zwierciadło EZ w punkcie Z, zaś do oka niech się odbija po linii ZA. Poprowadźmy linie padania i odbicia, którymi będą linie: BK, KH, HE, EA oraz GL, LC, CZ, ZA. Miejsce obrazu formy punktu B niech się znajduje na pierw-

szym zwierciadle KL w punkcie T, a miejsce obrazu formy punktu G niech będzie na pierwszym zwierciadle w punkcie Q. Poprowadźmy linię TQ, która, zgodnie z twierdzeniem 49 tej księgi, będzie równa linii BG. Na drugim zaś zwierciadle, którym jest HC, niech SO będzie obrazem linii², natomiast na trzecim zwierciadle, którym jest EZ, obrazem linii niech będzie MN. Jest więc oczywiste, na podstawie twierdzenie 49 tej księgi, że na każdym z tych zwierciadeł tak wielka jest odległość obrazu poniżej zwierciadła od powierzchni zwierciadła, jak wielka jest odległość formy, która odbija się od zwierciadła, od powierzchni tego zwierciadła. Wobec tego linia KB, która jest odległością punktu rzeczy widzianej poza zwierciadłem od powierzchni zwierciadła, jest równa linii KT, która jest odległością obrazu poniżej zwierciadła od powierzchni zwierciadła, a linia GL jest równa linii LQ. Również linia TH, która jest odległością formy widzianej od powierzchni zwierciadła HC, jest równa linii HS, która jest odległością miejsca obrazu poniżej powierzchni tego zwierciadła, a linia QC jest równa linii CO. Również linia SE, która jest odległością formy odbitej od zwierciadła ZE, jest równa linii EM, która jest odległością formy od tego zwierciadła, znajdującej się poniżej zwierciadła. Podobnie linia OZ jest równa linii ZN. Ponieważ, jak to wynika z twierdzenia 37 tej księgi, miejsce obrazu formy dowolnego punktu widzianego znajduje się w punkcie przecięcia jej prostopadłej padania z linią odbicia (na zwierciadłach płaskich obraz zawsze jest równy rzeczy widzianej, zgodnie z twierdzeniem 52 tej księgi), to jest oczywiste, że oko znajdując się w punkcie A postrzega obraz formy linii BG w miejscu linii MN, który jest równy samej rzeczy widzianej, a jego odległość od oka, która jest równa linii AM i AN, jest równa [sumie] wszystkich linii padania, ponieważ linia AM jest równa linii odbicia, którą jest EA, oraz linii ME, równej linii ES, która, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, jest równa linii padania (a jest to linia EH) oraz linii HS, równej linii TH, która jest równa linii KH oraz linii TK, a ta linia TK jest równa linii KB. Podobnie linia AN jest równa linii odbicia (a jest to linia AZ) oraz, jak to wykazaliśmy, równa [sumie] wszystkich linii padania. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia 55 tej księgi, na zwierciadłach płaskich prawa strona wydaje się lewą, a lewa prawą, jest rzeczą oczywistą, że na pierwszym zwierciadle (a jest to zwierciadło LK) obraz TQ formy rzeczy widzianej BG został zmieniony w stosunku do rzeczy widzianej w sposób opisany, ale ten sam obraz, odbity od drugiego zwierciadła (a jest to zwierciadło HC), zmienia prawą stronę na lewą, a lewą na prawą. W układzie zwierciadeł o parzystej ich liczbie pojawia się więc układ części obrazu taki, jaki układ części posiada sama rzecz widziana. Ponieważ na trzecim zwierciadle (a jest to zwierciadło EZ) drugi obraz, którym jest SO, zmienia położenie swoich części, jest oczywiste, że położenie [części] obrazu

zależy od nas, i ta część niech będzie RI. Podzielmy, jak podano w EE III,30, łuk RI na równe części w punkcie L. Poprowadźmy linię LE. Z punktu E poprowadźmy jedną linię prostopadłą do linii LE i niech to będzie linia EM i [poprowadźmy] również inną linię, którą niech będzie linia EN. Jednak te linie, na mocy EE I,14, połączyły się w jedną linię. Linia ME niech będzie równa linii NE. Cała linia MN niech będzie równa długości zwierciadła. Jeśli zatem dwa zwierciadła płaskie prostokątne i równe zostaną ustawione pod kątem na linii MN, to wtedy linie ME oraz NE podzielią powierzchnię tych połączonych zwierciadeł na równe części. Z tego wynika, że te zwierciadła nie będą ustawione w jednej płaszczyźnie, a zatem linie prostopadłe, poprowadzone od środka oka do tych zwierciadeł, które są prostopadłymi padania formy samego obserwatora, są różne. Gdy umieścimy zatem środek oka w punkcie D i przesuniemy zwierciadła na wyznaczonej i nieruchomej linii LE, to człowiek zobaczy siebie samego przychodzącego na jednym zwierciadle, a odchodzącego na drugim, bo długość obydwu tych zwierciadeł, która równa się linii MN, jest jakby podwójną długością jednego zwierciadła i w ten sposób punkt znajduje się jakby w środku powierzchni obydwu tych zwierciadeł i z tego powodu wokół tego [punktu] ruch jest bardziej równy. Jeśli te zwierciadła w taki sposób będą ustawione, że będzie je można zamykać i otwierać, i kąty między nimi będą się zmieniały, kiedy będziemy nimi poruszali, to rezultatem będą także liczne zniekształcenia obrazów także tej samej rzeczy. Ustawmy jednak [zwierciadła] pod takimi kątami, aby mogło dokonać się odbicie od jednego zwierciadła do drugiego. Nie sądzimy jednak, aby te [zjawiska] trzeba było w inny sposób demonstrować niż te, które zostały wcześniej przedstawione dla prostych zwierciadeł płaskich. Uważamy, że to należy pozostawić praktyce rzemieślników, ponieważ to, co powyżej przedstawiliśmy, wymaga raczej zdolności mechanicznych niż solidnego uzasadnienia. Odkrycie tych zjawisk było bowiem dziełem zdolności i pilności starożytnych³ i każdy, kto starannie zbadał to, co opisaliśmy w tej księdze za pomocą koniecznego dowodu, może coś do tego odkrycia dodać albo usunąć.

65. Od jednego zwierciadła płaskiego, ustawionego naprzeciw słońca, nie można rozpać ognia, od wielu natomiast można.

Jest oczywiste, że ogień można zapalić tylko dzięki skupieniu większej liczby promieni, ale linie odbicia poprowadzone od różnych punktów zwierciadeł płaskich nie przecinają się, jak tego dowiedliśmy w twierdzeniu 47 tej księgi. Wobec tego te odbite promienie nie schodzą się w żadnym punkcie, aby mogły wywołać zapłon jakiejś materii łatwo zapalnej. Wynika więc pierwsze założenie.

Już wcześniej Antemiusz twierdził – nie wiem na podstawie jakiego doświadczenia – że tylko dwadzieścia cztery promienie, przecinające się w jednym punkcie na łatwo zapalnej materii, powodują jej zapalenie. Ustawił on na stałe w określonym porządku siedem zwierciadeł płaskich sześciokątnych, tzn. sześć zwierciadeł ustawił wokół jednego, które było pośrodku¹. Połączył zwierciadła w każdym [wierzchołku] kąta sześciokąta, bo sześciokątne figury wypełniają całą² powierzchnię, skoro trzy kąty sześciokąta mają wartość czterech kątów prostych. Antemiusz twierdził, że w ten sposób można rozpalić ogień w dowolnej odległości: a jeśli te zwierciadła połączył po to, aby otrzymać jedno płaskie zwierciadło, to nie mógł, jak tego można dowieść na podstawie wcześniejszych wywodów, osiągnąć swojego zamierzenia za pomocą takiego jednego płaskiego zwierciadła. Ponieważ, jak powiedzieliśmy, trzy powierzchnie sześciokątne stykają się w jednym punkcie, gdyż dowolny kąt sześciokąta ma wartość dwóch trzecich dwóch kątów prostych, a trzy kąty sześciokąta mają wartość czterech kątów prostych, z tego powodu takie trzy zbiegające³ się kąty nie pozostawiają żadnego wolnego miejsca; nie ma zatem nic takiego, co odróżniałoby punkt ich zetknięcia od natury jednej płaskiej powierzchni.

Jeśli by jednak te same sześciokąty w taki sposób do siebie się nachylały, aby można je było opisać wokół jednej kuli, to wtedy do środka tej kuli nastąpi odbicie wszystkich promieni padających z jednego punktu prostopadłe na te powierzchnie i zwiększy się moc ciepła. Takie zwierciadło lepiej jest złożyć z trójkątów niż z sześciokątów, dlatego że liczba promieni odpowiada liczbie powierzchni i zwiększa się moc ciepła. Nie uważamy jednak, aby te sprawy, skoro są łatwe, należało badać, i dlatego pozostawiamy je pomysłowości rzemieślnika⁴.

2. KOMENTARZ

¹ Witelo pisze: *de omni reflexionis modo*. Sens tego zwrotu wskazuje, jakby autor wyróżniał wiele sposobów odbicia światła od zwierciadeł, chociaż w rzeczywistości odbiciem światła rządzi jedno prawo.

² Sens tego zdania nawiązuje do wypowiedzi Witelona w przedmowie poprzedzającej całe dzieło, gdzie czytamy: „Przechodząc w piątej księdze do innego sposobu widzenia, który powstaje przez odbicie od ciał gładkich, zwanych zwierciadłami, omówię zjawiska wspólne wszystkim zwierciadłom: płaskim, kulistym, walcowatym i stożkowym, wklęsłym lub wypukłym. Są to bowiem wszystko zwierciadła, od których możliwe jest regularne odbicie, jak to jasno dowiedzimy we właściwym miejscu. Przez te zwierciadła rozumiemy jednakże nie tylko ciała sztucznie wygładzone, ale raczej gładkie z natury, bo gdy do zwierciadeł stosujemy dowodzenie, to rozumiemy przez nie ciała przyrody o tym samym kształcie” (przekł. J. Burchardt, Wit. Persp. PP, s. 96 n.).

³ Por. księga II postulat 6 (Wit. Persp. PP, s. 100).

⁴ Sens tego zdania jest niejasny. Autorowi chodzi prawdopodobnie o podkreślenie, że formy rozprzestrzeniają się wraz ze światłem jednakowo we wszystkich kierunkach, a zniekształcenia mogą powstać w wyniku odbicia się ich od powierzchni zwierciadła.

⁵ Fragment tekstu od słów: „Podobnie światło i barwa...” zawiera zwięźle przedstawiony pogląd Witelona, który traktował światło i barwę niezależnie, na zespół zjawisk nazywanych odbiciem światła. Dziś wiemy, że określone długości fali świetlnej wywołują wrażenie barwy. W średniowieczu nie umiano mierzyć natężenia światła, w związku z tym nie znano pojęcia współczynnika odbicia światła R .

Współczynnik R jest mniejszy od 1, a więc nigdy nie ulega odbiciu całe światło, padające na zwierciadło bądź jakikolwiek inny przedmiot. Współczynnik odbicia w widzialnym zakresie widma jest na ogół zależny od długości fali padającego promieniowania. Z tego powodu przedmioty widziane w świetle odbitym mogą mieć inną barwę niż w rzeczywistości. Tę zależność przedstawia Witelo jakościowo (por. Wstęp rozdz. I. 4.1.).

Definicje

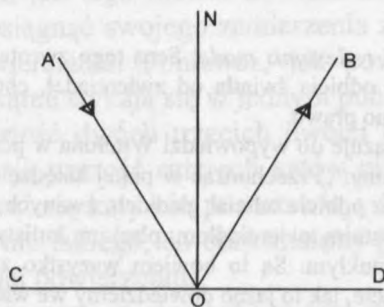
¹ Pojęcie linii padania i odbicia jest ściśle związane z pojęciem formy i ówczesnymi poglądami na naturę światła. Z formalnego punktu widzenia terminy „linia padania” i „linia odbicia” wydają się równoważne pojęciom: promień padający i promień odbity, które są używane we współczesnej optyce geometrycznej. Pojęcie linii padania i linii

odbicia nie ma sensu, ponieważ zgodnie ze współczesnym stanem wiedzy nie ma sensu pojęcie formy.

² W oryg.: *superficies plana*. Wyrażenie to oznacza „powierzchnię płaską”. Dzisiaj tego określenia używa się rzadko i mówi się „płaszczyzna”. W przekładzie tam wszędzie, gdzie występuje ten łaciński zwrot, będziemy go tłumaczyli jako „płaszczyzna”.

³ W oryg.: *superficies reflexionis*. Wszędzie tam, gdzie w tekście łacińskim występuje rzeczownik *superficies* – powierzchnia i nie ma wątpliwości, że chodzi o płaszczyznę, w przekładzie będziemy ten rzeczownik także tłumaczyli jako „płaszczyzna”.

⁴ W oryg.: *a quo incipit incidentia, ut a centro visus*. Zgodnie z Witelońskim mechanizmem widzenia, formy rozchodzą się od przedmiotów i dochodzą do oka, ale nigdy nie mogą rozchodzić się ze środka oka. Nie wiadomo, dlaczego Witelo pisze *od środka oka*.



Rys. P1

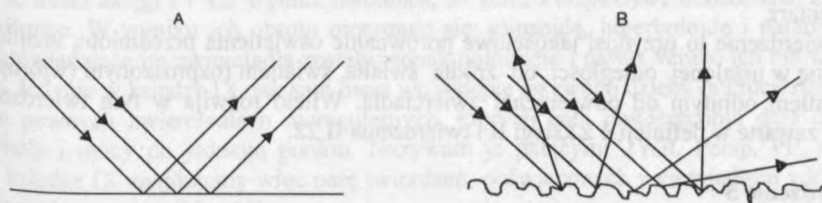
⁵ Podana przez Witelona definicja kąta padania i kąta odbicia jest, jak podaje A. M. Smith (Wit. Persp. SI, s. 153), zgodna ze starożytną tradycją. Różni się ona od definicji przyjmowanej obecnie, która została wprowadzona w XVII w. Na rysunku P1 przedstawiono odbicie promienia świetlnego. Według Witelona jest to odbicie form rozprzestrzeniających się wraz ze światłem. Na rysunku tym punkt odbicia oznaczono przez O. Przez CD oznaczono powierzchnię odbijającą płaską lub płaszczyznę styczną w punkcie O do powierzchni zakrzywionej. Linia AO jest linią padania (promieniem padającym), OB linią odbicia (promieniem odbitym), zaś ON prostopadłą do powierzchni odbijającej poprowadzoną w punkcie odbicia. Strzałkami oznaczono kierunek rozchodzenia się światła. $\angle AOC$ na rys. P1 jest, zgodnie z definicją używaną przez Witelona, kątem padania, a $\angle BOD$ – kątem odbicia. Współcześnie kątem padania nazywamy $\angle AON$, a kątem odbicia $\angle BON$.

⁶ Podana definicja jest bardzo zwięzła. Mówiąc językiem Witelona, obrazem nazywamy formę przedmiotu, rozprzestrzeniającą się wraz ze światłem, padającym na zwierciadło, następnie odbijającym się od zwierciadła i w końcu wpadającym do oka. Podane objaśnienie definicji wynika z treści księgi II i III *Perspektywy*.

Twierdzenie 1

¹ Stwierdzenia Witelona zawarte w tym akapicie nie są w pełni prawdziwe. Od przedmiotów chropowatych zachodzi również odbicie światła, ale ze względu na nierówność powierzchni chropowatego przedmiotu odbicie światła zachodzi w różnych kierunkach. Inaczej mówiąc, następuje jego rozproszenie. W przypadku przedmiotów wypolerowanych znaczna część światła odbija się w jednym kierunku, a niewielka

część ulega rozproszeniu. Na rys. P2 przedstawiono odbicie równoległej wiązki światła od idealnie gładkiej powierzchni (rys. P2A) i powierzchni chropowatej (rys. P2B). W przypadku rzeczywistej powierzchni wypolerowanej pewna część padającej wiązki światła ulega rozproszeniu z powodu występujących małych defektów powierzchni. Dzięki rozproszeniu światła na nierównościach powierzchni (również wypolerowanych) widzimy przedmioty z różnych kierunków. Gdyby przedmioty o wypolerowanych powierzchniach odbijały światło tylko w jednym kierunku (tzn. nie byłoby rozproszenia), to widzielibyśmy je tylko z kierunku, w którym odbite jest światło.



Rys. P2

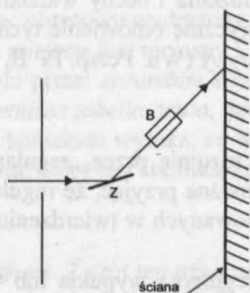
Współcześnie, gdy odbicie zachodzi od powierzchni gładkiej, mówimy czasami o odbiciu regularnym (jak na rysunku P2A). Jeżeli odbicie zachodzi od powierzchni chropowatej – to znaczy nieregularnej – mówimy o odbiciu nieregularnym (jak na rysunku P2B, por. np. S. Pieńkowski, op.cit., s.134). Należy zaznaczyć, że współcześnie używanych terminów: odbicie regularne i nieregularne nie należy mylić z pojęciem odbicia regularnego używanego przez Witelona, ponieważ znaczenie tych terminów jest całkowicie różne.

Twierdzenie 2

¹ Por. uwagi zawarte w rozdziale I. 4.1.

² Wyższą, tzn. powierzchnię zwróconą w stronę padającego światła.

Twierdzenie 3



Rys. P3

¹ Por. uwagi zawarte w rozdziale I. 4.1.

² Por. uwagi zawarte w rozdziale I. 4.1.

³ W oryg.: *erit reflexio coloris ad parietem album sensibilis*. Witelo omawia sytuację przedstawioną na rys. P3, kiedy od zwierciadła (oznaczonego Z na rys. P3) odbija się światło, które padając na ścianę, zabarwia się barwą przedmiotu umieszczonego

między zwierciadłem i ścianą, a oznaczonego literą B. Przy takim rozumieniu sytuacji cytowane zdanie miałoby następujący sens: „wtedy może się wydawać, że nastąpiło dostrzegalne dla oka odbicie barwy na białą ścianę”.

Twierdzenie 4

¹ Definicję światła pierwotnego i światła wtórnego podaje Witelo w księdze II, definicja 4, Wit. Persp. PP, s. 99.

Komentarz

Twierdzenie to przynosi jakościowe porównanie oświetlenia przedmiotu, znajdującego się w ustalonej odległości od źródła światła, światłem rozproszonym (wtórnym) i światłem odbitym od powierzchni zwierciadła. Witelo rozwija w tym twierdzeniu myśli zawarte w definicji 4 z księgi II i twierdzenia II,22.

Twierdzenie 5

¹ Witelo odsyła do postulatu 8 w księdze II: „natura niczego nie dokonuje na próżno i nie zawodzi w rzeczach koniecznych” (Wit. Persp. PP, s. 100). O ruchach naturalnych mówił już Arystoteles w traktacie *O niebie* (ks. I, s. 2, przekł. P. Siwek, BKF 1980), na co zwrócił uwagę A. M. Smith (Wit. Persp. SI, s. 155, tw. 5, przyp. 1, 2).

Twierdzenie 6

Komentarz

Ostatnie zdanie dowodu twierdzenia stanowi zwięzłe i trafne wyjaśnienie, dlaczego analizując zjawisko związane z widzeniem przedmiotów przy użyciu zwierciadeł korzystamy z pojęcia linii zamiast pojęcia promienia świetlnego o skończonej szerokości. W twierdzeniu tym znalazło zastosowanie twierdzenie II,3 do przypadku zjawiska odbicia światła od powierzchni wypolerowanych.

Twierdzenie 7

¹ Treść twierdzenia i dowodu nawiązują do księgi III i IV, gdzie zostały bardzo szczegółowo omówione warunki widzenia i cechy widzialne przedmiotów oraz przyczyny występowania złudzeń. Sumarycznie omówienie tych zagadnień znajdzie czytelnik we wstępie do księgi IV *Perspektywy* (Wit. Persp. PP II, s. 46 – 72).

Twierdzenie 8

¹ Trudno powiedzieć, co Witelo rozumie przez „regularne odbicie”. Na podstawie rozważań w dowodzie twierdzenia można przyjąć, że regularne odbicie zachodzi tylko od powierzchni regularnych, zdefiniowanych w twierdzeniu I,118, które w przekładzie podajemy poniżej:

I,118. Każda powierzchnia regularna wypukła lub wklęsła jest częścią powierzchni kuli albo walca, albo stożka obrotowego.

Każda bowiem linia regularna ma taki sam kształt w dowolnej swojej części, jest kołem albo linią prostą. Koło po wprowadzeniu w ruch utworzy kulę, ponieważ kula, jak to wynika ze wstępu do XI [księgi *Elementów Euklidesa*], jest rezultatem obrotu połowy koła. Jedna linia prosta natomiast swoim ruchem może tylko utworzyć stożek, gdy jest bokiem trójkąta, albo walec, gdy jest bokiem czworokąta, ponieważ w przypadku ruchów wszystkich pozostałych figur, o ile jeden bok tkwi nieporuszony w miejscu, otrzymujemy kąt, który powoduje po-

wstanie form o różnorodnej powierzchni wyznaczonej figury. Wobec tego nie utworzy ona powierzchni wypukłej ani wklęsłej regularnej. Wynika więc to, że każda powierzchnia wypukła lub wklęsła regularna jest taka, jak zakładano.

W świetle podanych w twierdzeniu I,118 definicji powierzchni regularnych staje się jasne, dlaczego Witelo zgodnie z zapowiedzią ze wstępu do swego dzieła (por. Wit. Persp. PP, s. 94 – 98) rozpatruje w księgach V – VIII jedynie zwierciadła płaskie, kuliste, cylindryczne i stożkowe, bo te zwierciadła, w rozumieniu Witelona, są jedynie zwierciadłami regularnymi.

Z treści księgi I i VII wynika natomiast, że autor *Perspektywy* dobrze znał krzywe stożkowe. W wyniku ich obrotu otrzymuje się: elipsoide, hiperboloidę i paraboloidę. Odpowiadające im zwierciadła zostały jednak pominięte i nawet Witelo ich nie wymienia. Jedynie w księdze IX, jak sam pisze we wstępie do swego dzieła, dorzucił rozprawę „o pewnych zwierciadłach nieregularnych, których cała powierzchnia daje odbicie światła i mocy do jednego punktu. Nazywam je palącymi”. (Wit. Persp. PP, s. 97). W księdze IX znajdujemy więc parę twierdzeń, poświęconych zwierciadłom wklęsłym nieregularnym (tw. 34 – 44).

Twierdzenie 9

¹ Ten rysunek występuje tylko u Risnera. W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I na tym rysunku nie ma zewnętrznej ramki. Rysunek zgodny z rękopisami znajduje się u A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 92).

² Na temat jednostek miar używanych przez Witelona por. załącznik 2 do księgi II *Perspektywy* Witelona (Wit. Persp. PP, s. 174).

³ W oryg.: czasownik *acutur*, który tłumaczymy jako „niech będzie zaostrożony”. Jak wynika z dalszego tekstu opisu przyrządu i twierdzenia 10, autor chce zaznaczyć, że w punkcie D musi być ostrze i w żadnym przypadku nie może być zaokrąglenia.

⁴ Tego rysunku nie ma w rękopisach ani wydaniu I. Stanowi on zapewne dodatek Risnera i ma ilustrować opis rekonstrukcji przyrządu. Jest jednak mało przejrzysty. Jak podaje A. M. Smith, Wit. Persp. SI, s. 160 rekonstrukcję przyrządu, który pochodzi od Alhazena, podał Saleh Omar, *Ibn Al-Haytham's Optics*, Chicago 1977. Ponieważ dzieło to nie było nam dostępne, opracowaliśmy własną rekonstrukcję tego przyrządu, którą podajemy w załączniku.

⁵ Właściwie jest to walec obrotowy wydrążony.

⁶ Tekst łaciński w tym miejscu jest niejasny i jego sens został zrekonstruowany na podstawie kontekstu. Witelo pisze: *secundum signa illa fiat circulus aequidistans planae superficiei i armilae, immissa tabella acuta, quantitatis circuli FEG*.

⁷ W oryg.: *diameter*. Z kontekstu wynika, że w tym miejscu przez średnicę rozumie autor długość boku kwadratu, który jest średnicą koła wpisanego w ten kwadrat.

Twierdzenie 10

¹ W oryg.: *ad aliam partem*. Zwrot ten oznacza, że odbita forma rozprzestrzenia się w stronę przeciwną w stosunku do formy padającej. O tym Witelo będzie przypominał również w następnych twierdzeniach, np. w twierdzeniu 31, gdzie używa zwrotu *ad oppositam partem*.

² W oryg.: *cuius diameter modo praemisso sit trium digitorum*. Usytuowanie w zdaniu wyrażenia *modo praemisso* (w sposób wcześniej przedstawiony) sugeruje, że dotyczy ono średnicy i jej wielkości, ale przecież wcześniej nie było mowy o średnicy wielkości trzech palców. A. M. Smith w swoim tłumaczeniu (Wit. Persp. SI, s. 195) zwrot ten odnosi do zdefiniowanej w twierdzeniu 9 miary określonej „palcem” (*our determin-*

ed digitis). Jest to dość prawdopodobna interpretacja. W twierdzeniu 9 Witelo wielkością „jednego palca” określił linię BE, która jest szóstą częścią półśrednicy DB.

³ W tekście Risnera: *in foramine*, natomiast w rękopisach jest *in foramen* (por. wydanie A. M. Smitha, Wit. Persp. SI, s. 201).

⁴ W wydaniu A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 202) linia ZB jest oznaczona jako ZDB. Ponieważ w aparacie krytycznym nie ma żadnej informacji na temat oznaczenia tej linii, nie wiadomo, czy Risner znalazł taką lekcję w rękopisach, czy jest to jego koniektura. Oznaczenia literowe w twierdzeniu 10 odnoszą się do rysunku 2 i 3, a na tych rysunkach nie występuje linia ZDB. Z tego powodu pozostajemy przy oznaczeniu Risnera.

Twierdzenie 11

¹ W oryg.: *reflecti in se ipsum* dosłownie to znaczy: odbić się do siebie samego. W ten sposób Witelo określa przypadek, kiedy promień odbity porusza się po tej samej drodze co promień padający. Ponieważ dosłowne polskie tłumaczenie jest bez sensu, wobec tego będziemy się posługiwali tym opisowym przekładem wszędzie tam, gdzie wystąpi cytowane łacińskie wyrażenie.

² Twierdzenie II,36 jest sformułowane: „Kiedy światło pada przez otwór na przeciwnie leżące ciało gęste, to obwód [plamy] oświetlonej będzie większy od otworu”.

³ Tzn. światło, które ukazuje się wokół otworu na wewnętrznej ścianie bocznej pierścienia.

⁴ Stożek oświetlenia został zdefiniowany w księdze II, definicja 10 (Wit. Persp. PP, s. 99).

Twierdzenie 12

¹ W oryg.: *in linea* – Witelo nie podaje jaką linię ma na myśli. Niewątpliwie jest to linia CQ lub BP znajdująca się na listwie.

² Tzn. wierzchołek zwierciadła.

Twierdzenie 14

¹ Jak wynika z kontekstu, Witelo pisząc o ustawieniu ukośnym miał na myśli taki obrót listwy ze zwierciadłem, aby promień przechodzący przez środek środkowego otworu padał prostopadłe na powierzchnię zwierciadła cylindrycznego. Przy takim obrocie odbicie światła od powierzchni cylindra będzie zachodziło po tej samej drodze, po której światło pada.

² W oryg.: *lux... obliquatur*. Zwrot ten oznacza, że światło odbija się ukośnie. W tym miejscu przyjęliśmy interpretację i tłumaczenie A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 99).

Twierdzenie 18

¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Należy więc przyjąć, że pochodzi od Risnera.

² Wymienione linie FC i DC należy traktować łącznie, tzn. że suma ich długości jest mniejsza od sumy długości dowolnych dwóch innych linii.

Twierdzenie 19

¹ W rękopisie C brak linii DL.

² W oryg.: *producta perpendiculari DK a puncto D*. Następne zdanie zaczyna się od *Comparato...* A. M. Smith połączył obydwa zdania w swoim wydaniu tekstu usuwając

kropkę. Tymczasem cytowane zdanie: *producta...* nie ma żadnego związku ani z następnym zdaniem, ani z kontekstem dowodu, gdyż linia DK w ogóle w nim nie występuje (por. Wit. Persp. SI, s. 103 i 209). Cytowane zdanie jest zbędne.

³ Referencje do Euklidesa V,18 i V,4 pochodzą od Risnera (por. aparat krytyczny Wit. Persp. SI, s. 209).

⁴ Na rysunkach w rękopisach A oraz Q brak stycznej w punkcie B, w rękopisie H brak linii DB i stycznej w punkcie B, w wydaniu I brak linii DA, oznaczenia punktu H oraz stycznej w punkcie B.

⁵ Z wydania A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 209) wynika, że w rękopisach mamy referencje do dzieła Euklidesa III,15, co wskazywałoby, że to Risner wprowadził poprawkę do tekstu i odsyła czytelnika do III,16. Należy dodać, że twierdzenie EE III,16 odpowiada wywodom w dowodzie, zaś EE III,15 nie ma tu zastosowania.

Twierdzenie 20

¹ W wydaniu A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 210), zgodnie z rękopisami w tym miejscu występuje referencja do EE III,12. Risner usunął tę referencję z tekstu Witelona, gdyż to twierdzenie nie ma tu zastosowania.

² Por. przypis 5 do twierdzenia 19.

Twierdzenie 23

¹ Według A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 168, przyp. 1 i 2 do twierdzenia 23) Witelo korzystał z dzieła: Al-Kindi, *De aspectibus*. Al-Kindi (żył w latach 800 – 870) jest najstarszym filozofem muzułmańskim. Jego dzieło znajdujemy w wydaniu: Axel Bjørnbo i Sebastian Vogel, *Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid, Drei optische Werke. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, vol. 26, pt. 3 (1912), s. 1 – 76. (por. Wit. Persp. SI, s. 23nn). Od tego miejsca dowód jest przeprowadzony nie wprost, tzn. przez wykazanie sprzeczności. Z tego powodu w dalszej części dowodu Witelo mówi o promieniach wychodzących ze środka oka G (rys. 9).

² W rękopisach A, C, H, Q, S mamy odbicie zwierciadlane na linii RL rysunku z wydania Risnera. Ponadto w rękopisach A, H, Q oraz wydaniu I linie MZ i NU oraz linia ZU są przedłużone tak, że zachodzi przecięcie linii MZ i NU z linią ZU

Twierdzenie 25

¹ Przekład od słów *to wtedy zawsze aż do słów jak to wynika z definicji płaszczyzny odbicia* oparty jest na wydaniu A. M. Smitha, ponieważ łacińskiego tekstu tego fragmentu nie ma w wydaniu Risnera, a jest w rękopisach. Risner dokonał samowolnych zmian w tekście podając własny wykład tej części dowodu. Dla uchwycenia dokonanych przez Risnera zmian podajemy tekst z wydania A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 215, w. 9 – 12): *tunc semper anguli incidentie et reflexionis erunt in eadem superficie reflexionis, ut patet ex eorum definitione. Sed et in eadem superficie sunt linea perpendicularis super superficie speculi et lineae incidentie et reflexionis dictos angulos cum linea que est communis sectio superficie reflexionis et speculi continentes, ut patet per definitionem „superficie reflexionis”*.

Oraz tekst z wydania F. Risnera, s. 202

tunc angulus incidentiae, quem facit linea incidentie cum perpendiculari, semper erit aequalis angulo reflexionis, quem continet linea reflexionis cum eadem perpendiculari, ut patet per 20 huius: utraque ergo ipsarum est in eadem superficie cum linea perpendiculari per 2 p 11: ergo et ipsae ambe sunt in eadem superficie, que est, ut patet per definitionem, superficies reflexionis.

Kąt padania, który tworzą linia padania i prostopadła, zawsze jest równy kątowi odbicia, który tworzy linia odbicia z tą samą prostopadłą, jak to wynika z twierdzenia 20 tej księgi. Linia padania i linia odbicia znajdują się więc, jak wynika z EE XI,2, na tej samej płaszczyźnie co linia prostopadła. Obydwie zatem linie są na tej samej płaszczyźnie, którą – jak to wynika z definicji – jest płaszczyzna odbicia.

² W tym miejscu Witelo odwołuje się do opisu przyrządu podanego w twierdzeniu 9. Z tego powodu oznaczenia literowe występujące w dalszej części dowodu odnoszą się do rysunków 2 i 3.

Twierdzenie 26

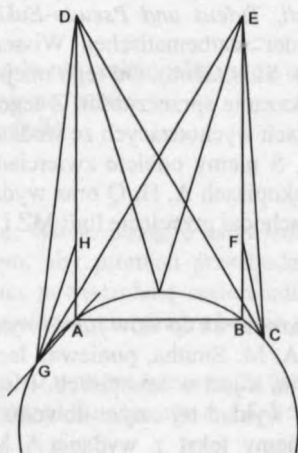
¹ Według A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 216) w rękopisach jest III,16.

Twierdzenie 27

¹ W oryg.: *perpendicularis et catheti utriusque*. Jak wynika z ostatniego zdania dowodu, mówiąc o jednej i drugiej prostopadłej Witelo ma na myśli prostopadłą padania oraz prostopadłą odbicia. Witelo używa dwóch rzeczowników na określenie linii prostopadłej, jakby chciał zaznaczyć, że chodzi o dwie różne prostopadłe. Rzeczownikiem *perpendicularis* nazywa prostopadłą do powierzchni zwierciadła, a rzeczownikiem *cathetus* prostopadłą padania i prostopadłą odbicia.

² Zdanie jest prawdziwe dla zwierciadeł płaskich i dlatego dowód, choć Witelo tego nie mówi, przeprowadzony został dla tych zwierciadeł.

Twierdzenie 28



Rys. P4

¹ Na rysunku tym w rękopisie A brakuje linii DB.

² Rysunek ten w wydaniu Risnera różni się od rysunku zamieszczonego w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I i z tego powodu rysunek zgodny z rękopisem C zamieszczamy jako rys. P4. Jak łatwo zauważyć, na rys. P4 występuje punkt odbicia formy punktu D, którego nie mamy na rys. 13. Należy zaznaczyć, że rysunki, jakie znajdujemy w rękopisach, różnią się między sobą. Na przykład na rysunku w rękopisie A brakuje linii GA, a w rękopisie H występuje linia EA, brak natomiast linii EG, zaś w wydaniu I są inne oznaczenia niektórych punktów.

Twierdzenie 29

¹ Mówiąc o dwóch formach autor rozumie formy dwóch różnych punktów.

² Mowa jest o dwóch liniach CD, ponieważ forma punktu A i forma punktu B musiałyby odbijać się wzdłuż tej samej linii.

Twierdzenie 31

¹ Jak wynika z dowodu twierdzenia, termin „różne oczy” oznacza dwoje oczu lub jakąś liczbę oczu należących do różnych obserwatorów, skierowanych na to samo zwierciadło i obserwujących w świetle odbitym ten sam przedmiot.

² Por. twierdzenie 10 przyp. 1.

Twierdzenie 32

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I znajdujemy rysunek będący zwierciadlanym odbiciem, na linii HG, rysunku z wydania Risnera. A. M. Smith w swoim wydaniu (Wit. Persp. SI, s. 116) na tym rysunku w miejscu oznaczenia punktu T przyjmuje oznaczenie C. Niestety, nie wyjaśnia tej sprzeczności. Tymczasem, np. w rękopisie Q, jest litera T.

² U Risnera błędnie HA. Przyjmujemy lekcję z wydania A. M. Smitha, (Wit. Persp. SI, s. 221) BA zgodną z rysunkiem i rękopisami.

³ U Risnera błędnie HG. W wydaniu A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 221) poprawnie BG.

⁴ W oryg.: *rari*. Znaczy to, że punkt jest tak słaby, iż wzrok nie jest w stanie go spostrzec.

⁵ Z kontekstu wynika, że w tym miejscu powinien być wymieniony wcześniej punkt F, który jest punktem materialnym. Punkt D bowiem, jak wynika z wcześniejszych rozważań, jest punktem przecięcia linii AG prostopadłej do powierzchni zwierciadła z powierzchnią oka, nazywaną przez Witelona również powierzchnią widzenia (w naszym opracowaniu księgi III wykazaliśmy, że jest to powierzchnia rogówki, Wit. Persp. PP, s. 196).

⁶ Bez gruntownej znajomości treści księgi VIII i IX nie można stwierdzić, dlaczego sytuacja taka jest możliwa, według autora *Perspektywy*, tylko w przypadku zwierciadeł płaskich i wypukłych. Prawdopodobnie jest to spowodowane nieznaną różnicą między obrazem rzeczywistym i pozornym (por. rozdz. I. 3.).

Komentarz

Treść tego twierdzenia i jego dowód są niejasne. Czytając to twierdzenie odnosi się wrażenie, że jakiś jego fragment został opuszczony lub też występuje skrót myślowy, który dla nas jest trudny do zrekonstruowania. Opuszczenie fragmentu tekstu przez Risnera należy raczej wykluczyć, ponieważ tekst w jego wydaniu jest zgodny z krytycznym wydaniem tekstu księgi V A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 221).

Twierdzenie 33

¹ W oryg.: *ex parte sui anguli minoris*. Zwrot ten oznacza, że odbity promień świetlny nie może przecinać kąta ostrego utworzonego przez linię padania i powierzchnię zwierciadła.

² W wydaniu I linia CD jest prostopadła do linii AB, co jest niezgodne z założeniem.

³ U Risnera DAC. Risner się pomylił, gdyż chodzi tu o kąt CDA. Podobnie dodany zwrot zgodnie z założeniem (*per hypothesin*) pochodzi od Risnera (por. A. M. Smith, Wit. Persp. SI, s. 223).

Twierdzenie 34

¹ Z dowodu wynika, że przez punkty środkowe Witelo rozumie wszystkie punkty znajdujące się pomiędzy punktami skrajnymi.

² Trudno powiedzieć, bez szczegółowej znajomości księgi VIII i IX, co Witelo miał na myśli, pisząc, że punkty odbicia będą podwójne. Wydaje się, że stwierdzenie to jest spowodowane nieznaną różnicą między obrazem rzeczywistym (który można otrzymać przy użyciu zwierciadeł wklęsłych) a obrazem pozornym (który otrzymuje się w zwierciadłach płaskich i w większości przypadków w zwierciadłach wypukłych).

Twierdzenie 35

¹ Z dowodu twierdzenia wynika, że Witelo używając słowa *kształt* (*figura*) ma na myśli przestrzenny charakter powierzchni.

² Określeniem „odpowiednie położenia” tłumaczymy zwrot *situs similis*, jak wynika z dowodu. W przypadku zwierciadeł płaskich oznacza to powierzchnie równoległe.

Twierdzenie 36

¹ Jak wynika z twierdzenia 37 i szeregu innych twierdzeń księgi V, chodzi o przedłużenie linii AG poza punkt G.

Twierdzenie 37

¹ Oczywiście chodzi tu o linię przedłużoną poza powierzchnię zwierciadła.

² Z tekstu nie wynika jednoznacznie, jakie linie ma na myśli Witelo. Z lektury księgi V – VII wynika, że ten zaimek odnosi się do wspomnianych w poprzednim zdaniu linii odbicia i prostopadłej padania.

³ Witelo nawiązuje w tym miejscu do swojej teorii widzenia, wyłożonej w ks. III oraz IV *Perspektywy*, a omówionej w Wit. Persp. PPII, s. 15 – 40. W postulatcie 2 do księgi III *Perspektywy* czytamy: *Tylko dwie rzeczy, mianowicie światło i barwa, są widzialne same przez się, bo światło widać samo przez się i jest ono hipostazą barw, natomiast inne cechy widzialne są przypadłościowe, takie jak odległość, wielkość, położenie, cielesność, kształt, ciągłość, oddzielenie lub podział, liczba, ruch, spoczynek, szorstkość, gładkość, przezroczystość, gęstość, cień, ciemność, piękno, brzydota, podobieństwo i różnorodność.* W twierdzeniu V,37 Witelo przykładowo wymienia zaledwie trzy cechy, a o znaczeniu zdolności rozróżniającej pisze obszerniej w twierdzeniu III,67 i w księdze IV, gdzie również obszerniej omawia znaczenie poszczególnych cech w procesie widzenia.

⁴ Witelo zna dzieła swoich poprzedników, chociaż ich nie wymienia. Wiemy, że z nich korzystał. Tradycję badań optycznych poczynawszy od starożytności przedstawił A. M. Smith (Wit. Persp. SI, s. 18nn: *The origins of the science of Perspectiva*).

⁵ Witelo mówi o tym w przedmowie do *Perspektywy* i we wstępie do księgi V.

Twierdzenie 40

¹ Wydaje się, że mówiąc o odbiciu „nieregularnym” Witelo ma na myśli kształt powierzchni, powstającej w wyniku polerowania, który, może być nieregularny w myśl twierdzenia 8.

² Z kontekstu dowodu wynika, że zwrot „własny układ” oznacza kształt powierzchni wygładzonej tak, aby nie nastąpiła deformacja.

Komentarz

W twierdzeniu tym mówi Witelo o zniekształceniach obrazów, jakie mogą powstać z powodu wadliwego polerowania powierzchni zwierciadła. Dotyczy to wszystkich zwierciadeł, niezależnie od kształtu ich powierzchni. Zniekształcenie to jest jednak najlepiej widoczne w przypadku zwierciadeł płaskich.

Jeżeli wygładzamy (polerujemy) jakąś powierzchnię, przesuwając urządzenie polerujące tylko w jednym kierunku, wtedy wzdłuż kierunku ruchu urządzenia może powstać wgłębienie. Jego kształt często jest podobny do kształtu powierzchni cylindrycznej wklęsłej o dużym promieniu krzywizny. Gdy przesuniemy urządzenie w bok i znów polerujemy w jednym kierunku, sytuacja się powtarza. Otrzymana powierzchnia nie będzie płaszczyzną, ale będzie pofałdowana, przeważnie w sposób przypadkowy. Odbicie światła nie będzie więc zachodziło tak jak od zwierciadła płaskiego, ale jak od układu zwierciadeł wklęsłych o kształcie powierzchni każdego z nich zbliżonym do powierzchni cylindrycznej. Powoduje to zniekształcenia obrazów, takie jak te, o których pisze Witelo. Nie będziemy jednak tego w tym miejscu uzasadniać, powrócimy do tego zagadnienia przy omawianiu księgi IX. Aby uniknąć zniekształceń powierzchni zwierciadła polerowanie musi odbywać się we wszystkich kierunkach i z jednakową siłą nacisku. To zapewne miał na myśli Witelo pisząc, że wygładzanie (polerowanie) zwierciadeł musi odbywać się ruchem kolistym. Trzeba zaznaczyć, że twierdzenie to dotyczy, jak byśmy dziś powiedzieli, wad powierzchni zwierciadeł spowodowanych niewłaściwą technologią ich przygotowania.

Twierdzenie 41

¹ Oś promieniowa została zdefiniowana w twierdzeniu III,18 (Wit. Persp. PP, s. 197–199).

Twierdzenie 45

Komentarz

Twierdzenie to jest błędne z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy, por. rozdział I.3.

Twierdzenie 46

¹ Zdanie to należy rozumieć następująco: gdyby odbicie zachodziło od innego punktu na zwierciadle, to stosunek linii AD do GB byłby inny i kąt padania nie byłby równy kątowi odbicia.

Twierdzenie 47

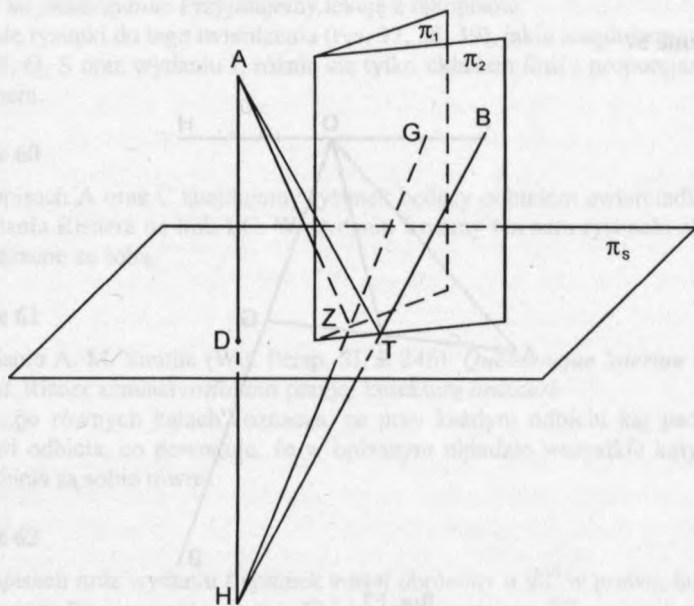
¹ Na rysunku tym w rękopisie Q występują dwie dodatkowe linie FA i ED.

² Poprawnie to zdanie powinno mieć następującą postać: forma padająca po linii EB niech się odbije po linii BF, a forma padająca po linii EC niech się odbije po linii CG. Witelo często pomija wyraz forma, co powoduje, że jego zdania mają skróconą postać. Na ogół dodajemy rzeczownik forma tam, gdzie pominięcie tego rzeczownika utrudniałoby zrozumienie wywodów.

³ U Risnera zdanie to ma następujące brzmienie: *dato enim quod concurrant in centro visus, quod sit F, et linea EC reflectatur ad visum F secundum lineam CF: tunc quia per 20 huius angulus incidentiae, qui est FBA, aequalis est angulo reflexionis, qui est EBD.....* W tłumaczeniu na język polski ma postać: *Bo jeśli przyjmiemy, że przetną się one w środku oka, którym jest punkt F, a linia EC odbiłaby się do oka F po linii CF, to wtedy, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 20 tej księgi, kąt padania, którym jest FBA,*

³ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Należy więc sądzić, że pochodzi od Risnera. Naszym zdaniem, ma on stanowić ilustrację przypadku, gdy linia AD nie leży na jednej płaszczyźnie z liniami TB i GZ. Linie TB i GZ leżą na różnych płaszczyznach odbicia, ale punkty Z i T leżą na jednej płaszczyźnie. Ponieważ w tym przypadku należy wykonać rysunek przestrzenny, a rys. 28a nim nie jest, zamieszczamy przestrzenny rysunek P5, który jest próbą naszej interpretacji tej części tekstu Witelona. Na rysunku tym płaszczyzny odbicia, na których leżą linie ZG oraz TB oznaczono odpowiednio π_1 oraz π_2 , zaś płaszczyznę zwierciadła oznaczono π_3 .

⁴ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach oraz wydaniu I. Stanowi on zapewne próbę Risnera dodatkowego objaśnienia tej części dowodu twierdzenia. Ponieważ rys. 28b nie jest rysunkiem przestrzennym, na rysunku przestrzennym P6 zamieszczamy naszą próbę interpretacji tej części dowodu twierdzenia. Oznaczenia jak na rys. P5.



Rys. P6

Twierdzenie 52

¹ Zwrot: „o takim samym zakrzywieniu i usytuowaniu” oznacza, jak wynika z kontekstu, że promień krzywizny łuku i jego obrazu jest ten sam oraz, że położenie łuku oraz jego obrazu względem powierzchni zwierciadła jest takie samo.

Twierdzenie 53

¹ Z dowodu tego twierdzenia i następnego (54) wynika, że przez słowo „wypukłość” Witelo rozumie „wielkość”, a przez zwrot „wypukłość prostopadłą” rozumie wielkość ustawioną prostopadłe do powierzchni zwierciadła jak na rys. 30. Natomiast przez „wglębenie” rozumie wielkość, a przez zwrot „wglębenie prostopadłe” rozumie wielkość ustawioną prostopadłe do zwierciadła jak na rys. 31.

² Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach ani w wydaniu I. Należy więc przyjąć, że pochodzi on od Risnera.

Twierdzenie 55

¹ Rysunek w wydaniu Risnera jest odbiciem zwierciadlanym na linii DF rysunku, jaki znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wyd. I.

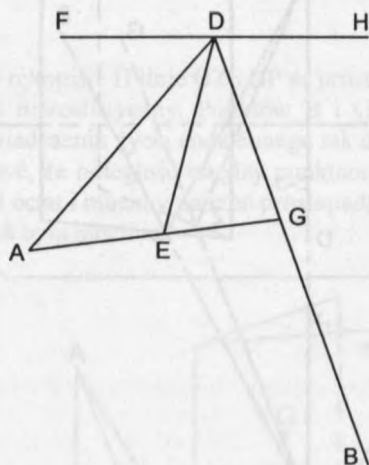
Twierdzenie 56

¹ Rysunek w wydaniu Risnera jest zgodny z rysunkami z rękopisów A, C, H, Q oraz wyd. I. W wydaniu A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 135) zamiast prostokąta AB na rysunku tym jest tylko linia AB.

² U Risnera błędnie kąt ten został oznaczony jako ADB (por. wydanie A. M. Smitha, Wit. Persp. SI, s. 239).

³ Przedłużona linia DI poza punkt D nie została zaznaczona na rysunku.

⁴ W tym miejscu spotykamy się z częstym u Witelona skrótem myślowym; to nie formy tworzą kąty, ale linie padania form tworzą kąty.

Twierdzenie 57

Rys. P7

¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach ani w wydaniu I. Stanowi on próbę Risnera przestrzennego przedstawienia sytuacji omawianej w twierdzeniu, co nie jest konieczne. Niestety jest to próba, naszym zdaniem, nieudana. Z tego powodu zamieszczamy rys. P7, który jest zgodny z rękopisami i poprawnie ilustruje wywody Witelona. W rękopisie H brak rysunku do tego twierdzenia.

Komentarz

W tym miejscu, jeśli wierzyć referencji dodanej przez Risnera, Witelo idąc za Ptolemeuszem przedstawia zasadę działania peryskopu.

Twierdzenie 58

¹ W rękopisie A na rysunku tym górne krawędzie zwierciadeł, oznaczone jako IK, KL, LM, MN i NX są zaokrąglone, co jest niezgodne z treścią dowodu.

² Fragment tekstu ujęty w ostre nawiasy jest wewnętrznie sprzeczny, gdyż kąt AIK, który jest kątem prostym, nie może być równy kątowi HAB, który jest kątem ostrym. Odnosi się to również do odpowiednich pozostałych kątów. Fragment ten nie ma znaczenia dla dowodu.

Twierdzenie 59

¹ W rękopisach A, C, H, Q znajdujemy rysunek, który jest odbiciem zwierciadlanym na linii AC rysunku 36.

² U Risnera: *super quod stat intuens*. W rękopisach, jak wynika z wydania A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 243), jest zamiast *quod* zaimek względny *quam*, który może odnosić się tylko do *superficies plana*. W zależności od tego, jaką przyjmujemy lekcję, taka będzie też interpretacja. Według tekstu Risnera należy tłumaczyć: *obserwator patrzy na zwierciadło*, według tekstów z rękopisów tekst łaciński znaczy: *obserwator patrząc, stoi na płaszczyźnie*. Przyjmujemy lekcję z rękopisów.

³ Pozostałe rysunki do tego twierdzenia (rys. 37, 38, 39), jakie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I, różnią się tylko układem linii i proporcjami od rysunków Risnera.

Twierdzenie 60

¹ W rękopisach A oraz C znajdujemy rysunek będący odbiciem zwierciadlanym rysunku z wydania Risnera na linii LC. W wydaniu I mamy ten sam rysunek, ale punkty A i B są połączone ze sobą.

Twierdzenie 61

¹ W wydaniu A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 246): *Quotcumque laterum visum fuerit ordinanti*. Risner zamiast *ordinanti* przyjął korekturę *ordinari*.

² Zwrot „po równych kątach” oznacza, że przy każdym odbiciu kąt padania jest równy kątowi odbicia, co powoduje, że w opisanym układzie wszystkie kąty padania oraz kąty odbicia są sobie równe.

Twierdzenie 62

¹ W rękopisach oraz wydaniu I rysunek został obrócony o 90^0 w prawo, tak że linia SDA jest prostopadła w stosunku do rys. 42 i zamiast prostokąta PG mamy linię PG.

² Tzn. nie jest widoczna z powodu jakiejś przeszkody, gdy skierujemy oko w jej stronę.

Twierdzenie 63

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I zamiast bryły D, jak na rys. 43, mamy linię prostą również oznaczoną przez D, u A. M. Smitha (Wit. Persp. SI, s. 146) natomiast znajdujemy kwadrat.

² W oryg.: *linea imaginis SO*. Rzecz jasna, że chodzi tu o obraz linii, a nie o linię obrazu.

Twierdzenie 64

¹ Patrz twierdzenie 9 przypis 2.

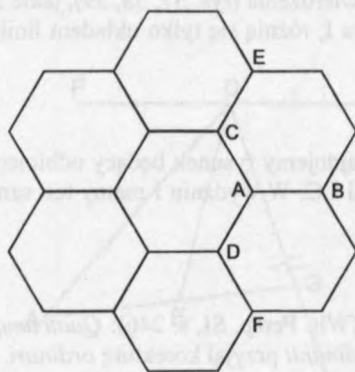
² W rękopisach A, H, Q oraz wydaniu I mamy dodatkowe linie zamykające trzeci prostokąt. W wydaniu I wprowadzono oznaczenie D na przecięciu tych dodatkowych linii.

³ Witelo wielokrotnie w swoim dziele wspomina o uczonych z przeszłości, ale na ogół ich nie wymienia po imieniu i nie daje referencji z wyjątkiem *Elementów* Euklidesa.

Twierdzenie 65

¹ Na rysunku P8 przedstawiono układ sześciokątnych zwierciadeł płaskich, o którym pisze Witelo.

² W oryg.: *ideo quia figurae hexagonae replent locum superficiale*. A. M. Smith (Wit. Persp. SI, s. 148) tłumaczy to zdanie w ten sposób: *and hexagonal shapes [when joined] form a single surface*. Zdanie: „sześciokątne figury wypełniają całą powierzchnię”, jak sądzimy, należy rozumieć w ten sposób, że sześciokąty foremne stykające się ze sobą pokrywają ściśle całą powierzchnię, na której są położone, tzn., że tworzą taki układ, jaki został przedstawiony na rys. P8. Myśl tę rozwija autor w dalszym ciągu dowodu twierdzenia.



Rys. P8

³ Tzn., że te trzy kąty mają wspólny wierzchołek, a ich ramiona przylegają do siebie. Na przykład, na rys. P8 ramiona kątów CAB, BAD i CAD przylegają do siebie, zaś suma tych kątów wynosi 360° , czyli jest równa czterem kątom prostym. Te trzy kąty mają wspólny wierzchołek, który znajduje się w punkcie A.

⁴ Pomysł Witelona został zrealizowany w 1747 r. przez Buffona, jak podaje E. Wilde, *Geschichte der Optik vom Ursprunge dieser Wissenschaft bis auf die gegenwärtige Zeit*, Erster Teil: von Aristoteles bis Newton, Berlin 1838, s. 42nn., który twierdzi, że bez znajomości prób Antemiusza i uwag Witelona przeprowadzenie tego eksperymentu byłoby niemożliwe.

III. KSIĘGA VI PERSPEKTYWY

1. PRZEKŁAD NA JĘZYK POLSKI

KSIĘGA SZÓSTA OPTYKI WITELONA, SYNA TURYNÓW I POLAKÓW

Po obszerniejszym wyłożeniu zjawisk [zachodzących] w zwierciadłach płaskich, na ile byliśmy w stanie [tego dokonać], pozostaje nam teraz zająć się zjawiskami właściwymi dla innych zwierciadeł. Ponieważ zwierciadła wypukłe są prostsze od wklęsłych, a niektóre zjawiska [zachodzące] w zwierciadłach wypukłych występują również na zwierciadłach wklęsłych – chociaż na nich występują też zjawiska im właściwe w sposób odmienny – wypada, abyśmy najpierw omówili zwierciadła wypukłe, zanim zajmiemy się pozostałymi zwierciadłami. Mimo że pomiędzy zwierciadłami wypukłymi (a wśród nich jedne są kuliste, inne cylindryczne, a jeszcze inne stożkowe) zwierciadła kuliste są prostsze od pozostałych, to jednak te same zjawiska i przyczyny¹ odbicia, co na zwierciadłach kulistych wypukłych, występują również na zwierciadłach cylindrycznych wypukłych i stożkowych wypukłych, ponieważ na tych zwierciadłach zdarza się, że odbicie zachodzi od dowolnych punktów ich kół. I podobnie zjawiska zachodzące w zwierciadłach płaskich występują również na zwierciadłach cylindrycznych i stożkowych, kiedy od jakiegoś punktu na dowolnej linii długości tych zwierciadeł zachodzi odbicie do oka. Wydaje się zatem, że po omówieniu zwierciadeł płaskich wypada pisać na temat zwierciadeł kulistych wypukłych, ponieważ są one prostsze od wszystkich innych oraz od zwierciadeł wklęsłych. Problemy natomiast związane ze zjawiskami właściwymi dla zwierciadeł kulistych, które podejmujemy się opisać [w tej księdze], są tego rodzaju.

DEFINICJE

1. Zwierciadłem kulistym wypukłym lub wklęsłym większym nazywamy takie zwierciadło, które jest [częścią] kuli o większej średnicy, mniejszym, którego średnica jest mniejsza.

2. Średnicą zwierciadła kulistego nazywamy średnicę kuli, której częścią jest zwierciadło.

3. Środkiem zwierciadła nazywamy środek kuli, której częścią jest zwierciadło.

4. Średnicą widzenia nazywamy linię przechodzącą przez środek oka i środek zwierciadła kulistego; ta sama linia nazywa się prostopadłą odbicia¹.

5. Mówimy, że ta linia prosta jest równoległa do zwierciadła kulistego wypukłego, która (w jej punkcie środkowym) jest równoległa do linii stycznej do jakiegoś łuku koła wielkiego tego zwierciadła w jego punkcie środkowym.

6. Końcem styczności nazywamy punkt, w którym jedna z prostopadłych przecina linię styczną do zwierciadła [poprowadzoną] przez punkt odbicia².

7. Końcem miejsc obrazów nazywamy punkt albo linię, poza którą nie widać żadnych obrazów.

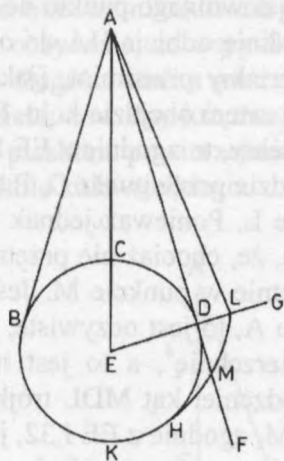
TWIERDZENIA

1. Wspólnym przecięciem powierzchni odbicia¹ i powierzchni zwierciadła kulistego musi być koło wielkie bądź łuk koła wielkiego kuli. Z tego wynika, że każda powierzchnia odbicia dzieli kulę zwierciadła na równe części.

Ponieważ, jak to wykazano na początku księgi V tego dzieła w definicji 7, powierzchnią odbicia nazywamy powierzchnię obejmującą² linię padania³, linię odbicia i linię prostopadłą, poprowadzoną z punktu zetknięcia⁴ do powierzchni kulistej, styczną do zwierciadła w punkcie padania (wszystkie te linie są liniami prostopadłymi), jest oczywiste, że powierzchnia odbicia jest powierzchnią płaską⁵. Każde zaś zwierciadło kuliste wypukłe, jak wynika z twierdzenia V,8 tego dzieła, jest albo kulą, albo częścią kuli. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,68 tego dzieła, jeśli płaszczyzna odbicia przecina zwierciadło, ich wspólnym przecięciem musi być koło albo część koła. Ponieważ prostopadłe do powierzchni stykają się⁶ z kulami, muszą przechodzić przez środek kuli, jak to można wykazać na podstawie twierdzenia I,72 tego dzieła oraz na podstawie definicji linii prostopadłej do powierzchni kuli, podanej na początku tego dzieła, jest oczywiste, że każda płaszczyzna odbicia przechodzi przez środek zwierciadła; a zatem, zgodnie z definicją koła wielkiego, wspólnym przecięciem jest koło wielkie albo łuk koła wielkiego kuli tego zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Wynika także wniosek: skoro każda płaszczyzna odbicia przechodzi przez środek zwierciadła, staje się zupełnie oczywiste, że ona dzieli kulę zwierciadła na równe części. A to zakładano.

2. Linia styczna, poprowadzona od środka oka do powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, obracając się wokół ustalonej średnicy widzenia, wyznacza część powierzchni zwierciadła, od punktów której zachodzi odbicie form do oka (Alh. IV, 25).



[Rys. 1]

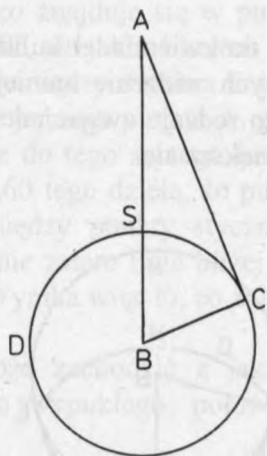
Środkiem oka niech będzie punkt A [rys. 1]¹. Niech wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego będzie koło BCD, którego środek jest w punkcie E. Z punktu A poprowadźmy, jak podano w EE III, 17, linię styczną do koła w punkcie D; niech to będzie linia AD. Poprowadźmy również średnicę widzenia AE, przecinającą obwód koła BCD w punkcie C. Twierdzę, że jeśli średnica widzenia AE pozostanie nieporuszona, i wyobrazimy sobie, że linia styczna AD przesuwają się po obwodzie zwierciadła w taki sposób, że zachowuje zawsze tę samą wielkość kąta CAD, dopóki nie powróci do miejsca, skąd wyszła; to ona swoim ruchem od punktu D opisać będzie część zwierciadła wypukłego kulistego, od której zachodzi odbicie wszystkich form [w kierunku]² oka, znajdującego się w punkcie A, a od tej drugiej strony powierzchni zwierciadła nie zachodzi odbicie. Poprowadźmy linię AD poza punkt styczności D aż do punktu F i poprowadźmy linię ED, którą przedłużymy poza zwierciadło, poza punkt D, aż do punktu G. Zgodnie z EE III, 18, wszystkie kąty, [których wierzchołki są] w punkcie D, będą więc kątami prostymi. Wobec tego, wszystkie punkty umieszczone na linii DF są widziane na wprost³, dlate-

go że linia AF jako jedyna nie odbija się od punktu D. Ponieważ jednak ta sama linia dotyka zwierciadła, punkty na linii DF zaczynają w jakimś stopniu uczestniczyć w zjawisku odbicia; dlatego też wydaje się, że zgodnie z twierdzeniem V,26 tego dzieła, odbijają się one od punktu D na linii DA do oka A, ponieważ kąt padania FDG jest równy kątowi odbicia GDA. Twierdzą ponadto, że z żadnego punktu łuku DKB nie może mieć miejsca odbicie do oka, [którego środek znajduje się w punkcie] A. Gdyby bowiem to było możliwe, to przyjmijmy, że z punktu H łuku DKB zachodzi odbicie formy dowolnego punktu do oka znajdującego się w punkcie A. Poprowadźmy linię odbicia HA do oka A; jednak ta linia nie może przejść przez materialny przedmiot, [jakim jest] zwierciadło, tzn. przeciąć łuk koła BCD, a zatem obejść koło. Ponieważ również kąt styczności HDF jest niepodzielny, to zgodnie z EE III,16, jest oczywiste, że linia odbicia HA nie przejdzie przez punkt D. Przetnie więc linię GD; i niech ją przetnie w punkcie L. Ponieważ jednak linia odbicia HA nie przetnie kąta HDF, jest jasne, że, chociaż nie przetnie łuku HD, to przetnie linię DF; i niech ją przetnie w punkcie M. Jeśliby zatem linia HM doszła z punktu M do punktu A, to jest oczywiste, że dwie proste MLA i MDA ograniczyłyby powierzchnię⁴, a to jest niemożliwe. Przeprowadźmy w ten sposób dowodzenie: kąt MDL trójkąta DLM jest kątem prostym, wobec tego kąt DLM, zgodnie z EE I,32, jest ostry, a zatem kąt ALD, na podstawie EE I,13, jest rozwarty. Ale kąt ADL jest kątem prostym, ponieważ i kąt ADE jest prosty. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, gdy linia EG pada na obydwie linie AD oraz HA i tworzy kąty w sposób opisany, to jest oczywiste, że linie HLA i DA przetną się w tej części, w której znajdują się kąty mniejsze. Nie ma zatem odbicia jakiegokolwiek formy z punktu H do punktu A, ponieważ jest to sprzeczne z tym, co przyjęto w założeniu. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ dla dowolnego punktu, leżącego na łuku DKB, dowód można przeprowadzić w ten sam sposób.

3. Kiedy umieścimy zwierciadło kuliste wypukłe naprzeciw oka w ten sposób, że oko nie znajduje się na powierzchni tego zwierciadła ani na powierzchni do niej¹ przylegającej², to wspólnym przecięciem podstawy stożka widzenia i powierzchni zwierciadła będzie koło mniejsze od koła wielkiego dzielącego kulę zwierciadła na równe części (Alh. IV,24).

Umieścimy naprzeciw oka zwierciadło kuliste w taki sposób, aby oko nie znajdowało się na powierzchni tego zwierciadła ani na powierzchni do niej przyległej. Twierdzą, że część zwierciadła dostrzeżona przez oko będzie częścią kuli ograniczoną kołem, które powstaje w wyniku ruchu promienia stycznego do powierzchni kuli, [wychodzącego ze środka

oka]. Ponieważ, jak to wynika z twierdzenia II,16 tego dzieła, promień dłuższy dotykając powierzchni kuli jest jakby linią styczną do zwierciadła (o ile wyobrazimy sobie, że ten promień przesuwa się dotykając kuli tak długo, dopóki nie powróci do pierwotnego punktu, od którego rozpoczął swój ruch), jest oczywiste na podstawie poprzedniego twierdzenia, że punkt styczności na powierzchni kuli opisze koło. To koło natomiast będzie mniejsze od koła wielkiego kuli zwierciadła. Ponieważ, jeśli byśmy założyli, że powierzchnie przecinające się na średnicy kuli przechodzą przez punkty skrajne wzmiankowanego koła i przecinają kulę na równe części, to jest oczywiste, że wszystkie te koła są styczne do tych linii, które są liniami długości stożka widzenia; a zatem, zgodnie z twierdzeniem I,58 tego dzieła, dowolny łuk, znajdujący się na tej powierzchni kuli pomiędzy tymi płaskimi powierzchniami przecinającymi kulę, będzie mniejszy od półkoła koła wielkiego.



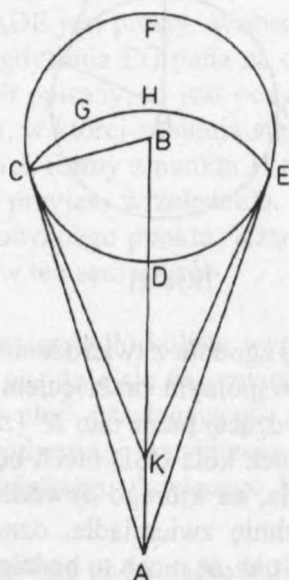
[Rys. 2]

Dla przykładu, weźmy, zgodnie z twierdzeniem I,69 tego dzieła, koło CSD [rys. 2]³, które jest wspólnym przecięciem powierzchni kuli i powierzchni płaskiej przechodzącej przez oko A⁴ (znajdujące się poza kulą) i przez środek kuli B. Środek koła CSD niech będzie w punkcie B. Biegun wzmiankowanego koła, na którego obwodzie podstawa stożka widzenia przecina powierzchnię zwierciadła, oznaczmy przez S. Przedłużmy półśrednicę BS do oka A; niech to będzie linia BSA. Z punktu A, środka oka, poprowadźmy linię AC styczną do koła CSD. Z punktu styczności C poprowadźmy linię CB do środka B. Twierdzę, że łuk CS jest mniejszy niż czwarta część wielkiego koła. Skoro kąt BCA, na mocy EE III,18, jest prosty, zatem kąt CBA jest ostry. Ponieważ, na mocy EE

I,32, dwa kąty w tym samym trójkącie ABC nie mogą być kątami prostymi, a kąt [BAC] znajdujący się w środku [oka] opiera się na łuku CS, jest oczywiste, na podstawie EE VI,33, że ten łuk jest mniejszy niż czwarta część koła. A ponieważ to samo zachodzi również we wszystkich punktach kół, które możemy sobie wyobrazić, jest oczywiste, że dowolny łuk tych kół jest mniejszy od czwartej części koła wielkiego. Skutkiem tego koło ograniczające pole widzenia oka jest mniejsze od koła wielkiego przedstawionej kuli. A to jest to, co zakładano.

Ten sam dowód odnosi się tylko do jednego oka bądź do obydwu, o ile średnica zwierciadła kulistego jest większa niż odległość pomiędzy oczami, jednak, gdy te odległości są równe, koło większe kuli będzie kołem wspomnianego przecięcia i będzie widoczna połowa kuli. Jeśli natomiast odległość między oczami będzie większa od średnicy zwierciadła, będzie widać więcej niż połowę kuli, a wspólnym przecięciem będzie koło mniejsze, jak to wykazano w księdze 4 tego dzieła⁵.

4. Kiedy oczy zbliżamy do zwierciadeł kulistych wypukłych, to wielkość kół ograniczających widzenie zmniejsza się, kiedy natomiast oddalamy oczy od tego rodzaju zwierciadeł, to wielkość kół ograniczających widzenie zwiększa się.



[Rys. 3]

Weźmy zwierciadło kuliste wypukłe ze środkiem w punkcie B [rys. 3]¹. Środek oka oznaczmy przez A. Koło ograniczające widzenie na po-

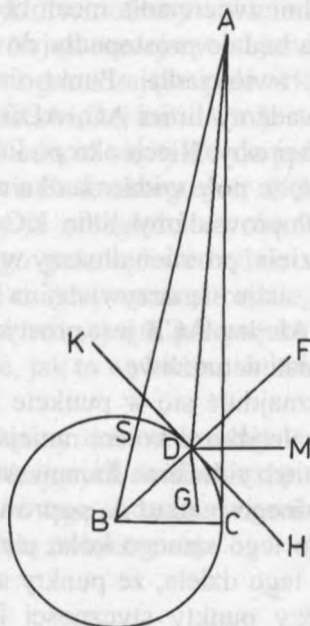
wierzchni zwierciadła oznaczmy przez CGHE. Twierdzą, że w przypadku zbliżania i oddalania oczu w stosunku do zwierciadła zmienia się wielkość tych kątów; bo kąt się zmniejsza w przypadku zbliżania oczu, a zwiększa się w przypadku ich oddalania. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia² i powierzchni zwierciadła niech będzie kąt oznaczony CDEF. Jego łuk CDE niech będzie prostopadły do koła CGHE, ograniczającego widzianą część zwierciadła. Punkt środkowy łuku CDE oznaczmy przez D. Poprowadźmy linie: AC, ADB, CB i AE. Zgodnie z EE III,18, kąt ACB będzie prosty. Niech oko po linii AB zbliży się [do kuli] do punktu K. Załóżmy, że pole widzenia oka ograniczy się do koła CGHE, jak poprzednio. Poprowadźmy linię KC. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem II,16 tego dzieła, promień dłuższy wychodzący od oka do kuli jest jakby linią styczną, staje się oczywiste, na podstawie EE III,18, że kąt KCB będzie prosty. Ale kąt ACB jest prosty; jest więc kąt prosty mniejszy od prostego, a to jest niemożliwe.

Wobec tego, gdy oko znajduje się w punkcie K, widzenie nie jest ograniczone kołem CGHE, ale jakimś kołem mniejszym od koła CGHE. Ponieważ [wewnątrz], pomiędzy dwiema liniami AC i AE stycznymi do koła, poprowadzonymi z jednego punktu A, poprowadzone są inne dwie linie z punktu K styczne do tego samego koła, jest więc oczywiste, na podstawie twierdzenia I,60 tego dzieła, że punkty styczności wewnętrznych [linii] padną pomiędzy punkty styczności [linii] zewnętrznych. Mniejszy łuk koła obejmie zatem linie bliżej położone [linii AB] niż te położone dalej od niej. Wynika więc to, co założono.

5. Odbicie do oka może zachodzić z jakiegoś punktu powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, położonej naprzeciw oka (Alh. IV,25).

Przyjmijmy taki sam układ jak w twierdzeniu 3 tej księgi: twierdzą, że odbicie do oka może zachodzić z dowolnego punktu części [powierzchni zwierciadła] położonej naprzeciw oka, np. z dowolnego punktu łuku CS [rys. 4]¹ i z wszystkich podobnych do niego łuków. Oznaczmy na łuku CS jakiś punkt; niech to będzie punkt D. Poprowadźmy półśrednicę DB. Zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, jest rzeczą oczywistą, że linia DB jest prostopadła do płaszczyzny, stycznej do zwierciadła w punkcie D. Kiedy zatem forma punktu rzeczy widzianej padnie na punkt D, wtedy, zgodnie z twierdzeniem V,27 tego dzieła, staje się jasne, że linia odbicia znajduje się na tej samej płaszczyźnie co półśrednica DB i prostopadła AB, padająca prostopadle na powierzchnię zwierciadła w taki sposób, że przejdzie przez jego środek B. Poprowadźmy, jak podano w EE III,17, z punktu D linię HDK styczną do koła CDS. Zgodnie z EE III,18, kąt BDK będzie więc prosty, a kąt ADB

w trójkącie DBA będzie rozwarty. Jeśli wobec tego przedłużymy linię BD poza kulę do punktu F, to, zgodnie z EE I,13, kąt FDA będzie ostry,



[Rys. 4]

dlatego że kąt BDA, jak to wynika z poprzednich rozważań, opartych na EE I,13, jest rozwarty. Jednak z twierdzenia I,57 tego dzieła wynika, że, skoro linia AC jest styczna do zwierciadła, to linia AD padająca na zwierciadło po przedłużeniu przetnie kulę zwierciadła, a powierzchnia styczna do kuli w punkcie D, na której znajdują się linie HK i DG, będzie bardziej pochylona niż linia AD i przetnie linię AB. Ponieważ półśrednica BD jest prostopadła do powierzchni HKDG, stycznej do zwierciadła w punkcie D, kąty FDK i FDH będą proste; a więc także kąt BDK będzie prosty, zaś kąt BDA będzie większy od kąta prostego, a kąt FDA będzie mniejszy. Odetnijmy zatem, zgodnie z twierdzeniem I,27 tego dzieła, od kąta prostego FDH kąt ostry, równy kątowi FDA, i oznaczmy go MDF; linie tworzące te kąty znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Wobec tego [forma] punktu rzeczy widzianej, znajdującego się na linii MD, która pada na powierzchnię zwierciadła w punkcie D, odbije się do oka po linii DA, na podstawie twierdzenia V,11² bądź V,20 tego dzieła, bo linie MD i AD tworzą kąty równe z prostopadłą BF. Linie padania i odbicia znajdują się na tej samej płaszczyźnie, a jest nią płaszczyzna odbicia, która,

jak to wykazano w twierdzeniu V,25 tego dzieła, jest prostopadła do powierzchni stycznej do kuli zwierciadła w punkcie D. To samo dowodzenie stosuje się do dowolnego punktu na łuku CS i każdego łuku podobnego do niego. Odnosi się to do całej części zwierciadła, położonej na przeciw oka, ponieważ można przeprowadzić ten sam dowód dla dowolnego danego punktu.

Wynika więc to, co zakładano, że z dowolnego punktu powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, położonej naprzeciw oka, może zachodzić odbicie w stronę oka.

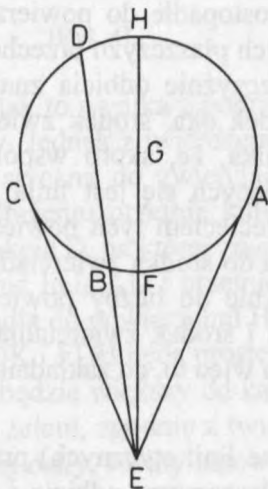
6. Na każdej płaszczyźnie odbicia, [zachodzącego] od zwierciadeł kulistych wypukłych, muszą się znaleźć środek oka, środek zwierciadła, punkt odbicia i punkt odbity¹. Z tego wynika, że linia poprowadzona od środka zwierciadła jest wspólna dla wszystkich powierzchni odciętych części [płaszczyzny], przecinających z tego powodu zwierciadło w różnych punktach (Alh. IV,23 i 25).

To twierdzenie wynika z twierdzenia V,25 tego dzieła. Na każdej płaszczyźnie odbicia muszą być: linia padania i linia odbicia². Te linie obejmują trzy punkty: punkt odbity, punkt odbicia i środek oka. Ponieważ każda płaszczyzna [odbicia] jest prostopadła do powierzchni zwierciadła, od którego zachodzi odbicie, a linie poprowadzone na tych płaszczyznach³, przechodzące przez środek zwierciadła, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, są prostopadłe do powierzchni zwierciadła, jest więc oczywiste, że każda z tych płaszczyzn przechodzi przez środek kuli. Wobec tego na każdej płaszczyźnie odbicia znajdują się wspomniane powyżej cztery⁴ punkty: środek oka, środek zwierciadła, punkt odbicia i punkt odbity. Z tego wynika, że, skoro wspólnym przecięciem powierzchni płaskich przecinających się jest linia prosta, jak to wynika z EE XI,3, to wspólnym przecięciem tych powierzchni musi być linia poprowadzona od środka oka do środka zwierciadła, ponieważ, gdy dwa punkty zmieniają się stosownie do liczby powierzchni odbicia, wtedy dwa punkty, tzn. środek oka i środek zwierciadła, pozostają zawsze na tych powierzchniach. Wynika więc to, co zakładano.

7. Każda linia odbicia (prócz linii stycznych) przecina koło (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego) tylko w dwóch punktach, tzn. w punkcie odbicia i w innym punkcie niewidocznej części powierzchni zwierciadła¹.

Wspólne przecięcie powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego i płaszczyzny odbicia niech będzie kołem ABCD [rys. 5]². Środkiem tego

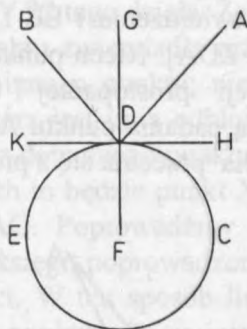
koła niech będzie punkt G, a środek oka oznaczmy jako E. Od niego poprowadźmy linie EA i EC, styczne do tego koła. Na mocy twierdzenia 2 tej księgi, jest oczywiste, że odbicie w kierunku oka dokona się z całego łuku ABC. Wobec tego odbicie do oka E niech występuje, np. od punktu B, który znajduje się pomiędzy punktami A i C. Linie odbicia oznaczmy jako BE. Twierdzę, że linia EB poprowadzona poza punkt B przetnie koło ABC w jakimś punkcie niewidocznego łuku zwierciadła; niech to będzie punkt D. Poprowadźmy średnicę widzenia EFGH dzielącą koło na równe części, na dwa półokręgi oznaczone jako FCH i FAH. Wykazano zaś w twierdzeniu I,75 tego dzieła, że z jednego punktu do danego półokręgu można poprowadzić tylko jedną linię styczną. W tym twierdzeniu wykazano również, że każda [inna] linia, poprowadzona z tego samego punktu pod linią styczną³, przecina półkole w jednym punkcie ponad punktem styczności, w innym punkcie pod tym punktem styczności. Kiedy zatem z punktu E poprowadzimy linię EC styczną do koła i z tego samego punktu E poprowadzimy pod styczną [EC] linię EB, okaże się, że linia EB przecina półkole FCH w jednym punkcie D ponad punktem styczności i w innym punkcie B pod punktem C, który jest graniczny dla części łuku, widocznej dla oka. Skutkiem tego punkt D leży na części CDA niewidocznej dla oka. A to jest przedmiotem twierdzenia.



[Rys. 5]

W ten sposób można przeprowadzić dowód w odniesieniu do dowolnego punktu na łuku AF. Wynika więc to, co zakładano.

8. W każdym odbiciu zachodzącym od zwierciadeł kulistych wypukłych linia, poprowadzona od środka zwierciadeł do punktu odbicia, dzieli kąt zawarty między liniami padania i odbicia na dwie równe części (Alh. IV,13).



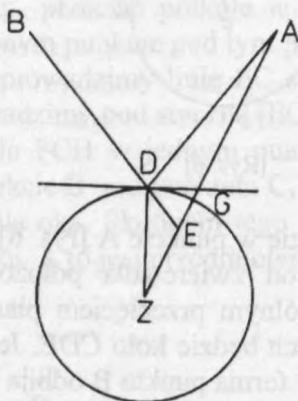
[Rys. 6]

Niech środek oka będzie w punkcie A [rys. 6]¹. Punkt rzeczy widzianej w wyniku odbicia od zwierciadła położonego naprzeciw [oka] oznaczmy przez B. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie koło CDE. Jego środek niech będzie w punkcie F. Załóżmy, że forma punktu B odbija się do oka A w punkcie D zwierciadła. Poprowadźmy linię DF. Twierdzę, że linia FD, poprowadzona poza koło do punktu G, dzieli kąt ADB na równe części, tzn. na kąt ADG i równy mu kąt GDB. Poprowadźmy, jak podano w EE III,17, linię HK styczną do koła CDE w punkcie D. Zgodnie z EE III,18, powstaną kąty proste FDK i FDH, a zatem, na podstawie EE I,13, kąty GDK i GDH są proste i równe. Ale kąt BDK, skoro jest kątem padania², na mocy twierdzenia V,20 tego dzieła, jest równy kątowi ADH, który jest kątem odbicia. Pozostaje więc kąt ADG równy kątowi GDB. Linia FD, poprowadzona do środka zwierciadła do punktu odbicia D, dzieli więc kąt ADB na równe części. Wynika więc to, co zakładano.

9. W zwierciadłach kulistych wypukłych każda linia odbicia musi się przecinać z prostą padania¹ poprowadzoną z tego samego punktu [co i linia padania] do środka zwierciadła (Alh.V,8).

Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego niech będzie koło GD [rys. 7]². Jego środek oznaczmy jako Z. Środkiem oka niech będzie punkt B, a punkt rzeczy widzianej oznaczmy jako A. Załóżmy, że forma punktu A odbija się do środka oka

B w punkcie D zwierciadła. Linie odbicia oznaczmy jako DB, a linie padania jako AD. Poprowadźmy także linię prostopadłą AZ z danego punktu A do środka zwierciadła Z, która przecina powierzchnię zwierciadła w punkcie G. Połączmy punkty D i Z³. Poprowadźmy linię BD poza zwierciadło tak, aby przecięła się ona z linią AZ. Przetnie się zaś na mocy twierdzenia I,29 tego dzieła, ponieważ linia BD przecina kąt ADZ, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia i EE I,15; a zatem przetnie również podstawę AZ [trójkąta ZDA]. Niech punktem przecięcia będzie punkt E. Jak wynika z definicji prostopadłej i twierdzenia I,72 tego dzieła, linia AZ jest prostopadłą padania punktu A. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ linia odbicia przecina się z prostopadłą padania.



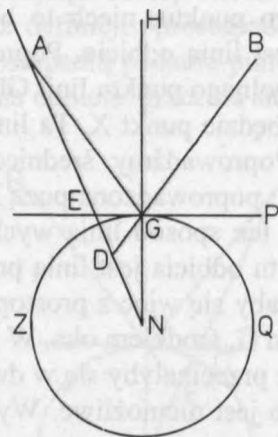
[Rys. 7]

To, czego tutaj dowiedliśmy w odniesieniu do punktu przecięcia linii odbicia z prostopadłą padania, to włączyliśmy ze względu na twierdzenie V,37 tego dzieła, ponieważ po obydwu tych liniach musi przejść widzenie, bo po linii odbicia forma odbija się do oka, a po prostopadłej padania rzecz zwraca się do samego zwierciadła, od powierzchni którego odbija się forma rzeczy widzianej do oka.

10. Gdy środek oka znajduje się na prostopadłej padania, która pada na zwierciadło kuliste wypukłe, wtedy zachodzi odbicie tylko z jednego punktu na zwierciadło, a obraz na powierzchni zwierciadła będzie widoczny w tym punkcie, to znaczy w punkcie odbicia, chyba że przypadkiem z powodu styczności z innymi punktami forma widziana zostanie przesunięta do innego miejsca obrazu (Alh. V,19).

W twierdzeniu V,32 tego dzieła wykazano, że każda prostopadła odbija się do siebie samej¹. Teraz natomiast wykażemy to, co tutaj się zakłada. Środek oka oznaczmy przez G [rys. 8]², a D niech będzie środkiem

11. Z faktu, że przy każdym odbiciu zachodzącym od tych zwierciadeł obraz całej rzeczy widzianej zawsze jest ograniczony linią poprowadzoną przez miejsca, które są punktami skrajnymi obrazu, wynika, że miejsce widzianego obrazu na tych zwierciadłach musi się znajdować na przecięciu linii odbicia z prostą padania. Wynika także, że na tych zwierciadłach można znaleźć miejsce obrazu¹. (Euc. Cat., 17; Alh. V,3 i 16).



[Rys. 9]

Z twierdzenia 9 tej księgi wynika, że linia odbicia przecina się z prostą padania. Tego samego można dowieść również w inny sposób. Punkt rzeczy widzianej oznaczmy przez A. Środkiem oka niech będzie punkt B. Punktem odbicia niech będzie G, a środek zwierciadła oznaczmy przez N [rys. 9]². Zgodnie z twierdzeniem V,25 tego dzieła jest oczywiste, że linia padania AG i linia odbicia GB znajdują się na tej samej płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie G. Linią wspólną płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie koło ZGQ, a linią wspólną powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie G i płaszczyzny odbicia niech będzie linia EGP. Poprowadźmy, jak podano w EE I,11, linię HG prostopadłą do linii EGP, z EE III,19 wynika, że linia HG po przedłużeniu dochodzi aż do środka koła ZGQ, który, jak wynika z twierdzenia 1 tej księgi, w przypadku gdy jest to koło wielkie, jest środkiem samego zwierciadła. Linia HG, przedłużona poza punkt G, przejdzie więc przez środek zwierciadła, którym jest punkt N; bo linia poprowadzona odwrotnie od środka zwierciadła do punktu G będzie także prostopadła do linii PGE, a poprowadzona linia HG jest prostopadła do tej samej linii. Od tego samego punktu³ można by więc poprowadzić do tego samego punktu na linii prostej dwie prostopa-

dłe do jednej linii; a to jest niemożliwe. Wobec tego linia HG dojdzie do punktu N. Poprowadźmy zatem linię AN z punktu widzianego do środka zwierciadła. Jak wynika z twierdzenia I,72 tego dzieła, będzie to linia prostopadła do powierzchni zwierciadła, a w rezultacie i do powierzchni stycznej do zwierciadła w tym samym punkcie, w którym przecina ona zwierciadło. Ponieważ pomiędzy dwiema liniami HG i PG, tworzącymi kąt prosty, leży linia BG, jest oczywiste, że ona sama nie jest styczna do koła ZGQ, a przedłużona przetnie to koło. Przetnie się więc z linią AN i to przecięcie nastąpi w punkcie D. Skoro, jak to wynika z twierdzenia 6 tej księgi, punkt A, którego forma odbija się od punktu G na zwierciadle, i środek zwierciadła N, muszą się znajdować na tej samej płaszczyźnie, to, zgodnie z EE IX,1, linia AN będzie na tej samej płaszczyźnie co linia BG. Na podstawie twierdzenia V,37 tego dzieła jest więc oczywiste, że punkt D będzie miejscem obrazu; a ponieważ ten punkt jest punktem wspólnym linii odbicia, na której musi być forma, i po której – jako po linii krótszej – forma musi być widoczna, oraz linii AN, która jest prostopadłą padania formy punktu A⁴, zatem z twierdzenia V,37 tego dzieła wynika w zasadzie to, co założono.

Z tego twierdzenia wypływa również taki wniosek: przy każdym odbiciu zachodzącym od zwierciadeł kulistych wypukłych obraz całej rzeczy widzianej zawsze znajduje się na jakiejś linii poprowadzonej pomiędzy miejscami obrazów punktów skrajnych rzeczy widzianej, ponieważ prostopadłe padania punktów środkowych znajdują się zawsze między prostopadłymi padania punktów skrajnych. Prostopadłe padania, poprowadzone od dowolnego z tych punktów skrajnych do środka zwierciadła, nie mogą przecinać dowolnej prostopadłej padania [poprowadzonej] z punktów środkowych. Wynika więc, że w tych zwierciadłach jest możliwe znalezienie miejsca obrazu dowolnego punktu rzeczy widzianej, dlatego że linia prosta, poprowadzona od dowolnego punktu widzianego poprzez odbicie do środka zwierciadła⁵, i linia odbicia, poprowadzona do miejsca przecięcia z tamtą linią, utworzą punkt wspólny przecięcia tych linii, który zawsze jest miejscem obrazu. A to zakładano.

12. Gdy linia odbicia od koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego) przecina prostopadłą padania, a linia prosta, poprowadzona od punktu odbicia, jest styczna do tego koła i przecina prostopadłą [padania], to wtedy stosunek całej prostopadłej [padania] do wewnętrznej jej części odciętej [przez linię odbicia] w stronę środka będzie taki jak części zewnętrznej odciętej przez styczną do tej części, która leży pomiędzy obydwooma odciętymi częściami (Alh. V,18).

miotem twierdzenia, ponieważ linia ED leży między obydwoma częściami odciętymi.

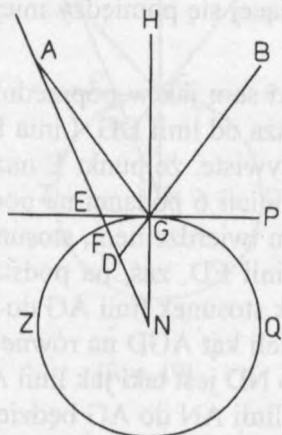
13. Na każdym zwierciadle kulistym wypukłym linia prosta, znajdująca się pomiędzy środkiem zwierciadła i miejscem obrazu, jest większa od linii prostej, znajdującej się pomiędzy miejscem obrazu i punktem odbicia (Alh. V,17).

Układ niech będzie taki sam jak w poprzednim twierdzeniu¹. Twierdzę, że linia ND jest większa od linii DG. Linia PGE niech przetnie linię AN w punkcie E. Jest oczywiste, że punkt E nazywamy końcem styczności, jak to wynika z definicji 6 podanej na początku tej księgi. Ponieważ, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, stosunek linii AN do linii ND jest taki jak linii AE do linii ED, zaś, na podstawie EE VI,3, stosunek linii AE do ED jest taki jak stosunek linii AG do linii GD, dlatego że, jak wykazaliśmy, linia EG dzieli kąt AGD na równe części, to zgodnie z EE V,11, stosunek linii AN do ND jest taki jak linii AG do linii GD. Na podstawie EE V,16, stosunek linii AN do AG będzie zatem taki jak linii DN do DG, ale, zgodnie z EE I,19, linia AN jest większa niż AG, dlatego że kąt AGN jest rozwarty, skoro jest większy od kąta prostego NGE: wobec tego linia ND jest większa od linii DG. Ponieważ, na podstawie twierdzenia 11 tej księgi, punkt D jest miejscem obrazu, jest oczywiste, że linia ND znajdując się pomiędzy środkiem zwierciadła i miejscem obrazu jest linią większą do linii DG, która leży pomiędzy miejscem obrazu i punktem odbicia, oznaczonym przez G. Wynika więc to, co zakładano.

14. Po przeprowadzeniu prostopadłej padania do środka koła, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, i po przeprowadzeniu w punkcie odbicia linii stycznej do tego samego koła część prostopadłej [padania] leżącej pomiędzy końcem styczności i obwodem koła jest mniejsza od półśrednicy tego koła (Alh. V,18).

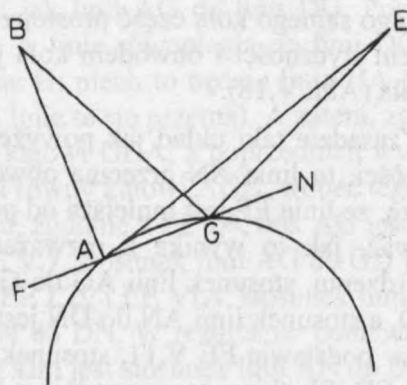
Pozostawmy w zasadzie taki układ jak powyżej. Ponieważ punkt E jest końcem styczności, to linia AN przecina obwód koła w punkcie F [rys. 10a]¹. Twierdzę, że linia EF jest mniejsza od półśrednicy koła oznaczonej FN. Ponieważ, jak to wynika z rozważań przeprowadzonych w poprzednim twierdzeniu, stosunek linii AG do GD jest taki jak stosunek linii AE do ED, a stosunek linii AN do DN jest taki jak linii AD do DG, wobec tego, na podstawie EE V,11, stosunek linii AN do DN jest taki jak linii AE do ED. Skutkiem tego, zgodnie z EE V,16, nastąpi wymiana, stosunek linii AN do AE będzie taki jak DN do DE, ale linia AN jest linią większą niż linia AE, ponieważ całość jest większa od swojej

części. Linia DN jest więc większa niż linia DE, a linia DN będzie o wiele większa niż linia FE, która jest częścią tej linii DE. W rezultacie linia NF będzie dużo bardziej większa niż linia FE. A to jest przedmiotem twierdzenia.



[Rys. 10a]

15. Linie odbicia formy tego samego punktu, [poprowadzone] z różnych punktów zwierciadła kulistego wypukłego, nie są równoległe, jednak nie przecinają się w środku jednego oka. Z tego wynika, że jedno oko nie może widzieć obrazu tej samej formy odbitej od różnych punktów [powierzchni] tego samego zwierciadła kulistego wypukłego. (Euc. Cat., 4; Ptolem. Cat., I, 8).



[Rys. 11]

Środek oka niech będzie w punkcie B, a punkt rzeczy widzianej oznaczmy przez E. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego niech będzie koło AG [rys. 11]. [Forma] punktu E niech pada w różne punkty na zwierciadło, na koło AG, a te punkty oznaczamy przez A i G. Twierdzę, że dwie linie odbicia BA i BG nie są równoległe, chociaż nie przetną się w środku jednego oka. Przyjmijmy jednak, że przetną się w punkcie B: poprowadźmy wewnątrz koła cięciwę łuku AG, która jest linią prostą AG i przedłużmy ją poza koło aż do punktu F od strony punktu A, a od strony punktu G aż do punktu N. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, kąt EGN jest równy kątowi BGA, zaś, zgodnie z EE I,16, kąt EGN jest większy od kąta EAG, wobec tego kąt BGA jest większy od kąta EAG, a zgodnie z EE I,16, kąt BAF jest większy od kąta BGA, a zatem kąt BAF jest większy od kąta EAG. Forma punktu E, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, nie odbije się więc do oka, znajdującego się w punkcie B, od punktu A na zwierciadle. Ponieważ jednak kąt BAF nie jest równy kątowi BGA, lecz [w rzeczywistości] jest mniejszy, dlatego że, zgodnie z EE I,16, kąt EGN jest większy od kąta EAG, wobec tego, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła i zgodnie z założeniem, kąt BGA będzie większy od kąta BAF. Jest więc oczywiste na podstawie twierdzenia I,14 tego dzieła, że dwie linie BA i BG nie są równoległe. Jednak, jak wynika z poprzednio przeprowadzonych rozważań, one nigdy nie przetną się w środku oka, tzn. w punkcie B. Wynika więc to, co założono. A z tego wynika również i to, że jedno oko nie może widzieć obrazu tej samej formy, odbitej¹ w różnych punktach takich zwierciadeł. A to zakładano.

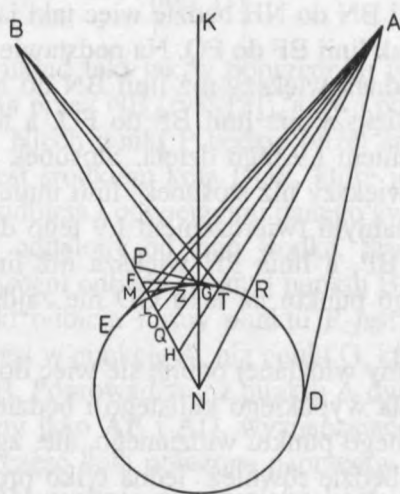
16. Forma dowolnego punktu może odbić się do oka znajdującego się w określonym miejscu¹ tylko z jednego punktu na powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego i tylko jeden obraz dochodzi do oka (Alh. V,29).

Ponieważ z twierdzenia 10 tej księgi wynika, że forma padając prostopadłe na zwierciadło – gdy środek oka znajduje się na tej prostopadłej – odbija się do oka tylko z jednego punktu, to powinniśmy dowieść teraz tego założenia tylko w odniesieniu do linii padających ukośnie na zwierciadło kuliste wypukłe. Punkt widziany oznaczmy więc przez B, a środek oka przez A [rys. 12]². Punkt A nie może być na prostopadłej, poprowadzonej od rzeczy widzianej do środka zwierciadła, oznaczonego punktem N. Twierdzę, że forma punktu B odbija się do środka oka A tylko z jednego punktu zwierciadła i tylko jeden obraz dociera do oka. Na podstawie twierdzenia 5 tej księgi, jest bowiem oczywiste, że, gdy rzecz widziana, która znajduje się w punkcie B, jest umieszczona naprzeciw

zwierciadła w odpowiedni sposób, to forma punktu B może się odbić do oka A z jakiegoś punktu na powierzchni zwierciadła. Niech punktem odbicia będzie punkt G. Poprowadźmy linie BG i AG. Poprowadźmy prostopadłą padania, którą jest linia BN, przecinająca powierzchnię zwierciadła w punkcie L. Średnicę widzenia, przecinającą powierzchnię zwierciadła w punkcie R, oznaczmy przez AN. Natomiast punkty D i E niech będą punktami granicznymi części powierzchni zwierciadła, położonej naprzeciw oka. Poprowadźmy linię odbicia AG, która, zgodnie z twierdzeniem 9 tej księgi, przedłużona poza punkt G, przetnie prostopadłą BN; niech więc ją przetnie w punkcie Q, który to punkt, jak wynika z twierdzenia 11 tej księgi, jest miejscem obrazu. Zgodnie z twierdzeniem 6 tej księgi jest też oczywiste, że punkty A, N oraz B znajdują się na tej samej płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni zwierciadła. Ponieważ żadna z płaszczyzn, na której znajdują się punkty B i N, prostopadłych do [powierzchni] kuli, nie może się rozciągać aż do punktu A, tzn. do środka oka, z wyjątkiem jednej, dlatego że punkt A jest niepodzielny, gdyż nie może być wspólny dla płaszczyzn nie przecinających się wokół tego punktu, bądź linii, na której punkt ten się znajduje, to jest oczywiste, że punkty A i B znajdują się tylko na jednej płaszczyźnie, prostopadłej do kuli zwierciadła, a nie na wielu. Wobec tego odbicie [formy] punktu B do oka A będzie zachodziło tylko na kole kuli, które jest wspólnym przecięciem powierzchni zwierciadła i płaszczyzny ANB. To koło oznaczmy zatem jako DGE. Twierdzę, że z żadnego innego punktu na kole DGE, z wyjątkiem tego jednego punktu, co do którego przyjęliśmy, że jest to punkt G, nie zajdzie odbicie formy punktu B do środka oka A. Bo jeśli by było możliwe odbicie [do oka]³ od innego punktu na kole DGE niż z punktu G, to niech to będzie punkt L, w którym prostopadła padania, oznaczona jako BN, przecina powierzchnię zwierciadła. Chociaż linia BN jest prostopadła do powierzchni zwierciadła, to jednak linia AL nie jest do tej powierzchni prostopadła, ponieważ nie przechodzi przez środek kuli, którym jest punkt N. Forma dochodząca po linii prostopadłej musi natomiast się odbić po prostopadłej, ponieważ zawsze kąt padania jest równy kątowi odbicia; jest więc oczywiste, że forma punktu B nie odbije się do oka od punktu L.

Jest także oczywiste, że nie odbije się od dowolnego punktu na łuku LE. To bowiem jest niemożliwe, ponieważ linia poprowadzona do dowolnego punktu tego łuku⁴ z punktu B, razem z linią styczną do koła w tym punkcie utworzyłaby kąt rozwarty po stronie punktu E, dlatego że, zgodnie z EE III,18, kąt zawarty między średnicą koła i linią styczną w tym punkcie do koła jest kątem prostym, a półśrednica⁵ po jej przedłużeniu nie dojdzie do punktu B, ponieważ tam dochodzi półśrednica NL. Wobec tego kąt zawarty pomiędzy linią poprowadzoną od punktu B i tą

linią styczną⁶ od strony punktu B musiałby być rozwarty, a linia poprowadzona z punktu A⁷ razem z linia styczną w tym punkcie utworzyłaby kąt ostry zwrócony do L, bo linia poprowadzona od środka zwierciadła do tego punktu styczności utworzyłaby, zgodnie z EE III,18, wraz z linia styczną do koła w tym punkcie kąt prosty, zaś linia poprowadzona od punktu A wraz z tą samą styczną utworzyłaby kąt mniejszy od kąta prostego od strony punktu L. Jednak linia poprowadzona z punktu A nie może być styczna, co wynika z twierdzenia I,57 tego dzieła, ponieważ linia AE jest styczna do powierzchni zwierciadła na podstawie założenia; jest tak dlatego, ponieważ linie AE i AD⁸ wyznaczają łuk koła DGE widoczny dla oka, który (zgodnie z twierdzeniem 2 tej książki) poprzez linie styczne oddzielony jest od powierzchni zwierciadła niewidocznej dla oka. Z tego powodu, gdyby od tego punktu zachodziło odbicie, wtedy, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, mogłoby się zdarzyć, że kąt ostry byłby równy kątowi rozwartemu; a to jest niemożliwe. Nie będzie więc odbicia [do oka] od dowolnego punktu na łuku LE.



[Rys. 12]

Przy takim układzie nie może również zachodzić odbicie [do oka]⁹ od żadnego innego punktu na łuku GL. Przyjmijmy – o ile to jest możliwe – że odbicie zachodzi z punktu Z. Poprowadźmy linię AZO, przecinającą w punkcie O prostopadłą padania, którą jest linia BN, i poprowadźmy linię styczną do koła w punkcie Z; ta styczna musi więc leżeć między liniami BG i BL, ponieważ punkt Z znajduje się pomiędzy punktami G i L. Niech tą styczną będzie więc linia MZ, a linią styczną do koła w punkcie G niech będzie linia GF, i niech linia ZM przetnie prostopadłą padania w punkcie M, a linia GF w punkcie F. Jest więc oczywiste na

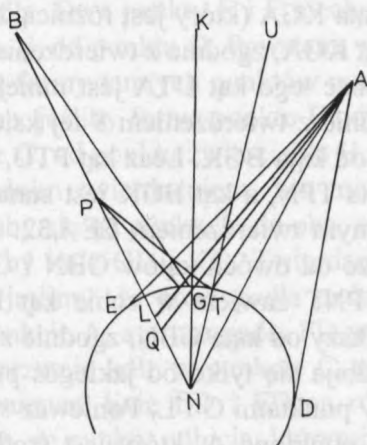
mocy twierdzenia 12 tej książki, że stosunek linii BN do linii NQ jest taki jak linii BF do linii FQ, i podobnie stosunek linii BN do NO będzie taki jak stosunek linii BM do MO. Ponieważ jednak linia ON jest większa od linii QN, gdyż całość jest większa od jej części, to, zgodnie z EE V,8, stosunek linii BN do QN będzie większy niż [linii BN] do linii NO. Stosunek linii BF do FQ jest więc większy niż linii BM do MO, a to jest niemożliwe i niezgodne z twierdzeniem I,9 tego dzieła, ponieważ linia BF jest mniejsza od linii BM, a linia FQ jest większa niż linia MO; wynika więc to, że z punktu Z nie ma odbicia [do oka A]. Ale nie ma także [odbicia do oka A] z żadnego innego punktu na łuku GL, ponieważ dla dowolnego innego punktu niż punkt Z możemy zastosować dowodzenie przedstawione powyżej.

Podobnie nie będzie również odbicia [do oka A] od dowolnego punktu na łuku GD. Przyjmijmy, że zachodzi odbicie od jakiegoś punktu, np. punktu T. Poprowadźmy linię BT. Linia ATH niech przetnie prostopadłą BN w punkcie H. Poprowadźmy styczną TP do koła w punkcie T, która przetnie prostopadłą BN w punkcie P. Zgodnie z twierdzeniem 12 tej książki, stosunek linii BN do NH będzie więc taki jak linii BP do PH, a linii BN do NQ taki jak linii BF do FQ. Na podstawie EE V,8, stosunek linii BN do NH jest jednak większy niż linii BN do NQ; stosunek linii BP do PH jest więc większy niż linii BF do FQ, a to jest niemożliwe i niezgodne z twierdzeniem I,9 tego dzieła. Stosunek linii mniejszej do większej jest bowiem większy niż stosunek linii mniejszej do większej, co jest zgodne z tym samym twierdzeniem I,9 tego dzieła, bo linia BF jest większa niż linia BP, a linia PH większa niż linia FQ. Jest więc oczywiste, że z żadnego punktu na łuku GD nie znajdzie odbicie formy punktu B do oka A.

Dowolny punkt formy widzianej odbije się więc do oka tylko od jednego punktu zwierciadła wypukłego kulistego i będzie tylko jedna linia odbicia [formy] dowolnego punktu widzianego, ale, zgodnie z twierdzeniem I,20 tego dzieła, będzie również jedna tylko prostopadła padania. Istnieje zatem jeden jedyny punkt, w którym te linie proste się przecinają i, jak wynika z twierdzenia 11 tej książki, jest to miejsce obrazu. Wobec tego jednego punktu jest tylko jeden obraz. A to jest przedmiotem twierdzenia.

17. Jeżeli na jednej prostopadłej padania do powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego znajdują się dwa punkty, których formy mogą się odbić od powierzchni zwierciadła do jednego oka, to wówczas punkt odbicia [formy] punktu bliższego środka zwierciadła będzie bardziej oddalony od środka oka niż od tego samego środka oka bę-

dzie oddalony [punkt odbicia formy] punktu bardziej oddalonego od tego samego środka zwierciadła (Alh. V,30).

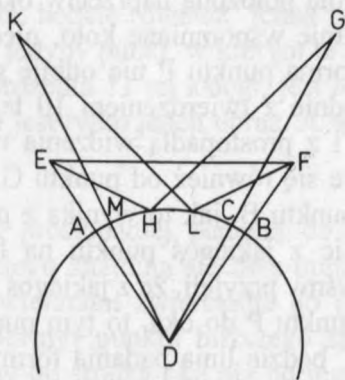


[Rys. 13]

Pozostawiając układ taki jak w poprzednim twierdzeniu oznaczamy prostopadłą padania przez NB [rys. 13]¹, a dwa punkty niech będą oznaczone jako P i B. Niech punkt P będzie bliżej środka zwierciadła, tzn. punktu N, który jest środkiem koła DGE, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni danego zwierciadła. Niech punkt B będzie bardziej oddalony od tego środka. Środek oka niech będzie w punkcie A. Miejscem odbicia [formy] punktu B niech będzie punkt G. Twierdząc, że punkt odbicia formy punktu P jest bardziej oddalony od środka oka, które jest w punkcie A, niż punkt G, który jest punktem odbicia formy punktu B. Poprowadźmy z punktu A dwie linie styczne do koła, które oznaczmy jako AE i AD, wyznaczające, zgodnie z twierdzeniem 2 tej księgi, część koła położoną naprzeciw oka. Punktem, w którym prostopadła BN przetnie wspomniane koło, niech będzie punkt L. Jest więc oczywiste, że forma punktu P nie odbije się od punktu L do punktu A, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 10 tej księgi, odbija się tylko po tej prostopadłej i z prostopadłą widzenia tworzy jedną linię². Forma punktu P nie odbije się również od punktu G, ponieważ od tego punktu odbija się forma punktu B, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, ale musi się odbić z jakiegoś punktu na łuku GL pomiędzy punktami G i L. Bo jeśli byśmy przyjęli, że z jakiegoś punktu na łuku GD zachodzi odbicie formy punktu P do oka, to tym punktem niech będzie punkt T, a wtedy linia PT będzie linią padania formy punktu P. Poprowadźmy również do punktu T prostopadłą NTU, która, zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi, musi przeciąć kąt PTA na równe części. Popro-

wadźmy również do punktu G prostopadłą NGK: jest więc oczywiste, na mocy EE I,21, że kąt NTA jest większy od kąta NGA, a zatem kąt UTA (który, zgodnie z EE I,13, jest różnicą dwóch [kątów] prostych i kąta NTA) jest mniejszy od kąta KGA (który jest różnicą dwóch [kątów] prostych i kąta NGA), ale kąt KGA, zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi, jest równy kątowi BGK. Wobec tego kąt UTA jest mniejszy od kąta BGK, zaś kąt PTU (który, zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi, jest równy kątowi UTA) jest mniejszy od kąta BGK. Lecz kąt PTU, zgodnie z EE I,32, jest sumą kąta PNT i kąta TPN, a kąt BGK jest sumą kąta GBN i kąta GNB, zgodnie z tym samym twierdzeniem EE I,32. A zatem dwa kąty TNP i TPN będą mniejsze od dwóch kątów GBN i GNB; a to jest niemożliwe, ponieważ kąt PNT zawiera w sobie kąt BNG jakby swoją część, a kąt TPN jest większy od kąta GBN, zgodnie z EE I,16. Jest więc oczywiste, że punkt P odbija się tylko od jakiegoś punktu na łuku GL, który znajduje się między punktami G i L. Ponieważ spośród punktów G i L punkt G jest bliższy punktowi A, który jest środkiem oka, wynika więc to, że każdy punkt łuku GL, inny niż punkt G, jest bardziej oddalony od środka oka A niż punkt G, który jest punktem odbicia formy punktu B. Wobec tego punkt odbicia formy punktu bliższego środka zwierciadła jest bardziej oddalony od środka oka niż punkt odbicia formy punktu bardziej oddalonego od środka zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

18. Formy wszystkich punktów równo oddalonych od środka zwierciadła kulistego wypukłego odbijają się do oka¹ [znajdującego się w różnych położeniach, ale w tej samej odległości od środka zwierciadła] pod takimi samymi kątami, gdy kąty utworzone z prostopadłych padania i średnic widzenia [o wierzchołkach] w środku zwierciadła są równe².

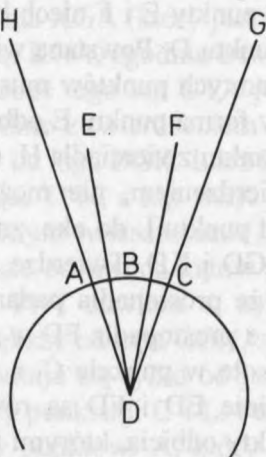


[Rys. 14]

Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego niech będzie koło ABC [rys. 14]. Jego środek oznaczmy przez D. Z twierdzenia 1 tej księgi wynika, że punkt D jest środkiem zwierciadła. Dwa punkty E i F niech będą równo oddalone od środka zwierciadła, tj. od punktu D. Powstaną więc dwie równe linie ED i FD. Twierdzą, że formy tamtych punktów muszą się odbić do oka pod równymi kątami, np. jeśli by forma punktu E odbiła się do oka, znajdującego się w punkcie G, od punktu zwierciadła H, a forma punktu F (która, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, nie może się odbić do oka G z punktu H) odbiłaby się od punktu L do oka, znajdującego się w punkcie K, to powstałyby linie GD i KD. Twierdzą, że kąt EDG jest równy kątowi FDK. Przyjmijmy, że prostopadła padania, która jest linią ED, przetnie koło w punkcie A, a prostopadła FD w punkcie B. Średnica widzenia GD niech przetnie koło w punkcie C, a średnica [widzenia] KD w punkcie M. Ponieważ linie ED i FD są równe, to z poprzedniego twierdzenia wynika, że punkty odbicia, którymi są punkty H i L, są równo oddalone od każdego oka³, do którego się odbijają [formy punktów E i F], np. ile oddalony jest punkt odbicia H od punktu C, w którym średnica widzenia GD przecina koło, tyle samo punkt odbicia, oznaczony przez L, jest oddalony od punktu M, w którym średnica widzenia, która jest linią KD, przecina koło. Ponieważ punkt odbicia formy punktu mniej oddalonego od środka zwierciadła, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, jest bardziej oddalony od środka oka, to [punkt odbicia formy] punktu bardziej oddalonego jest bliższy [środku oka]. Wobec tego punkty [odbicia form tych punktów], które są równo oddalone [od środka zwierciadła], będą równo oddalone od każdego oka, do którego [formy każdego z punktów] się odbijają. I nie ma żadnej różnicy, czy jakieś punkty znajdują się na różnych prostopadłych padania czy na jednej prostopadłej, zawsze bowiem jest takie samo zachowanie i taki sam sposób odbicia punktów równo oddalonych od środka tego samego zwierciadła; wobec tego łuk HC jest równy łukowi LM i z tego samego powodu łuk AH jest równy łukowi BL. Ponieważ jednak, zgodnie z EE VI,33, obwód koła podobnie jak i cała powierzchnia zwierciadła, (zgodnie z twierdzeniem I,87 tego dzieła) w równym stopniu jest oddalony od środka zwierciadła, a punkty E i F są w równej odległości od tego samego środka, wobec tego cały łuk AC jest równy całemu łukowi BM, a zatem, zgodnie z EE III,27, kąt EDG jest równy kątowi FDK. A to jest przedmiotem twierdzenia.

19. Jest niemożliwe, aby [formy] dwóch punktów, położonych w równej odległości od środka zwierciadła kulistego wypukłego, znajdujących się po tej samej stronie średnicy widzenia, odbijały się, do tego

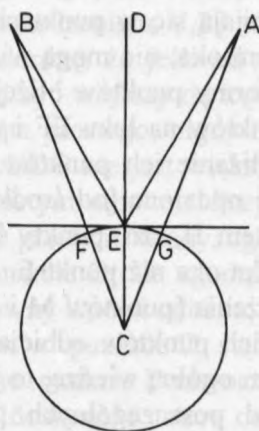
samego oka [pod równymi kątami]¹ od łuku, który jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła.



[Rys. 15]

Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego niech będzie koło ABC, którego środek niech się znajduje w punkcie D [rys. 15]². Dwa punkty niech będą równo oddalone od środka zwierciadła; niech to będą punkty E i F. Środek oka niech będzie w punkcie G, na tej samej płaszczyźnie co punkty E i F, po jednej ich stronie. Punkt E niech będzie bardziej oddalony od punktu G niż punkt F. Twierdzą, że jest niemożliwe, aby [formy] tych dwóch punktów E i F odbiły się do jednego oka, znajdującego się w punkcie G [pod równymi kątami]. Poprowadźmy linie ED, FD, GD. Z założenia wynika również, że kąt EDG jest większy od kąta FDG, podobnie jak całość jest większa od swojej części. Przy punkcie D, który jest punktem końcowym linii FD, wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi EDG i niech to będzie kąt FDH. Jest więc oczywiste, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, że forma punktu F odbije się do punktu H, który będzie [dodatkovym] punktem oprócz punktu G; a zatem, zgodnie z twierdzeniem 15 tej księgi, nie dojdzie do punktu G. Wynika więc to, co zakładano. Bo jeśli byśmy przyjęli, że odbija się do punktu G, to, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, kąt częściowy, którym jest kąt FDG, byłby równy kątowi EDG, a to jest niemożliwe.

20. Znaleźć punkt odbicia, kiedy punkt rzeczy widzianej i środek oka są równo oddalone od powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego (Alh. V,31).

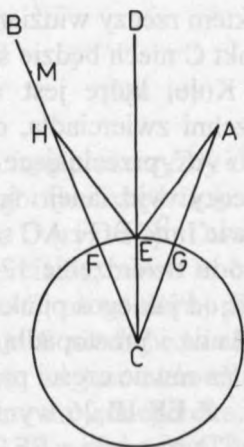


[Rys. 16]

Punkt B niech będzie punktem rzeczy widzianej [rys. 16]¹. Środkiem oka niech będzie punkt A. Punkt C niech będzie środkiem danego zwierciadła wypukłego kulistego. Koło, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, oznaczmy przez EFG. Poprowadźmy prostopadłe BC i AC, przecinające koło w punktach F i G. A zatem, ponieważ punkt rzeczy widzianej i środek oka są w równej odległości [od punktu C], te dwie linie BC i AC są równe. Skoro na podstawie tego, co wynika z dowodu twierdzenia 17 tej księgi, stało się jasne, że odbicie musi zachodzić od jakiegoś punktu łuku FG, znajdującego się między prostopadłą padania i prostopadłą odbicia, to podzielmy, jak podano w EE I,9, kąt ACB na równe części prowadząc linię CD przecinającą łuk FG w punkcie E. Z EE III,26 wynika również, że łuk FE jest równy łukowi EG, a linia CD, zgodnie z EE III,18, będzie prostopadłą do linii stycznej do koła w punkcie E. Poprowadźmy więc do punktu E dwie linie AE i BE. Zgodnie z EE I,4 i na podstawie założenia, powstaną dwa trójkąty AEC i BEC równokątne i o bokach odpowiednio równych². Kąt AED będzie więc równy kątowi DEB. Zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi, punkt E, który jest punktem środkowym łuku FG, będzie punktem odbicia formy punktu B do oka A. To zaś jest przedmiotem twierdzenia.

Jeśli by linie BC i AC były natomiast nierówne [rys. 16a]³, to przyjmijmy, że są one równe w odniesieniu do linii dłuższej, np. jeśli by linia BC była dłuższa od linii AC, chociaż linia FC jest równa linii CG (ponieważ są półśrednicami tego samego koła), to wtedy linia BF musi zostać przycięta w punkcie H tak, aby była równa linii AG: niech FH będzie równa linii AG. Jest więc oczywiste na podstawie przeprowadzonych rozważań, że forma punktu H odbija się w punkcie E do oka A.

Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 17 tej księgi, formy punktów bliżej położonych środka C, odbijają się w punktach bardziej oddalonych od punktu, który jest środkiem oka, nie mogą więc one padać na punkt E. Jest więc oczywiste, że [formy punktów bliżej położonych środka oka] odbijają się od innych punktów na łuku EF i w miarę ich oddalania od środka koła C nastąpi zbliżanie ich punktów odbicia do środka oka⁴. Natomiast punkty bardziej oddalone [od środka oka], np. punkty, które znajdują się ponad punktem H, tzn. punkty M i B, będą miały swoje punkty odbicia bliżej środka oka niż punkt E. Będą więc leżały na łuku EG i w zależności od zbliżenia [punktów M i B] do środka koła C⁵ będzie wzrastało oddalenie ich punktów odbicia od środka oka. Chociaż powyższy wywód daje nam ogólną wiedzę, to jednak odbicie [form] poszczególnych punktów od poszczególnych punktów na powierzchni zwierciadła należy dokładnie zbadać.

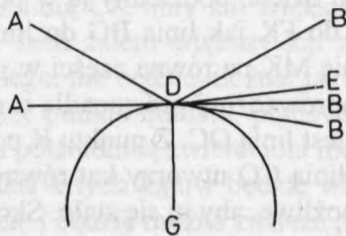


[Rys. 16a]

21. Jeśli kąt zawarty pomiędzy linią padania, poprowadzoną ukośnie od punktu rzeczy widzianej do jakiegoś punktu na powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, i linią poprowadzoną od środka zwierciadła do tego samego punktu, nie będzie kątem większym od kąta prostego, to jest niemożliwe, aby w tym punkcie zaszło doskonałe odbicie do jakiegoś oka (Alh. V, 40).

Środkiem oka niech będzie punkt A, a punkt B punktem rzeczy widzianej [rys. 17]. Punkt G niech będzie środkiem zwierciadła kulistego wypukłego, zaś wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie koło, którego środkiem, zgodnie z twierdzeniem 1 tej księgi, będzie punkt G. Niech punkt D będzie jakimś punktem

odbicia. Poprowadźmy linie GD, BD i AD, które, zgodnie z twierdzeniem 6 tej książki bądź twierdzeniem V,27 tego dzieła, muszą być na płaszczyźnie odbicia. Twierdzę, że jeśli od punktu D musi zachodzić odbicie, to kąt BDG musi być większy od kąta prostego, ponieważ jeśli by nie był większy od kąta prostego, nigdy nie będzie odbicia od tego punktu. Jeśli bowiem kąt BDG nie jest większy od kąta prostego, oznacza to, że jest kątem prostym albo mniejszym od kąta prostego. Powiedzmy, że jest on kątem prostym: wtedy, zgodnie z EE III,16, linia BD jest styczna do koła w punkcie D, ale zgodnie z twierdzenia V,20 tego dzieła, kąt padania jest równy kątowi odbicia, a zatem i kąt ADG będzie prosty i styka się z kołem w punkcie D, stąd, zgodnie z EE I,14, dwie linie BD i DA połączone w punkcie D utworzą jedną linię. Nie zachodzi zatem odbicie, zgodnie z doskonałą naturą odbicia, formy punktu B od punktu D zwierciadła do oka, znajdującego się w punkcie A, ale po prostu widzenie zachodzi po linii ADB, co jest sprzeczne z założeniem, ponieważ przyjęto, że punkt D jest punktem odbicia. Gdybyśmy zaś przyjęli, że kąt BDG jest mniejszy od kąta prostego, wtenczas poprowadźmy, jak podano w EE III,17, z punktu D linię styczną do koła w punkcie D, która po jej przedłużeniu do części linii DB będzie oznaczona DE; a zatem zgodnie z EE III,18, kąt GDE będzie prosty. Ponieważ dany kąt BDG jest mniejszy od kąta prostego, jest więc kąt BDG mniejszy od kąta EDG. Ponieważ linia BD, która jest linią padania formy punktu B, musi leżeć poza zwierciadłem, to wobec tego musi ona również dzielić kąt styczności linii DE: a to jest niemożliwe i wbrew EE III,16. Nie jest więc możliwe, aby kąt BDG był mniejszy od kąta prostego, ale nie jest również równy [kątowni] prostemu, wobec tego musi być większy od kąta prostego. A to zakładano.



[Rys. 17]

22. Gdy dany punkt rzeczy widzianej jest bardziej oddalony od środka zwierciadła kulistego wypukłego niż środek oka, jest możliwe znaleźć na powierzchni zwierciadła określony punkt odbicia formy danego punktu do środka tego oka (Alh.V,39).

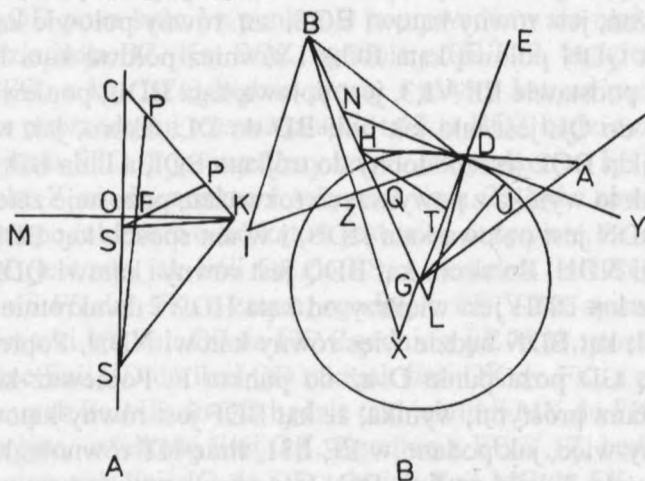
gdy kąt KOC jest prosty; to jest oczywiste, że kąt OKC, który jest równy kątowi EBD, jest ostry; z tego wynika, na podstawie EE I,32, że kąt OKC jest równy kątowi BGE. Wobec tego, że trójkąt KOC jest prostokątny, a na jego boku OK jest dany punkt F, to, zgodnie z twierdzeniem I,137 tego dzieła, z danego punktu F poprowadźmy do podstawy CK trójkątą linię, która będzie linią FP. Niech ona się przetnie z przedłużonym bokiem CO w punkcie S tak, aby stosunek linii SP do linii PK był taki jak linii BG do półśrednicy koła, którego środkiem jest punkt G; a jest to półśrednica GU. Z kąta BGA odetnijmy, w sposób podany w twierdzeniu I,27 tego dzieła, kąt BGD, równy kątowi FPK. A jest to możliwe dzięki temu, że kąt PCS jest równy połowie kąta BGA, i również kąt PCS jest, zgodnie z EE I,18, większy od kąta CSP. Aby znaleźć odpowiedź na postawione powyżej pytanie, należy poprowadzić linię SP w taki sposób, aby linia SP była większa od linii CP. W przeciwnym razie za pomocą linii MK nie można znaleźć poszukiwanego [punktu] odbicia, ale będzie trzeba przyjąć inną linię. Kąt FPK jest więc, zgodnie z EE I,32, mniejszy od kąta BGA. Poprowadźmy linie KS i BD. Ponieważ stosunek linii SP do linii PK jest taki jak linii BG do półśrednicy GD, a kąty zawarte pomiędzy tymi proporcjonalnymi liniami są równe, wobec tego, zgodnie z EE VI,6, również trójkąty SPK i BGD będą równokątne, a kąt SKP będzie równy kątowi BDG. Ale, być może, zgodnie z tym, co zakłada się w twierdzeniu I,133 tego dzieła i dowodzi się w twierdzeniu I,137 tego dzieła, jest możliwe poprowadzenie z punktu F do linii CK innej linii, podobnej do linii SP. Dla przykładu jeśli poprowadzimy w ten sposób linię YFR, przecinającą linię CS w punkcie Y, a linię CK w punkcie R tak, jak się zakłada, tzn., aby jej stosunek do części RK linii [CK], którą odetnie z linii CK, był taki jak linii SP do linii PK, wtedy z punktu K poprowadźmy do linii OS linię KY, która jest inną linią niż linia SK, tworzącą z linią CK inny kąt większy albo mniejszy od kąta CKS, tzn. kąt CKY. Jeśli zatem większy kąt z tych kątów nie będzie większy od kąta prostego, nie będzie można, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, znaleźć punktu odbicia, ponieważ wówczas kąt zawarty między linią odbicia i półśrednicą zwierciadła nie będzie większy od kąta prostego. Jeśli zaś jakiś z tych kątów będzie większy od kąta prostego, możliwe będzie odbicie i będzie można znaleźć punkt odbicia.

Przyjmijmy więc najpierw, że kąt CKS jest większy od kąta prostego; będzie wtedy możliwe znalezienie punktu odbicia. Jest bowiem oczywiste, że, jeśli kąt CKS jest większy od kąta prostego, to równy mu kąt BDG jest większy od kąta prostego. I tak poprowadźmy, jak podano w EE III,17, z punktu D linię styczną do koła, a jest to linia NYD. Niech punkt N tej linii leży na linii BG, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła. Skoro, zgodnie z EE I,32, kąt PKO jest mniejszy od kąta proste-

go, dlatego że kąt COK jest kątem prostym, jak to wynika z poprzednich twierdzeń, to odetnijmy, jak podano w twierdzeniu I,27 tego dzieła, z kąta BDG kąt równy kątowni PKO przeprowadzając linię DQ przecinającą linię BG w punkcie Q; będzie to kąt QDG. Kiedy więc kąt SPK jest równy kątowni DGQ, a kąt PKF równy kątowni QDG, to, na podstawie EE I,32, trójkąt FPK będzie równokątny z trójkątem QGD. Kąt PFK będzie więc równy kątowni DQG, a, zgodnie z EE I,13, kąt DQB będzie równy kątowni KFS. Skoro kąt BDQ jest równy kątowni FKS (ponieważ, gdy cały kąt BDG jest równy całemu kątowni CKS, a kąt QDG jest równy kątowni PKF, to kąt BDQ jest równy kątowni FKS), wobec tego, gdy w tych trójkątach BDQ i FKS dwa kąty są równe, to i trzeci, zgodnie z EE I,32, jest równy trzeciemu kątowni, tzn. kąt DBQ jest równy kątowni KSF; a zatem, zgodnie z EE VI,4, trójkąty BDQ i FKS są podobne. Poprowadźmy zatem linię QD poza koło i z punktu B poprowadźmy do niej prostopadłą, która będzie linią BZ. Kąt BQZ, zgodnie z EE I,13, będzie więc równy kątowni SFO, a kąt BZQ będzie prosty i równy kątowni prostemu SOF. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami, trójkąt BQZ będzie zatem podobny do trójkąta SFO. Poprowadźmy więc, jak podano w EE I,3, linię DZ poza punkt Z aż do punktu I tak, aby linia ZI była równa linii ZD. Z uwagi na podobieństwo trójkątów jest więc oczywiste, że stosunek linii ZQ do QB jest taki jak linii OF do FS, a stosunek linii BQ do QD jest taki jak linii FS do FK, a zatem, zgodnie z EE V,22, stosunek linii ZQ do QD jest taki jak linii OF do FK. Zgodnie z EE V,18, stosunek łącznie³ będzie więc linii ZD do linii QD taki jak linii OK do FK, a zgodnie z EE V,15, stosunek linii ID do QD będzie taki jak linii MK do FK, bo linia ID ma podwójną wielkość linii OK. Zgodnie z EE V,17, będzie więc oddzielnie⁴ stosunek linii IQ do QD taki jak linii MF do FK, ale na mocy poprzednich rozważań stosunek MF do FK jest taki jak GB do GA, a zatem, zgodnie z EE V,11, stosunek IQ do QD będzie taki jak BG do GA, ponieważ został przyjęty stosunek MF do FK taki jak BG do GA. Poprowadźmy teraz linię BI, do której przez punkt D, zgodnie z EE I,31, poprowadźmy równoległą DL i przedłużmy linię BG aż do jej przecięcia się z linią DL w punkcie L. Te linie się przetną na podstawie twierdzenia I,2 tego dzieła. Na podstawie EE I,15 i I,29 oraz EE VI,4, trójkąt LDQ będzie podobny do trójkąta BQI, a stosunek linii QI do QD będzie taki jak linii BI do DL. Kiedy zatem linia IZ jest równa linii ZD, a linia BZ jest prostopadła do linii DI, jak to wynika z poprzednich rozważań, to, zgodnie z EE I,4, linia BD będzie równa linii BI. Stosunek linii BD do DL, jak wynika z EE V,7, będzie więc taki jak linii BI do DL. Wobec tego stosunek linii BD do DL jest taki jak linii IQ do QD, a zatem, jak wynika z EE V,11, taki jak linii BG do GA. Poprowadźmy, jak podano w EE I,23, z punktu D linię DH, która wraz z linią DL utworzy kąt rów-

ny kątowni BGA; niech to będzie kąt HDL. Punkt H niech leży na linii BG. Kiedy zatem linie HL i DL przetną się w punkcie L, powstaną, jak wynika z EE I,32 bądź z twierdzenia I,14 tego dzieła, dwa kąty LHD i LDH mniejsze od dwóch kątów prostych. A zatem dwa kąty AGH i DHG, które są równe tamtym kątom, jak to wynika z poprzednich rozważań, są mniejsze od dwóch kątów prostych i dlatego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linia HD przetnie się z linią GA. Twierdząc, że przetnie się w punkcie A⁵. Jest bowiem oczywiste, że, zgodnie z EE III,18, kąt GDN jest prosty, ale, zgodnie z EE I,32, gdy w trójkącie OKC kąt COK jest prosty, to dwa kąty OCK i CKO łącznie są równe kątowni prostemu, kąt GDN jest równy tamtym dwóm kątom OKC i CKO, a kąt OKC, jak wynika z powyższych rozważań, jest równy kątowni GDQ. Wobec tego kąt QDN jest równy kątowni OKC, który, jak wynika z powyższych rozważań, jest równy kątowni BGE, tzn. równy połowie kąta BGA. Jest więc kąt QDN połową kąta BGA i również połową kąta HDL, ale kąt QDB, na podstawie EE VI,3, jest połową kąta BDL, ponieważ stosunek linii BQ do QL jest taki jak linii BD do DL. Skoro, jak wykazano powyżej, trójkąt DQL jest podobny do trójkąta BQL, a linia BD jest równa linii BI, jak to wynika z powyższych rozważań, pozostaje zatem wniosek, że kąt BDN jest połową kąta HDB, i w ten sposób kąt BDN będzie równy kątowni NDH. Bo skoro kąt BDQ jest równy kątowni QDL, to jest oczywiste, że kąt BDH jest większy od kąta HDL i dwukrotnie większy od kąta QDH; kąt BDN będzie więc równy kątowni NDH. Poprowadźmy również linię GD poza punkt D aż do punktu F. Ponieważ kąty FDN i GDN są kątami prostymi, wynika, że kąt BDF jest równy kątowni HDG. Poprowadźmy więc, jak podano w EE I,31, linię HT równoległą do linii BD, której punkt T leży na linii DG. Jest więc oczywiste na podstawie EE I,29, że kąt BDF jest równy kątowni HTD, ale i kąt BDF jest równy kątowni HDG. Zgodnie z EE I,6, linia HT jest więc równa linii HD, ale z EE I,29 i EE VI,4, wynika, że gdy linie BD i HT są równoległe, to stosunek linii BD do HT jest taki jak linii BG do GH. Zgodnie z EE V,7, stosunek linii BD do DH jest zatem taki jak linii BG do GH. Jednak z poprzednich rozważań wynika, że linia HD poprowadzona poza punkt D przetnie się z linią GA i, zgodnie z EE I,32, powstanie trójkąt podobny do trójkąta HDL – o ile będą one miały wspólny kąt LHD – zaś kąt HDL będzie równy kątowni HGA na podstawie poprzednich rozważań. Zgodnie z EE VI,4, stosunek linii HD do linii DL jest więc taki jak linii HG do linii, którą odcina linia HD od linii AG, a stosunek linii BD do DL, zgodnie z twierdzeniem I,13 tego dzieła, składa się ze stosunku linii BD do DH i linii DH do LD⁶. Zatem, jak wynika z powyższych rozważań, stosunek linii BD do linii DL składa się ze stosunku linii BG do GH i linii GH do linii, którą linia HD odcina od linii GA, ale stosunek linii

BD do DL, jak okazało się powyżej, jest taki jak linii BG do GA. Wobec tego stosunek BG do GA składa się ze stosunków linii BG do GH i samej linii GH do linii, którą odcina linia HG od linii GA. Stosunek linii BG do linii GA składa się zaś, zgodnie z twierdzeniem I,13 tego dzieła, ze stosunku linii BG do GH i linii GH do GA. Linia GA jest więc linią, którą linia HD odcina od linii AG, a zatem linia HD przecina się z linią AG w punkcie A. Ponieważ, jak to wynika z poprzednich rozważań, kąt BDF jest równy kątowi HDG, a kąt HDG, zgodnie z EE I,15, jest równy kątowi FDA, położonemu jemu naprzeciw, jest oczywiste, że kąt BDF jest równy kątowi FDA. Wobec tego punkt D jest punktem odbicia, zgodnie z twierdzeniem 8 tej książki, ponieważ w tym punkcie kąt padania jest równy kątowi odbicia. A to zakładano, przyjmując, że kąt CKS jest większy od kąta prostego.



[Rys. 19]

Jeśli żaden z kątów, tzn. kąt CKS i CKY nie będzie większy od kąta prostego, twierdzą, że nie będzie odbicia do oka od żadnego punktu na zwierciadle. Przyjmijmy jednak, że to byłoby możliwe⁷; niech więc punkt D będzie punktem odbicia; poprowadźmy linie AD, BD, AG, BG, DG [rys. 19B i 19A]⁸. Ponieważ zachodzi odbicie z punktu D na zwierciadle, z poprzedniego twierdzenia wynika, że kąt BDG musi być większy od kąta prostego; nie będzie więc odbicia od tych zwierciadeł, jeśli będzie takie położenie [zwierciadła, przedmiotu i oka]⁹, aby dowolny¹⁰ z kątów CKS i CKY¹¹ był większy od kąta prostego. Ale tego samego można dowieść również inaczej¹². Poprowadźmy linię AD do wnętrza koła, do punktu H na linii GB, i poprowadźmy, jak podano w EE I,23, linię DL do wnętrza koła tak, aby powstał kąt LDH równy kątowi AGB. Przedłużmy również linię BG tak, aby się przecięła z linią DL w punkcie

L, a przetną się one, na podstawie twierdzenia I,14 tego dzieła, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem I,42 tego dzieła, kąt GDL jest mniejszy od kąta prostego i kąt DGB, jak to wynika z twierdzenia 3 tej księgi i EE VI,33, jest również mniejszy od kąta prostego. Poprowadźmy linię styczną do koła w punkcie D i niech to będzie linia NDY. Po przeprowadzeniu, zgodnie z EE I,19 i EE I,23, z punktu D linii DQ, przecinającej linię GB w punkcie Q niech powstanie kąt QDN równy połowie kąta AGB. Jest więc¹³ oczywiste, że trójkąt HDL jest równokątny z trójkątem HGA. Ponieważ kąt HDL jest równy kątowi HGA, a kąt AHG jest wspólny, to, jak wynika z EE I,32, trzeci kąt będzie równy trzeciemu kątowi. Wobec tego, zgodnie z EE VI,4, stosunek linii HD do DL będzie taki jak linii HG do GA. Poprowadźmy, jak podano w EE I,31, z punktu H, linię równoległą do linii BD i niech to będzie linia HT. Zgodnie z EE I,29 i EE VI,4, stosunek linii BD do TH będzie taki jak linii BG do GH. Ponieważ jednak, na podstawie założenia, forma punktu B odbija się do oka A z punktu D na zwierciadle, poprowadźmy linię GD poza koło do punktu E; przeto na podstawie twierdzenia 8 tej księgi, kąt EDB będzie równy kątowi EDA, a zatem, jak wynika z EE I,15 i I,29, kąt DTH będzie równy kątowi HDT, a, na podstawie EE I,6, linia DH będzie równa linii HT. Wobec tego, jak wynika z EE VI,4, stosunek linii BG do GH będzie taki jak linii BD do HT skoro linia TH jest równoległa do linii DB. Ale linia TH jest równa tej linii DH, a zatem, zgodnie z EE V,7, stosunek linii BD do DH jest taki jak linii BG do GH. Stosunek linii HD do DL był natomiast taki jak linii HG do GA. Wobec tego, zgodnie z EE V,22, stosunek linii BD do DL będzie taki jak linii BG do GA. Jednak gdy kąt BDE jest równy kątowi HDG, zgodnie z poprzednimi wywodami, a kąt NDE jest równy kątowi NDG, ponieważ obydwa są kątami prostymi, to pozostały kąt BDN jest równy kątowi NDH. Kąt HDN jest więc połową kąta BDH, a kąt NDQ jest połową kąta AGB zgodnie z wcześniejszymi wywodami, a zatem jest też połową kąta HDL, który jest równy kątowi AGB. Jest więc kąt BDQ połową kąta BDL, a kąt BDQ jest równy kątowi QDL, wobec tego, jak wynika z EE VI,3, w trójkącie BDL stosunek linii BQ do QL będzie taki jak linii BD do DL. Poprowadźmy również, jak podano w EE I,31, z punktu B linię równoległą do linii DL, będzie to linia BI. Linia DQ niech się przetnie z linią BI w punkcie I, a przetnie się zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła. Podzielmy, jak podano w EE I,10 linię DI na równe części w punkcie Z. Poprowadźmy linię BZ. Zgodnie z EE I,15, I,29, I,32 jest oczywiste, że trójkąty BQI i QDL są równokątne, a zatem, jak wynika z EE VI,4, stosunek linii BQ do QL będzie taki jak linii BI do DL, zaś na podstawie poprzednich wywodów, stosunek linii BQ do QL był taki jak linii BD do DL. Wobec tego, na podstawie EE V,11 stosunek linii BI do DL jest taki jak linii BD do DL. A zatem,

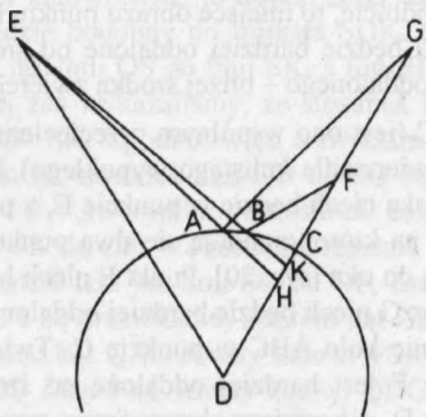
zgodnie z EE V,9, linie BI i BD są równe. W rezultacie, jak wynika z twierdzenia I,31 tego dzieła, linia BZ jest prostopadła do linii DI. Stosunek linii IQ do QD jest zaś, zgodnie z poprzednimi wywodami, taki jak linii MF do FK¹⁴. Zatem, zgodnie z EE V,18, łącznie stosunek linii ID do DQ będzie taki jak linii MK do FK, a na podstawie EE V,15, stosunek linii DZ do QD będzie taki jak linii OK do FK, stąd, na podstawie EE V,17, stosunek linii ZQ do QG będzie taki jak linii OF do FK. Poprowadźmy również linię BZ do zwierciadła tak, aby przecięła się z linią EG, a przetnie się, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, gdy kąt DZB jest prosty, jak to wcześniej wykazano, a kąt ZDG jest mniejszy od kąta prostego, którym jest kąt NDG. Punkt przecięcia oznaczmy więc jako X¹⁵. Z wcześniejszych rozważań wynika zaś, że stosunek linii BG do GD jest taki jak linii SP do PK. Skoro więc twierdzi się, że kąt CKS nie jest większy od kąta prostego, to na linii CK w punkcie K powstaje kąt większy od kąta prostego¹⁶. A to może się stać, skoro kąt QDN, jak to wynika z poprzednich rozważań, jest równy połowie kąta AGB, dlatego że jest mu równy utworzony kąt KCO; stąd kąt QDN musi być równy kątowi KCO. Wobec tego, jak wynika z poprzednich rozważań, kąt QDG będzie równy kątowi CKO, co jest oczywiste jak poprzednio. Kiedy bowiem trójkąt CKO jest prostokątny, jest rzeczą oczywistą, że dwa kąty KCO i CKO mają wartość jednego kąta prostego, zgodnie z EE I,32, a zatem są równe kątowi NDG. A ponieważ kąt KCO jest równy kątowi NDQ, pozostały kąt CKO jest równy kątowi QDG. Załóżmy, że linia tworząca ten kąt przetnie się z linią CO w punkcie S. Poprowadźmy linię SP, przechodzącą przez punkt F, która jest inną linią od wcześniejszej linii SFP¹⁷. Twierdząc, że stosunek tej linii SP do linii PK, która jest częścią linii CK, będzie taki jak linii BG do GD. Bo skoro kąt BZD jest prosty i równy kątowi SOK, to trójkąt BZD, zgodnie z poprzednimi rozważaniami, będzie podobny do trójkąta SOK. Stosunek linii BZ do BD jest więc taki jak linii OS do linii SK, a linii BZ do ZD jak linii SO do OK. Wcześniej zaś wykazaliśmy, że stosunek linii ZQ do QD jest taki jak linii OF do FK. Zgodnie więc z twierdzeniem I,5 tego dzieła, odwrotny stosunek, tj., stosunek linii QD do ZQ będzie taki jak linii FK do OF. A zatem z EE V,18 wynika, że stosunek całej linii ZD do ZQ jest taki jak całej linii OK do OF. Wobec tego, zgodnie z EE V, 22, stosunek linii ZB do ZQ będzie taki jak linii SO do OF, zaś, zgodnie z EE VI,6, trójkąty ZQB i OFS są równokątne; a zatem kąt ZBQ jest równy kątowi OSF. Pozostaje więc kąt QBD równy kątowi FSK, kąt FKS, który jest równy kątowi BDQ i kąt PKF równy kątowi QDG zatem cały kąt SKP jest równy kątowi BDG. Zgodnie z EE I,32 i na podstawie EE VI,4, trójkąt BDG będzie więc podobny do trójkąta SPK, a cały trójkąt BDX będzie podobny do całego trójkąta CKS. Jest więc stosunek linii SP do PK

taki jak linii BG do GD. Po utworzeniu zatem w środku oka A kąta, równego kątowi SPK, i po przeprowadzeniu półśrednicy koła, która jest linią GU, jest oczywiste, zgodnie z powyżej przedstawionym sposobem [dowodzenia], że punkt U będzie punktem odbicia. Ponieważ, jak wynika z EE I, 16 i z przeprowadzonych powyżej rozważań, wcześniejszy kąt SPK jest większy od obecnego kąta SPK¹⁸, gdyż jest zewnętrzny, jest oczywiste, że z dwóch punktów na zwierciadle, którymi są punkty D i U, zachodziłoby odbicie; a to jest sprzeczne z twierdzeniem 16 tej książki. Nie może więc nigdy kąt SPK być większy od kąta prostego, jeśliby pod tym kątem miałyby się znajdować miejsce odbicia [formy] punktu, ponieważ nie jest możliwe odbicie po umieszczeniu punktu rzeczy widzianej i środka oka w takim położeniu. Również nie jest możliwe, aby każdy z dwu kątów utworzonych na linii MO był większy od kąta prostego. Bo jeśli każdy z nich będzie większy od kąta prostego, to, gdy w środku G utworzonego koła powstanie kąt równy kątowi SKM, w tym samym środku powstanie kąt inny i odmienny od tego, który utworzy z linią KM inna linia podobna do wcześniejszej¹⁹ linii SK. I tak z punktu D i innego punktu tego koła zachodziłoby odbicie formy tego samego punktu do tego samego oka; a to jest wbrew twierdzeniu 16 tej książki. Wobec tego tylko jeden z tych dwóch kątów musi być większy od kąta prostego. Obydwa nie mogą być ani większe, ani mniejsze od kąta prostego. Wynika więc to, co zakładano.

23. Gdy dwa punkty, których formy mogą się odbić do oka od powierzchni zwierciadła, znajdują się na jednej prostopadłej padania do powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego bądź na różnych prostopadłych, które układają się w sposób podobny względem oka¹, do którego zachodzi odbicie, to miejsce obrazu punktu bliżej położonego środka zwierciadła będzie bardziej oddalone od środka zwierciadła, a punktu bardziej oddalonego – bliżej środka zwierciadła.

Weźmy koło ABC (jest ono wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), którego środkiem jest punkt D. Środek oka niech będzie w punkcie E, a prostopadłą padania jest linia DFG, na której znajdują się dwa punkty F i G, których formy mogą odbić się do oka [rys. 20]. Punkt F niech będzie bliżej środka zwierciadła, a punkt G niech będzie bardziej oddalony. Ta prostopadła [padania] niech przetnie koło ABC w punkcie C. Twierdzą, że miejsce obrazu formy punktu F jest bardziej oddalone od środka zwierciadła, który jest w punkcie D, niż miejsce obrazu formy punktu G. Ponieważ, jak to wynika z założenia, forma każdego z tych punktów odbija się do oka od jakiegoś punktu zwierciadła, zgodnie z twierdzeniem 6 tej książki,

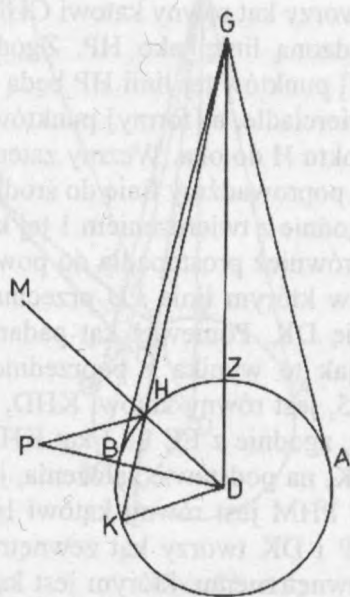
jest oczywiste, że gdy te punkty znajdują się na tej samej prostopadłej padania, to środek oka E wraz z obydwooma tymi punktami jest na tej samej płaszczyźnie odbicia. Nastąpi wobec tego odbicie każdego z tych punktów do oka E od jakiegoś punktu koła ABC. Przyjmijmy więc, że forma punktu G odbija się od punktu A, a forma punktu F od punktu B. Zgodnie z twierdzeniem 17 tej książki, punkt B będzie bardziej oddalony od środka oka E niż punkt A. Poprowadźmy średnicę widzenia, którą jest linia ED, i poprowadźmy linie padania, którymi są linie GA i FB, oraz linie odbicia, którymi są linie AE i BE, które przedłużone do wnętrza koła, zgodnie z twierdzeniem 9 tej książki, przetną prostopadłą [padania] DFG. Ponieważ linie odbicia przecinają się ze średnicą widzenia², którą jest linia ED, skutkiem tego linia EA przetnie prostopadłą GD w punkcie H, a linia EB w punkcie K. Zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, punkt H będzie więc miejscem obrazu formy punktu G, a punkt K miejscem obrazu formy punktu F. Ponieważ punkt H jest bliżej środka D niż punkt K, to, skoro linia HE przecina kąt DEK, jest rzeczą oczywistą, zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, że ta sama linia przetnie podstawę, położoną naprzeciw tego kąta, którą jest linia DK; w rezultacie punkt H jest bliżej położony środka zwierciadła, który jest w punkcie D, niż punkt K. Ponieważ, jak to wynika z podanego sposobu [dowodzenia], wszystkie linie, poprowadzone od środka oka, który jest w punkcie E, przez dowolne punkty na łuku AC (które są punktami znajdującymi się w środku pomiędzy punktami A i C) do prostopadłej DG, padają w punkty na półśrednicy DC dalej od środka niż punkt H, założenie jest oczywiste. Z tego też wynika, że, o ile punkty linii CG są bliżej środka D, o tyle miejsca ich obrazów są bardziej oddalone od środka zwierciadła, który jest w punkcie D.



[Rys. 20]

Ponieważ wszystkie prostopadłe padania przecinają się w środku zwierciadła, jest oczywiste, że do punktów różnych prostopadłych [padania], które w podobny sposób układają się względem oka, do którego zachodzi odbicie, ma zastosowanie ten sam sposób dowodzenia jak do punktów na tej jednej prostopadłej, dlatego że dowolnemu punktowi zaznaczonemu na tej jednej prostopadłej podobnej [do innej] odpowiada na innej prostopadłej punkt podobny, który znajduje się w tej samej odległości od środka zwierciadła, a miejsca obrazów tych dowolnych punktów (ponieważ podobnie układają się względem oka) układają się podobnie względem środka zwierciadła³. Wynika więc to, co zakładano.

24. Jeśli linia odbicia, poprowadzona od jakiegoś punktu zwierciadła kulistego wypukłego w taki sposób przetnie koło (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła), że część poprowadzonej linii, która znajduje się wewnątrz koła, jest równa półśrednicy koła, to miejsce widzianego obrazu zawsze będzie wewnątrz wypukłego zwierciadła (Alh. V,20).



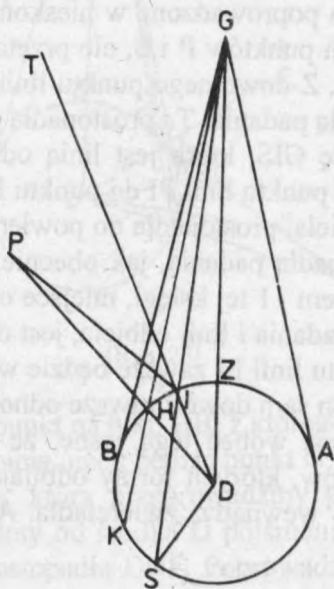
[Rys. 21]

Niech środkiem oka będzie punkt G [rys. 21]¹, a środkiem zwierciadła kulistego wypukłego punkt D. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie koło ABK. Od środka oka, tj. od punktu G, poprowadźmy także, jak podano w EE III,17, dwie

styczne do koła ABK, które są liniami GA i GB. Zgodnie z twierdzeniem 2 tej książki, część AB koła ABK będzie widoczna dla oka. Środkiem koła niech będzie punkt D. Ponieważ jednak oko i zwierciadło zmieniają miejsca, przyjmijmy takie położenie oka względem zwierciadła, aby część linii poprowadzonej z punktu G, [tj. środka oka] i przecinającej koło ABK – część znajdująca się wewnątrz koła, która jest cięciwą łuku koła, oznaczonego HK – była równa półśrednicy tego koła. Niech tą linią, której część HK, znajdująca się wewnątrz koła, równa półśrednicy DK będzie linia GHK. A to może się stać, jeżeli, jak podano w EE IV,1, w koło ABK wpisujemy linię HK równą półśrednicy tego koła, a na linii KH, przedłużonej poza koło, umieścimy środek oka. Twierdzę, że miejsce obrazu, odbitego² z punktu H, zawsze jest wewnątrz wypukłej powierzchni zwierciadła. Poprowadźmy bowiem z punktu H do linii stycznej do koła w punkcie H prostopadłą, która jest linią HM; ta więc linia, zgodnie z EE III,19, poprowadzona do koła przejdzie przez środek D. Twierdzę, że, gdy forma jakiejś rzeczy widzianej odbija się od punktu H, miejsce jej obrazu będzie zawsze wewnątrz wypukłości zwierciadła. Poprowadźmy, jak podano w EE I,23, przez punkt H linię, która przy punkcie H, końcu linii HM, tworzy kąt równy kątowi GHM; kąt ten oznaczmy przez PHM, a poprowadzoną linię jako HP. Zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, [formy] punktów tej linii HP będą się więc odbijały do oka G z punktu H na zwierciadle, a [formy] punktów innej linii nie będą mogły odbijać się od punktu H do oka. Weźmy zatem jakiś jej punkt, np. punkt P. Od tego punktu poprowadźmy linię do środka zwierciadła, a jest to linia PD. Linia PD, zgodnie z twierdzeniem 1 tej książki i twierdzeniem I,72 tego dzieła, będzie również prostopadłą do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie, w którym linia PD przecina obwód koła ABK. Poprowadźmy także linię DK. Ponieważ kąt padania PHM jest równy kątowi odbicia MHG, jak to wynika z poprzednich rozważań³, a kąt GHM, zgodnie z EE I,15, jest równy kątowi KHD, zatem kąt PHM jest równy kątowi KHD, ale, zgodnie z EE I,5, kąt KHD jest równy kątowi HDK dlatego, że bok HK, na podstawie założenia, jest równy półśrednicy DK; wobec tego kąt PHM jest równy kątowi HDK. Ponieważ linia MD padając na linię HP i DK tworzy kąt zewnętrzny, którym jest kąt MHP, równy kątowi wewnętrznemu, którym jest kąt MDK, wobec tego linia HP, zgodnie z EE I,28, jest równoległa do linii DK, a linie HP i DK przedłużone w nieskończoność nigdy się nie przetną. Linia PD, która jest prostopadłą padania formy punktu P, bądź jakkolwiek inna linia poprowadzona przez dowolny punkt na linii HP do środka D, przetnie zawsze pomiędzy punktami H i K linię HK, leżącą pomiędzy liniami równoległymi, które są liniami KD i HP, jak to wynika z twierdzenia I,29 tego dzieła, bo wszystkie te prostopadłe dzielą kąt HDK, a zatem przetną

również podstawę HK, i każda z tych prostopadłych padania zawsze dochodzi do środka zwierciadła, tzn. do punktu D. Weźmy zatem dowolny punkt na linii PH; zawsze linia poprowadzona od tego punktu do punktu D przecnie linię odbicia, którą jest linia GHK, [w części] znajdującej się wewnątrz wypukłości zwierciadła, ponieważ zawsze prostopadła padania, poprowadzona do środka zwierciadła, jest prostopadłą do powierzchni zwierciadła, tzn. jest to teraz linia PD. A więc obraz dowolnego punktu linii PH, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, ukaże się wewnątrz wypukłości zwierciadła. A to zakładano.

25. Jeżeli odbicie zachodzi z dowolnego punktu na łuku koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni kulistej wypukłej), który to łuk znajduje się między punktami, w których prostopadła odbicia i linia odbicia¹ (której część wewnątrz koła jest równa półśrednicy koła) przecinają koło, to wtedy miejsce oglądanego obrazu zawsze będzie wewnątrz zwierciadła (Alh. V, 21).



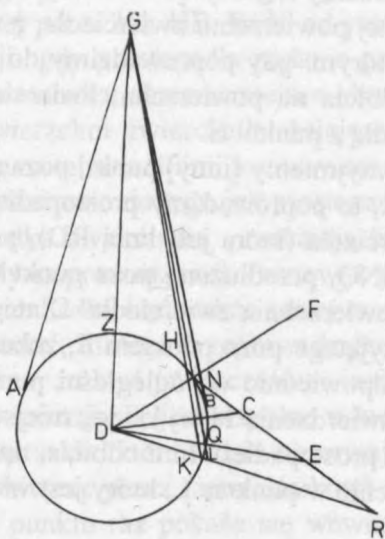
[Rys. 22]

Układ niech będzie taki jak w poprzednim twierdzeniu [rys. 22]²; linia odbicia³, którą jest linia GHK, niech przecina koło ABK w taki sposób, aby jej część znajdująca się wewnątrz koła, którą jest linia HK, była równa półśrednicy koła. Poprowadźmy prostopadłą odbicia od oka do środka zwierciadła. Niech to będzie linia GD, przecinająca koło ABK w punkcie Z. Twierdząc: skoro odbicie zachodzi z dowolnego punktu na

łuku HZ, to miejsce obrazu zawsze będzie wewnątrz zwierciadła. Niech będzie tak, że odbicie zachodzi z punktu I na łuku HZ. Poprowadźmy z punktu G, który jest środkiem oka, do punktu I linię przecinającą koło w punkcie I; niech to będzie linia GIS⁴. Poprowadźmy również z punktu I linię prostopadłą do powierzchni zwierciadła. Zrobimy to, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, jeśli od środka zwierciadła, z punktu D, poprowadzimy linię, którą jest linia DIT. Przy punkcie I wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt, który jest równy kątowi TIG; i jest to kąt PIT. Zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, jest oczywiste, że tylko [formy] punktów [leżących] na linii PI odbijają się od punktu I do oka G. Jest także oczywiste, na podstawie EE III,15, że linia IS jest większa od linii HK, a zatem linia IS jest większa od półśrednicy SD. Wobec tego, zgodnie z EE I,18, w trójkącie SID kąt SDI jest większy od kąta SID, a zgodnie z EE I,15, kąt SDI jest większy od kąta TIG; kąt SDI jest więc większy od kąta TIP, który, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, jest równy kątowi TIG. Stąd, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie PI i DS nie są równoległe, a poprowadzone w nieskończoność nigdy się nie przetną od strony swoich punktów P i S, ale przetną się przedłużone od strony punktów I oraz D. Z dowolnego punktu linii PI poprowadźmy więc do środka D prostopadłą padania. Ta prostopadła przetnie wewnątrz wypukłości zwierciadła linię GIS, która jest linią odbicia. Każda linia poprowadzona z dowolnego punktu linii PI do punktu D, będzie, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, prostopadła do powierzchni zwierciadła, a zatem ta linia jest prostopadłą padania, jak obecnie jest nią linia PD. Skoro, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, miejsce obrazu znajduje się na przecięciu prostopadłej padania i linii odbicia, jest oczywiste, że miejsce obrazu dowolnego punktu linii PI zawsze będzie wewnątrz wypukłości zwierciadła. Ponieważ ten sam dowód zawsze odnosi się do dowolnego punktu na łuku HZ, jest wobec tego jasne, że właściwe miejsce wszystkich obrazów [punktów, których formy odbijają się od punktów] na łuku HZ, będzie zawsze wewnątrz zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

26. Jeżeli odbicie zachodzi z jakiegoś punktu łuku koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), tzn. łuku znajdującego się pomiędzy punktem, w którym linia odbicia¹ przecina koło, której część znajdująca się w kole jest równa półśrednicy koła, oraz punktem najbliższym, w którym linia poprowadzona od środka oka styka się z kołem, to wówczas miejsce oglądanego obrazu będzie już to wewnątrz zwierciadła, już to na powierzchni wypukłej zwierciadła, już to poza zwierciadłem (Alh. V, 22).

Układ tego rysunku [tj. rys. 23]² niech pozostanie taki jak w poprzednim twierdzeniu i w twierdzeniu 24 tej księgi, tzn. niech linia odbicia³, którą jest linia GHK przetnie koło ABK, którego środek jest w punkcie D, w taki sposób, aby jej część znajdująca się wewnątrz koła, tzn. część HK, była równa półśrednicy DZ. Linie GA i GB niech będą styczne do koła ABK w punktach A i B, zaś punkt B niech będzie bliżej punktu H. Twierdzą: jeżeli odbicie zachodzi z dowolnego punktu na łuku HB, to miejsce oglądanego obrazu będzie już to wewnątrz zwierciadła, już to na powierzchni zwierciadła, już to poza zwierciadłem.



[Rys. 23]

Weźmy jakiś punkt na łuku HB, z którego zachodzi odbicie do oka G; tym punktem odbicia niech będzie punkt N. Poprowadźmy linię odbicia⁴ przecinającą koło, którą przeprowadźmy poza koło i oznaczmy jako GNQ. Poprowadźmy od środka D półśrednicę DQ, a do punktu odbicia poprowadźmy prostopadłą DNF. Poprowadźmy, jak w poprzednich wywodach, linię NE tworzącą razem z prostopadłą DNF kąt równy kątowi FNG; niech to będzie kąt FNE. Ponieważ linia NQ, jak wynika z EE III,15, jest mniejsza od linii HK, jest oczywiste, że linia NQ jest mniejsza od półśrednicy QD, natomiast skoro linia HK jest równa linii QD na podstawie założenia, wobec tego linia QN będzie mniejsza od linii QD. Zatem, jak wynika z EE I,18, kąt QDN w trójkącie QDN jest mniejszy od kąta DNQ, a, zgodnie z EE I,15, kąt QDN jest mniejszy od kąta GNF, któremu jest równy kąt ENF. Linie DQ i NE przetną się zatem w części mniejszych kątów, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, a ich prze-

cięcie nastąpi w punkcie E. Jest zaś oczywiste, jak w poprzednich wywodach, że linia EQD jest, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, prostopadłą do powierzchni zwierciadła. A zatem linia ED jest prostopadłą padania formy punktu E i przecina linię GNQ, która jest linią odbicia, w punkcie Q, który jest punktem na powierzchni zwierciadła. Obraz punktu E, kiedy nastąpi odbicie z punktu na łuku HB (a jest to punkt N), zobaczymy więc w punkcie Q, który jest na powierzchni wypukłej zwierciadła. Ponieważ linia odbicia, którą jest linia GQ, przecina, jak to wynika z twierdzenia 7 tej księgi, obwód łuku BK tylko w jednym punkcie, jest oczywiste, że nie zdarzy się, aby obraz formy dowolnego punktu linii NE był widoczny na tej powierzchni zwierciadła, z wyjątkiem tylko tego jednego punktu, w którym, gdy poprowadzimy do niego prostopadłą, przetnie ona linię odbicia na powierzchni zwierciadła, jak to jest w założeniu, tzn. prostopadłą z punktu E.

Jeśli zaś na linii EN przyjmimy [inny] punkt, poza punktem E, którym niech będzie punkt R, to poprowadźmy prostopadłą padania z tego punktu R do środka zwierciadła (która jest linią RD), przecinającą linię odbicia, która jest linią GNQ, przedłużoną poza punkt Q w punkcie L. Przecięcie nastąpi poza powierzchnią zwierciadła. Dlatego obraz dowolnego punktu linii NE, przyjętego poza punktem E, zobaczymy poza powierzchnią zwierciadła odpowiednio do odległości punktu padającego i zawsze, jak to wynika z twierdzenia 11 tej księgi, miejsce obrazu będzie w punkcie przecięcia linii prostopadłej i linii odbicia, np. miejsce obrazu formy punktu R jest obecnie w punkcie L, który jest wspólnym przecięciem wspomnianych linii.

Jeśli natomiast przyjmujemy, że na linii NE między punktami N i R jest jakiś punkt, np. punkt C, to prostopadła poprowadzona od tego punktu do środka zwierciadła, przetnie linię odbicia, która jest linią GNQ, wewnątrz zwierciadła; przetnie ją bowiem w którymś z tych punktów, które znajdują się pomiędzy punktami N i Q. Wobec tego obraz dowolnego punktu linii EN, przyjętego pomiędzy punktami E i N, zobaczymy wewnątrz zwierciadła. I podobnie w dowolnym innym punkcie łuku BH można dowodzić tego samego i w ten sam sposób w odniesieniu do różnych punktów [różnych] linii padania. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Jak w trzech⁶ poprzednich twierdzeniach przeprowadziliśmy dowód odnośnie do łuku ZB, podobnie również możemy przeprowadzić dowód w odniesieniu do łuku ZA, przyjąwszy [odpowiedni]⁷ rysunek, ponieważ jest podobieństwo pod każdym względem w jednym i drugim przypadku. To samo odnosi się do wszystkich kół zwierciadła kulistego wypukłego, podobnych do koła ABK. Bo jeśli prostopadła GZD pozostanie nieporuszona, to sobie wyobraźmy, że linia GH, zachowując tę

samą wielkość kąta DGH, będzie się przesuwawała [tak długo], aż dojdzie do miejsca, skąd zaczęła się poruszać. Wtedy po przesunięciu linii GH odetnie ona z całej powierzchni wypukłej zwierciadła (w konsekwencji swojego przesunięcia), część powierzchni, a obraz formy dowolnego punktu, odbitego od dowolnego punktu tej części, zobaczymy zawsze wewnątrz zwierciadła. Jeżeli natomiast nieporuszona pozostanie średnica GZD⁸, a linię GB styczną do koła ABK, będziemy tak długo przesuwawać, aż dojdzie do tego miejsca, z którego zaczęliśmy ją przesuwawać, to odetnie ona od kuli część większą [niż linia GH]. Po odbiciu się natomiast formy dowolnego punktu od dowolnych punktów powierzchni zwierciadła, wyznaczonej przez łuk HB, bądź od punktów łuków jemu podobnych, w sytuacji gdy prostopadła padania przecina linię odbicia na tej powierzchni zwierciadła, zawsze miejsce obrazu formy tego punktu będzie na tej powierzchni zwierciadła. Miejsce obrazu jednych punktów znajdujących się na tej samej linii jest wewnątrz zwierciadła, innych poza zwierciadłem, stosownie do tego jak prostopadłe, poprowadzone od tych punktów do środka zwierciadła, przecinają linie odbić [form punktów, z których zostały poprowadzone]. Ponieważ położenie środka oka bądź powierzchni zwierciadła, bądź także samej rzeczy widzianej może wielokrotnie się zmieniać, dlatego przeprowadzającemu doświadczenie zwracamy uwagę na to, że ktoś jakąś część zwierciadeł kulistych wypukłych (których użycie najczęściej jest wspólne u ludzi zamieszkujących naszą ziemię, ponieważ szkła, które ludzie obserwują, przybierają kształt kuli, gdy są wydmuchiwane przez rzemieślników) tak może umieścić, że obraz widzianego punktu raz pokaże się wewnątrz zwierciadła, tzn. poza jego powierzchnią, innym razem na samej powierzchni zwierciadła, a kiedy indziej poza powierzchnią zwierciadła w taki sposób, że powierzchnia zwierciadła nie znajduje się pośrodku pomiędzy obrazem, który widzimy, i okiem patrzącego, ale jest on widoczny na zewnątrz z boku. I to częściej się zdarza przeprowadzającym doświadczenie. Z tego powodu i przez to właśnie wydaje się, że zwierciadło kuliste wypukłe, środek oka i rzecz widziana tak mogą być ustawione, że obraz pojawi się poza zwierciadłem, w powietrzu; ale to pozostawiamy domysłności prowadzącego obserwacje.

27. Każda średnica zwierciadła kulistego wypukłego, [będąca prostopadłą padania], na której leży miejsce obrazu, które jest na samej powierzchni zwierciadła bądź poza zwierciadłem, musi przechodzić przez część kuli zwierciadła niewidocznej dla oka. Z tego wynika, że [punkt przecięcia] jest położony poniżej [punktu styczności] dowolnej spośród linii stycznych, poprowadzonych od środka oka do powierzchni zwierciadła¹.

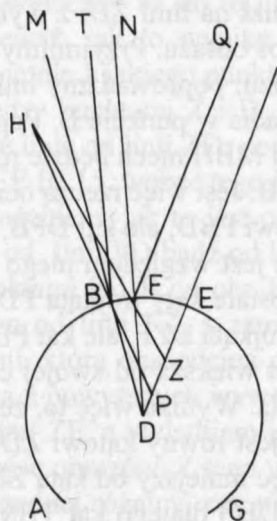
To, co tutaj się zakłada, wynika z powyżej przeprowadzonych wywodów. Przyjmijmy rysunek z poprzedniego twierdzenia [tzn. rys. 23]. Ponieważ, co jest oczywiste, z dowolnego punktu na łuku AB może zachodzić odbicie i każda linia odbicia jest prowadzona przez środek oka pod linią styczną do koła, przeprowadzoną przez środek oka, to z twierdzenia I,57 tego dzieła wynika, że przecina ona koło. Skoro niekiedy miejsce obrazu znajduje się na samej powierzchni zwierciadła bądź poza [nią], jest oczywiste, że to nie może się zdarzyć na średnicach zwierciadła, przechodzących przez łuk AB. Nie może bowiem na tych średnicach miejsce obrazu znajdować się na samej powierzchni zwierciadła, ponieważ prostopadłe padania i linie odbicia tych punktów nie mogą się przecinać w tych punktach². Lecz miejsce odbicia nie może znajdować się również poza powierzchniami zwierciadeł na tych średnicach³, ponieważ linie odbić nie przecinają się po tej stronie na zewnątrz zwierciadła. Wobec tego wszystkie średnice⁴ każdego zwierciadła kulistego wypukłego, na których miejsca obrazów znajdują się na samej powierzchni zwierciadła bądź na zewnątrz zwierciadła, muszą przechodzić przez część zwierciadła niewidoczną dla oka. Ponieważ część widoczna zwierciadła i niewidoczna są wyznaczone przez linie styczne, poprowadzone przez środek oka do powierzchni zwierciadła, jak to wynika z twierdzenia 2 tej księgi, oczywisty staje się przyjęty wniosek. Każda bowiem średnica, na której miejsce obrazu znajduje się na samej powierzchni zwierciadła albo poza zwierciadłem, musi być niżej położona od każdej linii stycznej, poprowadzonej od środka oka do powierzchni zwierciadła. A to zakładano.

Może jednak znaleźć się średnica, na której widoczne jest miejsce obrazu wewnątrz zwierciadła, która jest wyżej [położona] bądź niżej⁵ od tej stycznej⁶, jak to wynika z wywodów przeprowadzonych wcześniej. Pozostaje nam zatem dokładniej wyznaczyć miejsca obrazów.

28. Gdy przeprowadzimy linię odbicia do średnicy zwierciadła kulistego wypukłego, przecinając zwierciadło w taki sposób, aby część tej poprowadzonej linii [odbicia], leżąca między powierzchnią zwierciadła i średnicą, była równa części średnicy leżącej między punktem przecięcia i środkiem zwierciadła, to na tej części średnicy nie ma miejsca na żaden obraz, ale jest to koniec obrazów, podobnie jak w samym punkcie przecięcia (Alh. V,23).

Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego niech będzie koło, które oznaczmy ABFEG [rys. 24]¹. Punkt H niech będzie środkiem oka, a punkt D środkiem zwierciadła. Półśrednicą zwierciadła niech będzie linia DE, która, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, musi być prostopadła do powierzch-

ni zwierciadła. Niech linia ZH będzie linią odbicia, przecinającą powierzchnię wypukłą zwierciadła w punkcie F i przecinającą się z półśrednicą zwierciadła ED w punkcie Z. Niech linia ZF będzie równa linii ZD, co może się zdarzyć, na podstawie twierdzenia I,136 tego dzieła.



[Rys. 24]

Twierdzę, że na linii ZD żaden obraz nie ma swojego miejsca. Również punkt Z nie może być miejscem jakiegoś obrazu, z wyjątkiem jakiegoś punktu na przedłużonej linii ED, ponieważ, jak to wykazano w twierdzeniu 11 tej księgi, miejsce obrazu formy dowolnego punktu zawsze znajduje się na prostopadłej jej padania, którą w przypadku zwierciadeł kulistych wypukłych jest linia, poprowadzona od tego punktu do środka kuli. Jest oczywiste, że punkt Z nie jest miejscem obrazu żadnego z punktów linii ED. Poprowadźmy prostopadłą od środka D do punktu F, która przedłużona poza koło jest linią DFN. Na tej poprowadzonej prostopadłej wykreślmy, jak podano w EE I,23, przy punkcie F^2 kąt równy kątowi NFH i niech to będzie kąt QFN; zgodnie z EE I,15, kąt QFN jest więc równy kątowi ZFD. Skoro jednak linie ZD i ZF, na podstawie założenia, są równe, to, zgodnie z EE I,5, kąt ZDF będzie równy kątowi ZFD. Wobec tego i kąt QFN jest równy kątowi ZDF. A zatem, zgodnie z EE I,28, linie ZD i QF są wzajemnie równoległe, skutkiem czego poprowadzone w nieskończoność nigdy się nie przetną. Forma żadnego punktu na linii ED, niezależnie od tego jak daleko się ją przedłuży, nie przesunie się do punktu F po linii padania QF. Nie może również miejsce dowolnego obrazu znajdować się w punkcie Z, o ile forma nie przesunie się do punktu F po linii QF. Inaczej bowiem linia FH nie mogłaby się stać linią odbicia, na przecięciu której ze średnicą DE jest

punkt Z. Punkt Z nie jest więc miejscem obrazu żadnego z punktów linii ED, a zatem nie jest również [miejscem] jakiegoś innego obrazu formy dowolnego punktu [leżącego] poza linią DE. To samo dowodzenie odnosi się do dowolnie przyjętej średnicy ED.

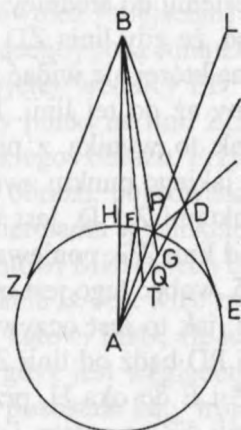
Również żaden inny punkt na linii ZD, z wyłączeniem punktu Z, nie może być miejscem jakiegoś obrazu. Przyjmijmy więc, że punkt P może być miejscem jakiegoś obrazu: poprowadźmy linię HP przecinającą wypukłą powierzchnię zwierciadła w punkcie B. Poprowadźmy prostopadłą DBM i, jak powyżej, kątowni MBH niech będzie równy kąt TBM, którego wierzchołek jest w punkcie B. Jest więc rzeczą oczywistą jak poprzednio, że kąt TBM jest równy kątowni PBD, ale kąt DPB, zgodnie z EE I,16, jest większy od kąta PZH, gdyż jest względem niego po zewnętrznej stronie w trójkącie PZH. Dwa pozostałe kąty trójkąta PDB są więc mniejsze od dwóch pozostałych kątów trójkąta DZF, ale kąt PDB jest większy od kąta ZDF przez to, że całość jest większa od swojej części, co wynika także z twierdzenia I,29 tego dzieła. Wynika więc to, że kąt DBP jest mniejszy od kąta DFZ, zaś kąt DFZ jest równy kątowni ZDF, jak to już wcześniej wykazano; kąt DBP jest więc mniejszy od kąta ZDF, a stąd kąt DBP jest o wiele mniejszy od kąta PDB i dlatego kąt TBM jest mniejszy od kąta PDB. Linie TB i ED zatem, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, nigdy się nie przetną po tej stronie tej części [zwierciadła], od której może zachodzić odbicie. Żadna forma padająca w punkt B nie odbije się zatem w kierunku oka H tak, aby miejsce obrazu znajdowało się w punkcie P. Podobnie do oka nie dotrze obraz innego jakiegoś punktu, [który powstaje] w jakimś punkcie na linii ZD. Cała linia ZD będzie więc zawsze pozbawiona obrazów i nigdy na niej nie będzie miejsca obrazów. Na podstawie przyjętego założenia można podobnie dowodzić w odniesieniu do każdej innej średnicy danego zwierciadła.

Również z poprzednich wywodów wynika, że linia ZD jest granicą obrazów. Ponieważ, jeśli linia FZ będzie większa od linii ZD, nigdy [na niej] nie pojawi się żaden obraz, dlatego że kąt ZDF, zgodnie z EE I,18, będzie większy od kąta DFZ, a także większy od kąta NFH, zgodnie z EE I,15, oraz od kąta QFN, zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi. Linie ED i QF, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, nie przetną się więc po stronie punktów E i Q, ale po stronie punktów D i F, a zatem nie będzie mógł pojawić się obraz w punkcie Z, a w konsekwencji w żadnym innym punkcie na linii ZD. Jeśli jednak linia FZ jest mniejsza od linii ZD, wówczas, zgodnie z podanym powyżej sposobem dowodzenia, kąt ZDF będzie mniejszy od kąta QFN, a zatem, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie ED i QF przetną się po stronie punktów E i Q i od tego punktu³ może dokonać się odbicie do oka jakiegoś z punktów linii ED, a miejsce obrazu, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, będzie w punkcie

Z. Linia ZD będzie zaś miejscem obrazu w każdym swoim punkcie tak długo, aż linia padania w odniesieniu do średnicy nie przyjmie przedstawionego podziału. Wynika więc, że gdy linia ZD jest równa linii ZF, to linia ZD jest granicą obrazów, na której nie widać żadnego w ogóle obrazu, a każdy obraz jest widoczny aż do tej linii. Podobnie punkt Z jest granicą obrazów, ponieważ, jak to wynika z powyższych wywodów, każda linia odbicia, obojętnie z jakiego punktu zwierciadła jest poprowadzona do oka H pomiędzy punktami Z i D, jest większa od linii, która zostanie odcięta przez tę linię od linii ZD; ponieważ ta linia jest większa od linii ZF, zgodnie z EE III, 15, wobec tego jest ona również większa od linii ZD, zgodnie z założeniem, jak to jest oczywiste w przypadku linii BP, która jest większa od linii PD bądź od linii ZD. Każda linia poprowadzona pomiędzy punktami Z i E do oka H, przecinając obwód koła i średnicę, jest mniejsza od linii FZ, a zatem i mniejsza od linii ZD, a także mniejsza od linii, którą ona odcina od półśrednicy DE. Istnieją wobec tego, jak wynika z powyższych wywodów, miejsca obrazów [we wszystkich punktach] linii ZE, z wyjątkiem jednego punktu Z, a na linii ZD nie ma żadnych miejsc obrazów. Z tego wynika, że punkt Z jest granicą obrazów i nie ma żadnej różnicy, czy punkt Z leży wewnątrz koła, czy poza nim, czy też jest na samej powierzchni zwierciadła, ponieważ zawsze w każdym miejscu zdarzy się, że linia ZD staje się równa tej części linii odbicia, która znajduje się pomiędzy punktem odbicia i punktem Z. Granica obrazów będzie zawsze w punkcie Z. Podobnie jest z całą linią ZD. Wynika więc to, co założono.

29. Po wyznaczeniu granicy obrazów na dowolnej średnicy¹ [przecinającej powierzchnię zwierciadła] pomiędzy liniami stycznymi, poprowadzonymi od oka do zwierciadła kulistego wypukłego, z wyjątkiem średnicy widzenia, miejsca obrazów [punktów] tej średnicy znajdują się tylko w punktach danej średnicy [leżących] między powierzchnią kuli i punktem, który jest granicą obrazów (Alh. V, 24).

Środek oka niech będzie w punkcie B. Linie BZ i BE niech będą liniami stycznymi do zwierciadła kulistego wypukłego w punktach Z i E. Środek zwierciadła niech będzie w punkcie A. Średnicę widzenia oznaczmy jako BHA [rys. 25]². Inną średnicą niech będzie linia AGD, na której, zgodnie z poprzednim twierdzeniem i twierdzeniem I, 136 tego dzieła, została zaznaczona granica obrazów w punkcie T. Linia AD niech przetnie powierzchnię zwierciadła w punkcie G. Twierdzą, że tylko w punktach linii TG, które znajdują się pomiędzy punktami G i T, są miejsca obrazów [punktów leżących na] średnicy DGA. Na podstawie twierdzenia 27 tej księgi jest jasne, że te obrazy nie leżą w punkcie, który znajduje się na powierzchni zwierciadła, ani nie leżą poza powierzchnią

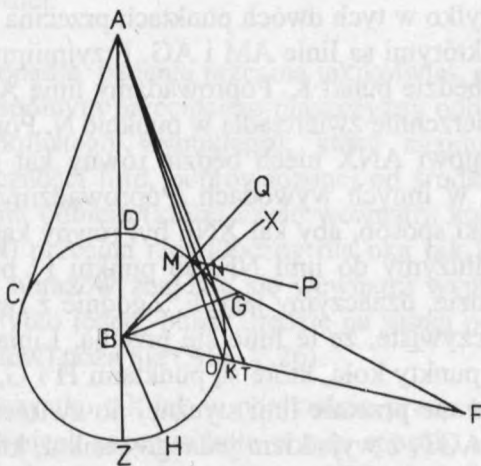


[Rys. 25]

zwierciadła. Średnica, na której miejsce obrazu jest na powierzchni zwierciadła albo poza nią, zawsze musi być poniżej punktu styczności³, zaś średnica AD leży między liniami stycznymi; a zatem obraz [punktów położonych] wzdłuż tej średnicy nie ukaże się ani na powierzchni zwierciadła, ani poza kulą [zwierciadła]. Ale jest oczywiste, że dowolnie przyjęty⁴ punkt między punktami G i T jest miejscem obrazu. Weźmy bowiem jakiś punkt na linii GT; niech to będzie punkt Q. Poprowadźmy linię od oka do tego punktu i niech to będzie linia BQ, która przecina powierzchnię zwierciadła w punkcie P. Poprowadźmy prostopadłą APL. Zgodnie z wcześniej przeprowadzonymi wywodami i zgodnie z EE I,23, kątowni LPB niech będzie równy kąt oznaczony jako DPL. Poprowadźmy linię BT, która przecina powierzchnię zwierciadła w punkcie F. Poprowadźmy również prostopadłą AF. W rezultacie trójkąt APB obejmuje trójkąt AFB, a zatem, zgodnie z EE I,21, kąt AFB jest większy od kąta APB, lecz kąt AFT razem z kątem AFB mają wartość dwóch kątów prostych i kąt APQ razem z kątem APB mają wartość dwóch kątów prostych, jak to wynika z zgodnie z EE I,13. Jest więc oczywiste, że kąt AFT jest mniejszy od kąta APQ, ale, zgodnie z EE I,5, kąt AFT jest równy kątowi FAT, ponieważ bok FT jest równy bokowi TA, zgodnie z twierdzeniem I,136 tego dzieła i zgodnie z założeniem. Kąt APQ jest więc większy od kąta FAT i dlatego będzie również większy od kąta PAQ, który jest częścią kąta FAT. Ponieważ kąty APQ i LPB są równe, zgodnie z EE I,15, bo są położone naprzeciw siebie, to kąt LPB będzie większy od kąta PAQ; zgodnie z twierdzeniem 8 tej książki, kąt DPL jest więc większy od kąta PAQ. Z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika więc, że linie PD i AQ przecinają się; punktem ich przecięcia niech zatem bę-

dzie punkt D. Skutkiem tego forma punktu D odbija się do oka [znajdującego się] w punkcie B od powierzchni zwierciadła, po linii PB, w punkcie, który oznaczamy jako P, i zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, miejscem jej obrazu jest punkt Q. To samo dowodzenie odnosi się również do każdego innego dowolnego punktu między punktami G i T. Natomiast na średnicy BHA (która jest średnicą widzenia) nie ma żadnego innego miejsca obrazu, z wyjątkiem tego, które przyjęto w twierdzeniu 10 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

30. Gdy linia odbicia przecina w taki sposób koło (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), że część linii poprowadzonej wewnątrz koła jest równa półśrednicy zwierciadła, to ta część średnicy¹ przecinającej zwierciadło w punkcie końcowym linii odbicia², która znajduje się między punktem przecięcia zwierciadła i punktem jej przecięcia z linią poprowadzoną stycznie od oka do zwierciadła, jest miejscem obrazów punktów tej średnicy i nie ma na tej średnicy żadnego innego takiego punktu, a miejsce obrazu zawsze będzie poza zwierciadłem (Alh. V,25).



[Rys. 26]

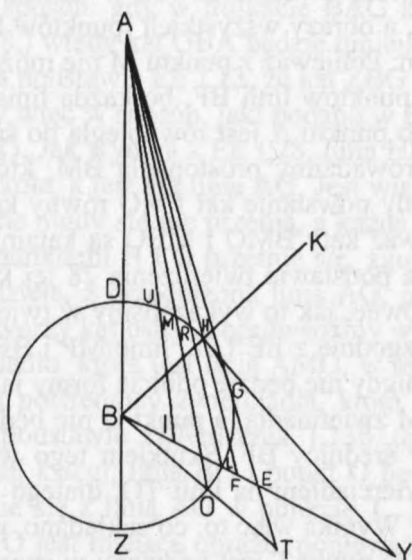
Linie AC i AG niech będą styczne do koła, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, którego środkiem jest punkt B. Środek oka niech będzie w punkcie A. Linia ADBZ niech będzie średnicą widzenia, przecinającą powierzchnię zwierciadła w punktach D i Z [rys. 26]³. Poprowadźmy od środka zwierciadła B do punktu styczności G linię BG. Jest oczywiste, na podstawie twierdzenia I,59 tego dzieła, że łuk DG jest mniejszy od czwartej części koła. Łuk GZ jest więc większy od czwartej części koła; z EE

VI,33 wynika zatem, że kąt ZBG jest większy od kąta prostego. To także dowodzi się w ten sposób: gdy w trójkącie BAG kąt AGB jest prosty, (zgodnie z EE III,18,) wtedy kąt GBA będzie mniejszy od kąta prostego, a zatem jest jasne na podstawie EE I,13, że kąt ZBG jest większy od kąta prostego. Odetnijmy więc w sposób, jaki podano w EE I,23, od kąta ZBG kąt prosty HBG. Jak wynika z EE I,28, linia HB będzie równoległa do linii stycznej do koła, a jest nią linia AG. Jest więc oczywiste, że linie BH i AG przedłużone nigdy się nie przetną, a każda średnica przecinająca łuk HG między punktami H i G przetnie się, zgodnie z twierdzeniem I,2 bądź I,14 tego dzieła, z przedłużoną linią AG, ponieważ ta średnica razem z linią BH utworzy kąt ostry. Poprowadźmy więc z punktu A linię, przecinającą zwierciadło, którą jest linia AMO, w ten sposób, aby cięciwa MO była równa półśrednicy zwierciadła, którą jest linia BO; a to może się stać na podstawie twierdzenia I,136 tego dzieła. Zgodnie z twierdzeniem 28 tej książki, linia BO i punkt O będą granicą obrazów. Średnica BO przetnie się z linią AG w punkcie T. Twierdząc, że w każdym punkcie linii TO jest miejsce obrazu, ponieważ w żadnym punkcie na średnicy TB nie ma miejsca obrazu, a punkty O i T są granicami miejsc obrazów; punkt O na powierzchni zwierciadła, a punkt T poza zwierciadłem, bo tylko w tych dwóch punktach przecina się średnica BO z liniami odbicia, którymi są linie AM i AG. Przyjmijmy jakiś punkt na linii TO; niech to będzie punkt K. Poprowadźmy linię ANK, która przecina wypukłą powierzchnię zwierciadła w punkcie N. Poprowadźmy prostopadłą BNX. Kątowi ANX niech będzie równy kąt [o wierzchołku] w punkcie N, jak w innych wywodach. Poprowadźmy, zgodnie z EE I,23, linię NF w taki sposób, aby kąt XNF był równy kątowi ANX. Prostopadłą BT przedłużymy do linii NF, do punktu F; punkt przecięcia, jakkolwiek on będzie, oznaczmy jako F. Zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, jest oczywiste, że te linie się przetną. Linia NF nie padnie jednak pomiędzy punkty koła, które są punktami H i G, bo nie przetnie zwierciadła, ani też nie przetnie linii stycznej do zwierciadła w punkcie G, którą jest linia AGT, z wyjątkiem jednego punktu, który znajduje się poza powierzchnią zwierciadła ponad punktem G^4 . Jeśli natomiast przyjmiemy, że linia NF padnie między punkty H i G, to trzeba będzie przyjąć, że przecina powierzchnię zwierciadła albo linię AG w dwóch punktach; w jednym znajdującym się poniżej punktu G i w drugim znajdującym się powyżej punktu G^5 , gdzie zachodzi odbicie do oka, znajdującego się w punkcie A, i te dwie linie proste ograniczyłyby powierzchnię; a to jest niemożliwe. Wobec tego forma punktu F będzie się rozprzestrzeniała po linii FN do punktu N i odbije się do punktu A po linii AN. Jej obraz ukaże się w punkcie K poza powierzchnią zwierciadła na przecięciu prostopadłej padania FB z linią odbicia, którą jest linia AK. W ten

sam sposób można przeprowadzić dowód w odniesieniu do wszystkich punktów na linii OT, a obrazy wszystkich [punktów linii TF] są widoczne poza zwierciadłem. Ponieważ z punktu M nie może zachodzić odbicie formy dowolnego z punktów linii BF, bo każda linia odbicia zachodzącego od punktu M do punktu A jest równoległą do średnicy BF⁶, co jest oczywiste, jeśli poprowadzimy prostopadłą BM, którą przedłużymy aż do punktu Q; to wtedy powstanie kąt PMQ równy kątowi QMA. Wówczas bowiem, ponieważ kąty BMO i MBO są kątami równymi, na podstawie założenia i na podstawie twierdzenia 28 tej księgi, również kąty PMQ i MBO będą równe, jak to wykazaliśmy w twierdzeniu 28 tej księgi. Wobec tego, że, zgodnie z EE I,28, linie MP i BF są równoległe, nie przetną się zatem i nigdy nie będzie odbicia formy jakiegoś punktu średnicy BF od punktu M zwierciadła, a punkt O nie będzie miejscem jakiegoś obrazu punktów średnicy BF. Skutkiem tego wszystkie te miejsca znajdują się poza zwierciadłem na linii TO, dlatego że punkty T i O są miejscami obrazów⁷. Wynika więc to, co zakładano, pod warunkiem jednak, iż przyjmiamo, że punkt T jest widziany w sposób prosty⁸ jako odbity, czego dowiedliśmy w twierdzeniu 2 tej księgi, ponieważ on sam leży na linii stycznej.

31. Kiedy prostopadła padania przecina jakikolwiek punkt na łuku koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), który znajduje się pomiędzy punktem styczności linii, poprowadzonej od środka oka, i punktem, w którym linia odbicia (której część wewnątrz koła jest równa półśrednicy koła) przecina niewidoczny dla oka łuk koła, wtedy większość miejsc obrazów znajdzie się wewnątrz wypukłej powierzchni zwierciadła; tylko jeden punkt będzie na samej powierzchni, a najwięcej [punktów] poza nią (Alh. V,26).

Zostawmy wszystko tak jak w poprzednio przeprowadzonym dowodzie: linia AMO niech przetnie koło w taki sposób, aby linia MO była równa półśrednicy zwierciadła, a linia AGT niech będzie styczną do zwierciadła w punkcie G [rys. 27]¹. Twierdzą, że na łuku GO będą miejsca obrazów, jak założyliśmy. Obierzmy więc punkt L na tym łuku GO. Średnicę BL poprowadźmy od środka zwierciadła tak, aby przecięła linię AT, styczną do koła w punkcie G. Przetnie ona tą linię, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła i na podstawie tego, co zostało dowiedzione w poprzednim twierdzeniu. Niech punktem przecięcia będzie więc punkt E. Poprowadźmy linię AL, przecinającą widoczną powierzchnię zwierciadła w punkcie R. Z EE III,15 wynika, że linia LR jest mniejsza od linii MO. Skoro zatem linia MO, na podstawie założenia, jest równa półśrednicy BL, jest oczywiste, że linia LR jest mniejsza od półśrednicy BL.



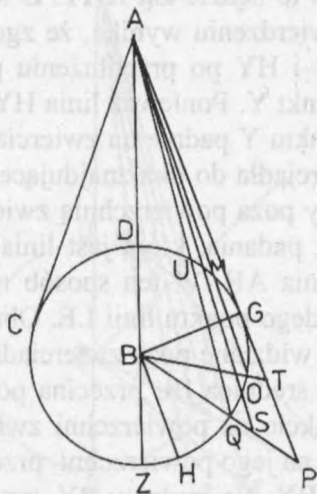
[Rys. 27]

Jeśli zatem z punktu A, zgodnie z twierdzeniem I,136 tego dzieła, poprowadzimy linię [przecinającą] średnicę BL tak, aby jej część znajdująca się między kołem i średnicą była równa części średnicy [BL], znajdującej się pomiędzy punktem tego przecięcia² i środkiem koła B, to ta linia odbicia będzie padała między punkty B i L. Ponieważ, jeśli przyjmiemy, że będzie padała między punkty L i E, to linia RL byłaby większa od linii LB: każda bowiem linia leżąca między środkiem koła i tą częścią linii odbicia, która jest równa tamtej części średnicy, będzie większa od tej części średnicy (jak to wykazaliśmy w dowodzie twierdzenia 28 tej książki na podstawie EE III,15 w stosunku do linii BP), która jest większa od linii FZ, ale jest równa części średnicy ZD, jak to wynika³ z powyższych wywodów. Linia RL jest zaś mniejsza od linii BL, ponieważ, zgodnie z EE III,15, linia RL jest mniejsza od linii MO, która, zgodnie z założeniem, jest równa linii LB. Ta linia [przeprowadzona z punktu A] nie pada więc pomiędzy punkty L i E i z tego samego powodu nie pada też w punkt L, tylko pada pomiędzy punkty B i L. Wobec tego punktem, na który pada ta [poprowadzona] linia, niech będzie punkt I. Poprowadźmy linię AI, przecinającą w punkcie U część widoczną zwierciadła, której część UI niech będzie równa części średnicy, oznaczonej BI. Twierdzą więc, że miejsce obrazu jest w każdym punkcie, jaki przyjmujemy pomiędzy punktami E i I; punkty E i I są granicami obrazów. Obierzmy jakiś punkt na linii LE; niech to będzie punkt F. Poprowadźmy linię FA, przecinającą widoczną część zwierciadła w punkcie H. Popro-

wadźmy od środka zwierciadła prostopadłą i oznaczmy ją jako BHK. Niech w punkcie H, końcu linii KH, powstanie, zgodnie z EE I,23, kąt równy kątowi AHK; niech to będzie kąt KHY. Z wywodów przeprowadzonych w poprzednim twierdzeniu wynika, że zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie BE i HY po przedłużeniu przetną się. Punktem przecięcia niech będzie punkt Y. Ponieważ linia HY pada poza zwierciadło, wobec tego forma punktu Y padnie na zwierciadło po linii HY i odbije się od punktu H zwierciadła do oka znajdującego się w punkcie A. Jej obraz będzie widoczny poza powierzchnią zwierciadła w punkcie F, na przecięciu prostopadłej padania, którą jest linia BF, z [przedłużoną] linią odbicia, którą jest linia AH. W ten sposób można przeprowadzić dowód w stosunku do każdego punktu linii LE. Obrazy form wszystkich tych punktów⁴ są bowiem widziane poza zwierciadłem z wyjątkiem jednego punktu L, w którym średnica BL przecina powierzchnię zwierciadła, ponieważ w tym punkcie na powierzchni zwierciadła znajduje się miejsce obrazu, dlatego że na jego powierzchni przecina się linia odbicia AL z prostopadłą padania BY. Na średnicy BY, przedłużonej poza punkt L, będzie punkt, którego forma odbija się w punkcie R, a jej obraz, jak to wynika z twierdzenia 27 tej księgi, jest widoczny w punkcie L. Ale, jak to wynika z twierdzenia 30 tej księgi, formy wszystkich punktów leżących na średnicy BY, dalej niż [punkt, którego forma] odbija się w punkcie R, odbijają się od jakiegoś punktu na łuku RU, a miejsca obrazów wszystkich tych punktów są na linii IL, dlatego że, jak to wynika z poprzednich wywodów, punkt I jest granicą obrazów, poza którą nie jest widoczny żaden obraz, kiedy oko znajduje się w punkcie A, a zwierciadło jest tak ustawione, jak przyjęto w założeniu. Jest więc oczywiste, że w dowolnym punkcie linii EI, umieszczonym między punktami E oraz I, jest miejsce obrazu formy każdego punktu średnicy BE, [który leży] na jej przedłużeniu poza punktem E. Jednym zatem obrazom na średnicy EB przypadają miejsca wewnątrz zwierciadła, innym poza zwierciadłem, a tylko jeden obraz znajduje się na powierzchni zwierciadła, tzn. w punkcie L. W ten sam sposób można dowodzić w stosunku do każdego punktu łuku OG pod warunkiem, że średnice przechodzą przez dane punkty łuku OG i przecinają powierzchnię zwierciadła tak, jak tego wymagają konieczne założenia przyjęte w dowodach.

32. Obojętnie, na jaki punkt łuku koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), leżącego pomiędzy punktem, w którym linia odbicia (której część wewnątrz koła jest równa półśrednicy koła)¹ w części niewidocznej [dla oka] przecina koło, oraz punktem odległym od punktu styczności

o czwartą część tego koła, padnie prostopadła padania, zawsze miejsce obrazu będzie poza zwierciadłem (Alh. V,27).

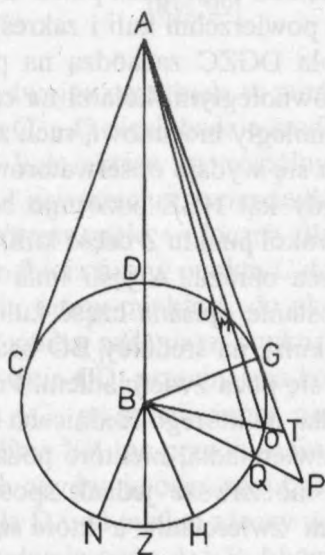


[Rys. 28]

Pozostawmy wszystko tak jak w poprzednich twierdzeniach, tzn. niech linia AMO tak przecina koło zwierciadła, aby linia MO była równa półśrednicy zwierciadła, a kąt HBG niech będzie kątem prostym, jak w twierdzeniu 30 tej księgi, zaś linia AGP niech będzie styczna do zwierciadła w punkcie G [rys. 28]². Twierdzą, że dla prostopadłych padania, przecinających łuk OH, miejsce obrazu będzie zawsze poza zwierciadłem. Poprowadźmy przez jakiś punkt na łuku OH średnicę³ BQ, która niech się przetnie ze styczną AGP w punkcie P. Poprowadźmy od środka oka linię AUQ, przecinającą zwierciadło w jego górnej części, widocznej dla oka w punkcie U. Ponieważ, jak przyjęto wcześniej, linia MO jest równa linii BQ, a, zgodnie z EE III,15, linia UQ jest większa od linii MO, wobec tego linia UQ jest większa od linii QB. Również linia poprowadzona od obwodu do linii BP, która jest równa części linii⁴ PB, leżącej między obwodem koła i środkiem, nie padnie pomiędzy punkty Q i B. Gdyby to było możliwe, wówczas, jak poprzednio, linia UQ byłaby mniejsza od linii QB, ponieważ, gdyby ta linia⁵ padała na punkt Q, jej część znajdująca się wewnątrz obwodu byłaby, zgodnie z EE III,15, większa od linii UQ; wynika więc, że linia równa⁶ pada pomiędzy punkty P i Q. A że nie pada w punkt P, to wynika stąd, że kąt PGB jest prosty, a zatem, zgodnie z EE I,19, w trójkącie PBG bok PB jest większy od boku PG. Linia w ten sposób⁷ poprowadzona niech pada bliżej punktu P; niech punkt, w który pada, będzie punktem S. Na podstawie twierdzenia 28 tej księgi, punkt S będzie granicą miejsc obrazów i dowolny punkt

między punktami P i S będzie miejscem obrazów. Dowód jest taki sam jak w poprzednich twierdzeniach, tzn. w twierdzeniu 30 i 31 tej księgi. Ten sam dowód odnosi się również do każdego punktu na łuku HO. Z powyżej przedstawionych założeń wynika, że wszystkie obrazy średnic łuku HO⁸ znajdują się poza powierzchnią zwierciadła, zaś spośród obrazów średnicy FY⁹, podobnie jak w twierdzeniu 31 tej księgi, tylko jeden obraz jest na powierzchni zwierciadła, tzn. ten, który jest w punkcie L. Inne obrazy natomiast są wewnątrz powierzchni zwierciadła, np. te, które padają¹⁰ w części średnicy, oznaczonej IL. Wszystkie pozostałe obrazy są poza zwierciadłem, np. te, które leżą na linii LE. Również z wszystkich obrazów średnic łuku OG¹¹ jedne są wewnątrz powierzchni zwierciadła, inne poza nią, a jeszcze inne znajdują się na samej powierzchni wypukłej zwierciadła, jak dowiedziono w poprzednim twierdzeniu. Wynika więc to, co zakładano.

33. Na łuk koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), leżący poniżej [punktu styczności] i znajdujący się pomiędzy punktem wyznaczonym przez średnicę widzenia oraz punktem oddalonym od punktu styczności o czwartą część koła, nie może padać prostopadła padania, na której pojawia się jakieś miejsce obrazu (Alh. V,28).

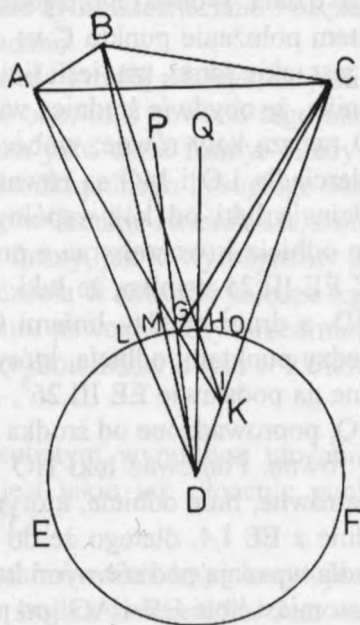


[Rys. 28a]

Po rozmieszczeniu wszystkiego tak jak na rysunku w poprzednim twierdzeniu [rys. 28a]¹ twierdzę, że na łuk HZ nie może padać żadna

średnica², na której jest miejsce jakiegoś obrazu. Ponieważ linia styczna, a jest nią linia AGP, jest zgodnie z EE I,28, równoległa do średnicy BH, jest oczywiste, że żadna średnica padająca w kierunku punktu P na łuk ZH nie przetnie się z linią styczną, którą jest linia AP. Z dowolnego punktu tych średnic poprowadźmy linię do wypukłej powierzchni zwierciadła; padnie ona na niewidoczną część tego zwierciadła, mianowicie na część koła, która jest oznaczona GZC. Żadna z tych średnic nie padnie na część koła, którą jest część GDC, położoną naprzeciw oka, chyba że po przecięciu kuli zwierciadła; a zatem żadna forma dowolnego punktu tych średnic nie dojdzie do części widocznej dla oka bądź [bezpośrednio] do oka. Wszystko to, co zostało dowiedzione w poprzednich sześciu twierdzeniach w stosunku do półkola DGZ oraz jego łuków, można również dowieść w podobny sposób w odniesieniu do półkola DCZ, tak jak w przypadku łuków półkola DGZ. Przyjawszy bowiem podobne układy łuków z obydwu stron i przedłużywszy linie w sposób podobny, pojawią się we wszystkich przypadkach te same zjawiska i istnieje ten sam sposób dowodzenia. I co teraz twierdzi się w stosunku do koła CDGZ, podobnie można także dowodzić w stosunku do każdego koła, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni wypukłego zwierciadła kulistego. Z tego powodu wszystkie zbadane zjawiska w dowolnych punktach koła DGZC zachodzą na całej powierzchni zwierciadła wypełnionej kołami³, np. niech punkt G bądź inny zaznaczony punkt przesunie się po powierzchni kuli i zakreśli koło. Zjawiska odnoszące się do łuków koła DGZC zachodzą na pewnej szerokiej powierzchni, ograniczonej równoległymi kołami na całej kuli zwierciadła, np. jeśli jakiś łuk jest równoległy biegunowi, ruch zwierciadła wyznacza jakąś powierzchnię, jak to się wydaje obserwatorowi. Jeśli zaś linia BH zostanie poruszona, to, gdy kąt HBZ pozostaje bez zmian, ona sama swoim ruchem zaznaczy wokół punktu Z część kuli, na średnicach której nie będzie żadnego miejsca obrazu. A jeśli linia BH nie poruszy się, a poruszy się łuk OH, zostanie opisana część kuli, i wszystkie obrazy powstające [na tej części kuli], na średnicy BO bądź na innej poprowadzonej średnicy, znajdują się poza zwierciadłem. Przesunawszy łuk OG, powstanie część zwierciadła, na którego średnicach niektóre obrazy znajdują się na powierzchni zwierciadła, niektóre poza nią, a niektóre wewnątrz zwierciadła. Oko nie zawsze jednak spostrzega, które obrazy znajdują się na powierzchni zwierciadła, a które są poza nią. I nie można tego sprawdzić podczas ich⁴ spostrzegania, z wyjątkiem tylko tego, że się spostrzega, że są poza częścią widoczną kuli. Z sześciu poprzednich twierdzeń wynika więc, że miejsca obrazów zostały określone na przedstawionych zwierciadłach, z zastrzeżeniem, że obrazy w tych zwierciadłach docierają tylko do jednego oka.

34. Chociaż forma jednego punktu wpada do obydwójga oczu z dwóch punktów odbicia na powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, to miejsce obrazu jest jedno i widać tylko jeden obraz (Alh. V,41).



[Rys. 29]

Niech środki obydwójga oczu będą w punktach A i B. Punkt widziany oznaczmy przez C, a D niech będzie środkiem wielkiego koła, przecinającego obydwa koła, które są wspólnymi przecięciami obydwu płaszczyzn odbicia¹ i powierzchni zwierciadła, od którego punktów zachodzi odbicie, i którego część widoczną dla oczu oznaczmy jako EF [rys. 29]². Punktem odbicia formy punktu C do oka A niech będzie punkt G, a punktem odbicia formy punktu C do oka B niech będzie punkt H. Poprowadźmy prostą padania z punktu C do środka zwierciadła, a tą prostą jest linia CD, przecinająca koło w punkcie O. Linia odbicia, którą jest linia AG, po przedłużeniu niech przetnie tę prostą CD w punkcie K, a linia BH [po przedłużeniu niech ją przetnie] w punkcie I. Najpierw niech obydwoje oczu znajdzie się w tej samej odległości od środka zwierciadła D i od punktu rzeczy widzianej, którym jest punkt C. Twierdę, że obydwoje oczu A i B, chociaż dwa są punkty odbicia formy punktu widzianego C, tzn. punkty G i H, widzi tylko jeden obraz, ponieważ jest tylko jedno miejsce obrazu. Poprowadźmy linie AD i BD od środków jednego i drugiego oka do środka kuli, które to linie przecinają zwierciadło w punktach L i M. Jest oczywiste, że te linie są równe,

ponieważ oczy znajdują się w tej samej odległości od środka zwierciadła, którym jest punkt D. Jest jasne, że linia AB, łącząca środki oczu tworzy z obydwoma liniami AD i BD, kąty równe, jak to wynika z treści dowodu twierdzenia III,30 tego dzieła. Wobec tego, zgodnie z EE I,6, linie AD i BD są równe. Jeśli zatem położenie punktu C w stosunku do jednego oka A i drugiego oka B jest takie samo, tzn. jeśli linia AC jest równa linii BC, wtedy z EE I,8 wynika, że obydwie średnice widzenia, tzn. linie AD i BD z prostopadłą CD tworzą kąty równe; wobec tego, zgodnie z EE III,26, również łuki zwierciadła LO i MO są równe, ponieważ średnice widzenia AD i BD odcinają łuki od kół wspólnych dla powierzchni zwierciadła i płaszczyzn odbicia i tworzą wraz z prostopadłą CD wokół środka D kąty równe. Z EE III,26 wynika, że łuki, z których jeden leży między liniami CD i BD, a drugi między liniami CD i AD, są równe. Również łuki leżące między punktami odbicia, którymi są punkty H i G, oraz punktem O są równe na podstawie EE III,26³, bo prostopadłe, którymi są linie DGP i DHQ, poprowadzone od środka do punktów odbicia, z linią CD tworzą kąty równe. Ponieważ łuki HO i GO są równe oraz półśrednice DH i DG są równe, linie odbicia, którymi są linie HB i GA, będą także równe, zgodnie z EE I,4, dlatego że do oczu równo oddalonych od środka zwierciadła wpadają pod równymi kątami. Podobnie linie GC i HC będą równe, natomiast linie BH i AG [po przedłużeniu]⁴ muszą się przecinać, ponieważ, gdy kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych, to z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika, że linie BH i AG muszą się przeciąć w jakimś punkcie. Skoro kąty odbicia do jednego i drugiego oka z powodu tej samej odległości obydwójga oczu od punktu rzeczy widzianej i od środka zwierciadła są równe, to również kąty CGA i CHB będą sobie równe. Jest więc oczywiste, na podstawie EE I,13 i I,32, że trójkąt GCK jest równy pod względem kątów trójkątowi HCI, a linia CH jest równa linii CG. Zgodnie z EE VI,4, linia HI będzie więc równa linii GK, a linia CK równa linii CI; stąd również punkty K oraz I stanowią jeden punkt. Wobec tego w tym samym punkcie prostopadłej CD nastąpi przecięcie obydwu linii odbicia, którymi są linie AG i BH, z prostopadłą padania, którą jest linia CD, i w tym też punkcie jednemu i drugiemu oku ukaże się obraz. Będzie zatem widoczny jeden obraz, ponieważ będzie jedno i to samo miejsce obrazu i nawet gdyby oczy nie znajdowały się w równej odległości od zwierciadła bądź rzeczy widzianej, to i tak będzie widać tylko jeden obraz. Chociaż obraz widzianego punktu leży w różnych punktach na prostopadłej, to jednak jest to niedostrzegalne, gdyż nie da się zauważyć odległości między tymi punktami. Obraz dowolnego punktu, jaki widzi każde oko, zachowa więc zawsze tożsamość części i z tego powodu ukazuje się on jednolity. Oddalenie bowiem punktu widzianego od jednego oka jest większe w sposób umiarkowany

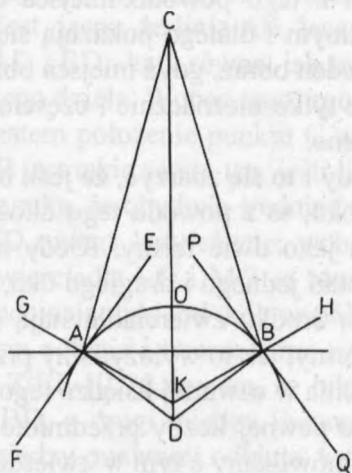
niż od drugiego oka i z tego powodu miejsca obrazów są oddalone w stopniu niedostrzegalnym i dlatego pokazują się jednocześnie, ponieważ tworzy się z nich jeden obraz, gdyż miejsca obrazów nie są od siebie oddalone w całości, ale tylko nieznacznie i częściowo są oddalone. Wynika więc to, co zakładano.

Może jednak niekiedy i to się zdarzyć, że jeśli odbita forma pada bardzo ukośnie na jedno oko, to z powodu tego ukośnego położenia jedna forma będzie widziana jako dwie formy. Kiedy na jednej powierzchni odbicia znajdują się środki jednego i drugiego oka, wtedy właśnie powyżej wspomniane kąty w środku zwierciadła stają się nierówne i zdarza się, że widzimy dwie formy, jak to wyłożyliśmy przy okazji omawianego prostego sposobu widzenia w czwartej księdze tego dzieła, w rozdziałach poświęconych widzeniu pewnej liczby przedmiotów⁵. To jednak zdarza się bardzo rzadko i my mówiliśmy o tym w twierdzeniu V,7 tego dzieła.

35. W zwierciadle kulistym wypukłym ułożenie punktów obrazów w obydwu oczach jest takie jak ułożenie punktów rzeczy widzianej (Alh. V,42 oraz VI,4).

Poprowadźmy z krańców linii, która znajduje się na rzeczy widzianej, dwie prostopadłe do środka zwierciadła. Jest oczywiste, że wtedy powstanie trójkąt, który będzie obejmował wszystkie obrazy wszystkich punktów tej linii. Jeżeli na tej linii będzie punkt, który nie ma tego samego położenia w stosunku do obydwu oczu, to obraz punktu bardziej oddalonego od tego położenia będzie na średnicy¹ bardziej oddalonej od tamtej średnicy, a punktu bliższego na bliższej, ponieważ zawsze obraz dowolnego punktu rzeczy widzianej będzie widać na przecięciu linii odbicia z prostopadłą padania, poprowadzoną od tego punktu do środka zwierciadła, jak to wynika z twierdzenia 11 tej księgi. W ten więc sposób zostanie zachowany taki układ części w obrazach, jaki jest układ punktów widzianych. Jeżeli weźmiemy linię z takiego układu, na której jest punkt, to dowolny punkt tej linii będzie dla oczu też częścią takiego układu. Jeżeli zaś weźmiemy linię, która dzieli na równe części kąt, który tworzą dwie linie, poprowadzone od środków oczu do widzianego punktu, to położenie dowolnego punktu na tej linii, dowolnie przedłużonej, będzie dla obydwu oczu takie samo jak dla jednego oka. Wynika więc to, co zakładano.

36. Jest możliwe, że w pewnych położeniach przedmiot w zwierciadłach kulistych wypukłych widziany przez wiele oczu ma jeden i ten sam obraz¹.



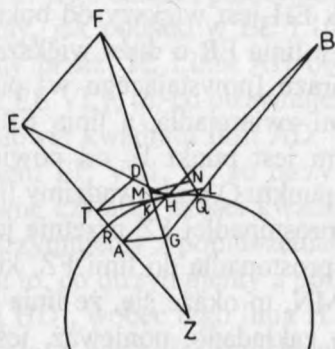
[Rys. 30]

Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni kulistej wypukłej niech będzie koło AB, a jego środek niech będzie w punkcie D [rys. 30]². Punkt C niech będzie punktem rzeczy widzianej. Poprowadźmy linię CD z punktu widzianego do środka D, która przecina obwód zwierciadła w punkcie O. Łuk AO niech będzie równy łukowi OB. Poprowadźmy linie CA i CB, które, zgodnie z EE III,8 i na podstawie założenia, będą równe. Jak podano w EE III,17, z punktu A poprowadźmy linię FAE styczną do koła, a z punktu B linię PBQ [również styczną do koła]. Poprowadźmy linię AB. Z EE I,5³ wynika, że kąty CAB i CBA są równe, podobnie jak kąty OAB i OBA, ograniczone linią krzywą i prostą⁴, są zgodnie z twierdzeniem I,43 tego dzieła, równe. Ale i kąty styczności OAE i OBP są równe, zgodnie z EE III,16⁵. Pozostaje więc kąt CAE, który jest równy kątowi CBP. Wokół punktu A, który jest końcem linii CA, utwórzmy kąt, jak podano w EE I,23⁶, równy kątowi CAE i niech to będzie kąt GAC, a w punkcie B, który jest końcem linii CB, utwórzmy kąt, równy kątowi PBC, i niech to będzie kąt HBC; kąt HBC będzie równy kątowi GAC. Umieściwszy zatem oczy w punktach G i H, okaże się, zgodnie z twierdzeniem V,20⁷ tego dzieła, że forma punktu C odbija się do obydwójga oczu, znajdujących się w punktach G i H: do punktu G odbija się z punktu A, zaś do punktu H z punktu B⁸. Poprowadźmy również poza punkt A linię GA do linii CD, które to linie przetną się, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, dlatego że kąty GAC i ACD są mniejsze od dwóch kątów prostych; niech się przetną w punkcie K. Poprowadźmy linię HB do linii CD, która, podobnie jak w poprzednim wywodzie, przetnie ją w tym samym punkcie K. Ponieważ, jak to wynika z poprzednich wywodów, linia AC jest równa linii CB, a linia

AD równa linii BD, bo są półśrednicami, zaś linia CD jest wspólna dla obydwu trójkątów ACD i BCD, to, zgodnie z EE I,8, kąty ACD i DCB będą równe, a kąt GAC, jak wynika z poprzednich wywodów, jest równy kątowi HBC. Okazuje się również, że i kąt PBC jest równy kątowi EAC. Kąt HBQ jest więc, zgodnie z EE I,13, równy kątowi GAF⁹, a kąt EAK równy kątowi GAF, zaś kąt PBK równy kątowi HBQ, zgodnie z EE I,15. Kąt EAK jest więc równy kątowi PBK, a zatem cały kąt CAK będzie równy całemu kątowi CBK. Zgodnie zatem z EE I,32, trójkąty CAK i CBK są równokątne. Wobec tego, zgodnie z EE VI,4, gdy AC jest równy BC, to bok AK będzie równy bokowi BK; przetną się więc w jednym punkcie K, ponieważ bok CK jest dla obydwu trójkątów ten sam. Skoro punkt K jest miejscem obrazu punktu C, to dla obydwu oczu będzie to samo miejsce obrazu. Czy więc widzimy własne oblicze przyglądając się, czy inne rzeczy, [formy są] odbite od punktów A i B do oczu, znajdujących się w punktach G i H, w jednym i drugim przypadku zachodzi to samo. To samo zachodzi również w całym kole, przechodzącym przez punkty B i A, ponieważ do dowolnego punktu tego koła stosuje się ten sam dowód po rozmieszczeniu oczu w sposób powyżej przedstawiony. Wynika więc, to co zakładano.

Jeżeli natomiast kąty odbicia są różne, wtedy jedna rzecz będzie widziana w różnych miejscach przez różne oczy¹⁰ i będzie ona miała więcej wizerunków. A to trzeba odnotować, a w sposób dostateczny się to okazało w poprzednich wywodach. Ponieważ linie odbicia przecinają się w różnych punktach średnicy zwierciadła, z tego powodu wyznaczają one różne miejsca obrazów, jak to wynika z twierdzenia 11 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

37. Dla zwierciadeł kulistych wypukłych mniejsza jest odległość obrazu od powierzchni zwierciadła niż samej rzeczy [leżącej] poza [zwierciadłem] (Euc. Catopr. 20).



[Rys. 31]

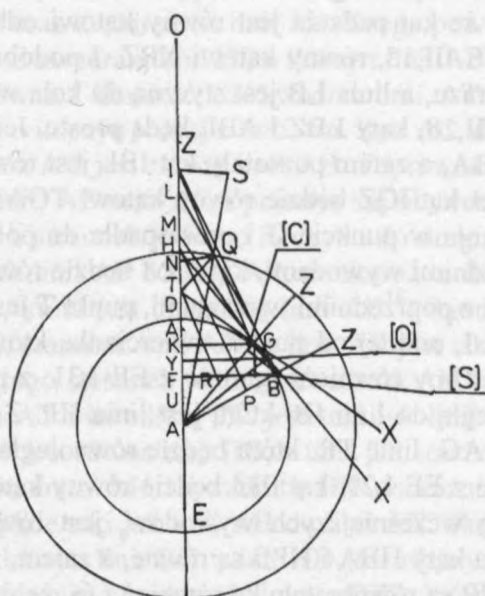
Koło (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła kulistego) oznaczmy przez QH_{KR}. Jego środek niech będzie w punkcie Z [rys. 31]¹. Linie widzianą, padającą² ukośnie na zwierciadło, oznaczmy jako EF. Środkiem oka niech będzie punkt B. [Forma] punktu E odbija się do oka B od punktu H zwierciadła, a punktu F od punktu Q. Poprowadźmy linie EH, HB, FQ, QB. Poprowadźmy prostopadłe do powierzchni zwierciadła linie [padania] EZ i FZ. Linia EZ niech przetnie koło zwierciadła w punkcie R, a linia FZ w punkcie K. Linia BH, przedłużona wewnątrz zwierciadła, niech przetnie linię EZ w punkcie A, a linia BQ niech przetnie linię FZ w punkcie G. Poprowadźmy linię AG, która, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, będzie obrazem linii EF. Poprowadźmy, jak podano w EE III,17, z punktu H linię styczną do koła i niech to będzie linia HT. Ta poprowadzona linia niech przetnie linię EZ w punkcie T. Punkt T będzie końcem styczności linii HT. Linia HT, przedłużona poza punkt H, niech przetnie linię BG w punkcie L. Z punktu T, jak podano w EE I,11, poprowadźmy prostopadłą do linii EZ, która niech przetnie linię EH w punkcie D, i niech to będzie linia TD. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, kąt BHL jest równy kątowi EHT, a, zgodnie z EE I,15, kąt THA jest równy kątowi BHL, wobec tego kąt EHT jest równy kątowi THA. Stosunek linii EH do linii HA, zgodnie z EE VI,3, będzie zatem taki jak linii ET do linii TA, ale linia EH jest większa od linii HA, a zatem linia ET jest większa od linii TA. Stąd wynika, że linia EH jest większa od linii HA. Skoro kąt ETD jest prosty, to kąt ETH będzie większy od kąta prostego, a zatem, zgodnie z EE I,13, kąt ETH jest większy od kąta ATH, ale zgodnie z EE I,32, kąt ETH jest większy od kąta EHT, kąt EHT jest zaś równy kątowi AHT, jak to wynika z powyższych wywodów. Ponieważ, zgodnie z EE I,32, kąty trójkąta ETH, wziąwszy je razem, są równe wszystkim kątom trójkąta ATH razem wziętym, to pozostały kąt TAH trójkąta THA jest większy od kąta TEH trójkąta HET. W trójkącie AEH natomiast kąt EAH jest większy od kąta AEH, wobec tego, zgodnie z EE I,19, w trójkącie EAH bok EH jest większy od boku HA; linia ET jest więc większa od linii TA, a linia ER o dużo większa od linii RA. Linia RA oznacza odległość obrazu [powstającego w] punkcie A wewnątrz zwierciadła od powierzchni zwierciadła, a linia ER oznacza odległość punktu widzianego, którym jest punkt E, od powierzchni zwierciadła poza zwierciadłem. Jeśli z punktu Q poprowadzimy linię styczną do koła, która po przedłużeniu do prostopadłej FZ przetnie ją w punkcie M, a z punktu M poprowadzimy prostopadłą do linii FZ, która przedłużona do linii FQ, stanie się linią MN, to okaże się, że linia FK jest większa od linii KG. Jest więc to, co zakładano: ponieważ, jeśli od punktów wewnętrznych linii EF poprowadzimy linie, podobnie jak od punktów

musi być równoległe do wcześniejszego koła; środek obydwu kół jest bowiem ten sam w punkcie A, a półśrednice są nierówne. Z punktu H poprowadźmy, jak podano w EE IV,1, cięciwę równą połowie linii HD, którą jest linia HQ. Poprowadźmy linie QA i QT. W punkcie Q na linii HQ wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi QAH, a jest to kąt HQN, a linia poprowadzona do linii AH jest linią QN. Ponieważ kąt QAH w trójkącie HQA jest równy kątowi HQN w trójkącie HQN, a kąt AHQ jest wspólny dla obydwu trójkątów, to, zgodnie z EE I,32, trzeci kąt będzie równy trzeciemu kątowi, tzn. kąt AQH będzie równy kątowi HNQ. Wobec tego, zgodnie z EE VI,4, stosunek HA do QH jest taki jak QH do HN; dlatego, zgodnie z EE VI,17, to, co jest iloczynem AH i HN, będzie równe kwadratowi HQ, ale, zgodnie z EE II,4, kwadrat HQ jest czwartą częścią kwadratu HD, bo HQ jest połową linii HD. Iloczyn AH i HN jest więc równy czwartej części kwadratu DH i czwartej części iloczynu AH i HT. Zatem, zgodnie z EE VI,1, linia HN jest równa czwartej części linii HT i punkt N leży między punktami H i T, a pozostała linia TN to trzy czwarte linii HT. Wynika więc, że zgodnie z EE II,2, iloczyn HT i TN wynosi trzy czwarte kwadratu HT, ale, zgodnie z EE VI,1, iloczyn linii AH i TN będzie wynosił trzy czwarte kwadratu HD. Ponieważ kąt AQH, zgodnie z twierdzeniem I,42 tego dzieła, jest ostry i ponieważ boki AH i AQ są równe, to sam [kąt AQH], zgodnie z EE I,5, jest równy kątowi QHA. Jest więc oczywiste, że kąt QHA jest równy kątowi HNQ w mniejszym trójkącie, a więc, zgodnie z EE I,6, bok NQ jest równy bokowi HQ. Jak wynika z EE I,13, kąt HNQ jest ostry, a kąt QNT jest rozwarty. Wobec tego, zgodnie z EE II,12, kwadrat linii TQ jest o tyle większy od kwadratu linii QN i kwadratu linii TN, ile wynosi iloczyn TN i HN⁴, bo jeśli z punktu Q poprowadzimy prostopadłą do linii HN, to, na podstawie twierdzenia I,31 tego dzieła, jest jasne, że ta linia padnie w punkcie środkowym linii HN pod warunkiem, że boki QH i QN są równe. Zgodnie z pierwszym [powyższym twierdzeniem, tzn. I,31 tego dzieła], iloczyn NT i HN jest natomiast równoważny temu, ile wynosi iloczyn TN i połowy NH dwa razy wziętej. Z EE II,3 wynika, że iloczyn TN i HN wraz z kwadratem NT jest równy iloczynowi HT i TN⁵. Iloczyn HT i TN jest więc różnicą⁶ kwadratu linii TQ i kwadratu linii NQ, a zatem i kwadratu HQ, gdyż HQ jest równe NQ. Ponieważ kwadrat TQ jest większy od kwadratu HQ, to i linia TQ będzie większa od linii HQ. Zgodnie z twierdzeniem I,3 tego dzieła, stosunek AI do AH jest taki jak TQ do QH⁷. Ponieważ linia QT jest większa od linii QH, to linia AI będzie większa od linii AH. Podobnie, zgodnie z EE VI,20, stosunek kwadratu linii AI do kwadratu linii AH będzie taki jak kwadratu linii TQ do kwadratu linii HQ, ponieważ, [jeśli jest proporcja] prostego do prostego, to jest też proporcja podwójnego do podwójnego, natomiast stosunek

kwadratów jest podwójny w porównaniu ze stosunkiem boków⁸, jak to wynika z EE VI,20. Zgodnie zatem z EE V,17, [stosunek] różnicy kwadratu AI i kwadratu AH do kwadratu AH jest taki jak iloczynu HT i TN do kwadratu QH⁹. Ponieważ, jak wynika z EE II,4 i poprzednich wywodów, kwadrat linii HQ wzięty czterokrotnie daje kwadrat linii HD, a iloczyn HT i NT cztery razy wzięty daje trzykrotność kwadratu HT dlatego, że iloczyn HT i TN wynosi trzy czwarte kwadratu HT, jak to zostało przedstawione powyżej, a trzy razy cztery jest dwanaście, w których są trzy całości, stąd, zgodnie z EE V,15, iloczyn HT i TN w stosunku do kwadratu QH jest taki jak potrójnego kwadratu HT do kwadratu HD. Niech linia HO będzie potrójnej wielkości w stosunku do linii HT, to wtedy, zgodnie z EE VI,1, iloczyn OH i TH będzie potrójną wielkością kwadratu HT. Ponieważ jednak iloczyn AH i HT jest równy kwadratowi HD, to, zgodnie z EE VI,17, stosunek HA do HD będzie taki jak HD do HT; wobec tego stosunek HT do HA będzie taki jak stosunek kwadratu HT do kwadratu HD, co jest zgodne z wnioskami z EE VI,20 i V,4. W rzeczywistości stosunek linii OH do linii HA jest taki jak stosunek iloczynu OH i HT do iloczynu AH i HT, jak to wynika z EE VI,1. W rezultacie, zgodnie z EE V,11, stosunek linii OH do linii HA jest taki jak stosunek potrójnego kwadratu HT do kwadratu HD, ale ten stosunek był stosunkiem różnicy kwadratu linii AI i kwadratu linii AH do kwadratu AH¹⁰. Zgodnie z EE V,18, stosunek linii OA do linii HA jest więc łącznie taki jak kwadratu linii AI do kwadratu AH, ponieważ różnica kwadratu AI i kwadratu AH wraz z kwadratem HA daje kwadrat AI¹¹. Linia IA, jak to wynika z EE VI,20, będzie więc proporcjonalna w środku pomiędzy liniami OA i HA, bo jest tak, jak to przyjmuje się we wniosku wypływającym z EE VI,20, że, gdy trzy linie są w sposób ciągle proporcjonalne, to stosunek pierwszej do trzeciej jest taki jak kwadratu opartego na pierwszej linii do kwadratu opartego na drugiej linii, a zatem stosunek linii OA do IA jest taki jak linii IA do HA. Zgodnie z EE V,19, taki sam stosunek będzie również tego, co pozostało, do tego, co pozostało¹², tzn. linii OI do IH. Skoro IA jest większe od AH, to również OI będzie większe od IH, a więc linia IH jest mniejsza od połowy linii OH. Podobnie, jak to wcześniej wykazano, iloczyn linii AH i linii HD jest równy czwartej części kwadratu linii AD, ale linia AD jest mniejsza od linii AH, a zatem iloczyn AD i HD jest mniejszy od czwartej części kwadratu linii AD; wobec tego linia HD jest mniejsza od czwartej części linii AD. Gdyby jednak linia HD była równa czwartej części linii AD, to wtedy, zgodnie z EE VI,1, iloczyn AD i HD byłby równy czwartej części kwadratu linii AD, chociaż obydwie linie mają wielkość linii AD; linia HD jest więc mniejsza od piątej części linii AH¹³. Skoro zatem linia AH jest większa niż pięciokrotność linii HD, a iloczyn linii AH i linii HT jest

równy kwadratowi linii HD, jak to wynika z powyższych wywodów, to, zgodnie z EE VI,17, linia HD będzie większa niż pięciokrotność linii HT. Ponieważ jaki jest stosunek linii AH do linii HD, taki sam jest stosunek linii HD do linii HT, a linia HT jest mniejsza od piątej części linii HD, zaś HD jest mniejsza od piątej części linii AH, dlatego linia HT jest mniejsza od dwudziestej piątej części linii AH. Z poprzednio przeprowadzonych wywodów wynika, że stosunek linii OI do linii IH jest taki jak linii IA do HA, a zatem, zgodnie z EE V,18, stosunek linii OH do linii IH łącznie będzie taki sam jak linii IA wraz z linią AH do linii AH, wobec tego, zgodnie z EE V,15, stosunek trzeciej części pierwszej linii do drugiej będzie taki jak trzeciej części tej trzeciej linii do czwartej linii. Ponieważ okazało się, że linia HO jest potrójną linią HT, jest więc oczywiste, że linia HT jest trzecią częścią linii OH; stosunek linii HT do linii IH jest więc taki jak stosunek trzeciej części linii IA wraz z trzecią częścią linii AH do linii AH. Wobec tego stosunek linii HT do IA jest taki jak dwóch trzecich linii AH wraz z jedną trzecią linii IH do linii AH. Ponieważ linia AH została wzięta dwa razy: raz sama ta linia, a drugi raz na linii IH, zatem i jej trzecia część została wzięta dwa razy, natomiast linia IH jest wzięta jeden raz na linii AI, dlatego i jej trzecią część trzeba wziąć tylko jeden raz. Ponieważ linia OI jest większa od linii IH, jak to wykazano powyżej, a linia IH jest mniejsza od połowy linii OH, wobec tego, zgodnie z EE V,15, trzecia część linii IH będzie mniejsza od szóstej części linii OH. Skoro jednak linia HT jest trzecią częścią linii OH, to połowa linii HT jest równa szóstej części linii OH, a trzecia część linii IH jest mniejsza od połowy linii HT; wobec tego dwie trzecie linii AH razem z częścią linii mniejszą od połowy linii HT mają stosunek do linii AH taki jaki ma linia HT do linii IH. W rezultacie, przeciwnie, stosunek linii IH do linii HT, zgodnie z twierdzeniem I,5 tego dzieła, będzie taki jak linii AH do dwóch swoich trzecich wraz z linią mniejszą od połowy linii HT. Jednak linia HT, jak wynika z przeprowadzonych wywodów, jest mniejsza od dwudziestej piątej części linii AH, a jej połowa jest mniejsza od połowy dwudziestej piątej części linii AH. Ale gdy linia AH zostanie podzielona na 25 części, to dwie trzecie tej linii wraz z połową dwudziestej piątej części nie dają 18 części tej linii, ponieważ dwie trzecie z 24 jest 16. Pozostaje jedność, z której dwie trzecie wraz z tym, co jest mniejsze od połowy [jedności], będzie więcej niż jedna całość, ale mniej niż dwie całości. Dlatego, zgodnie z EE V,8, stosunek linii IH do linii HT jest większy niż stosunek 25 do 18. Podobnie, gdy linia HT jest mniejsza od dwudziestej piątej części linii AH, to linia AT będzie większa do dwudziestu czterech części linii AH, która składa się z dwudziestu pięciu [części]. Jednak linia IH jest mniejsza od połowy linii OH, ale OH jest potrójna wobec linii HT, a zatem linia OH jest mniejsza od jednej

części i jej połowy spośród tych 25 części, z których składa się linia AH, a zatem linia IH jest o wiele bardziej mniejsza od jednej części i jej połowy spośród tych 25 części, z których składa się linia AH. Stosunek linii AI do AT jest więc taki jak linii mniejszej od 26 części i połowy części do linii większej od 24 części tych samych części. Stosunek linii AI do linii AT jest zatem mniejszy od stosunku 26 i połowy do 24, zgodnie z EE V,8. Stosunek zaś linii IH do linii HT jest większy niż 24 części do 18 części, ponieważ, zgodnie z poprzednimi wywodami, stosunek ten jest większy niż 25 części do 18 części. Wobec tego stosunek linii IH do linii HT jest większy niż stosunek linii AI do linii AT, ponieważ mniejszy jest stosunek 26 części i połowy jednej części do 24 części niż 24 do 18, co wynosi cztery trzecie. Zgodnie z twierdzeniem I,3 tego dzieła, również stosunek linii IM do linii MT¹⁴ niech będzie taki jak linii IA do linii AT. Stosunek linii IH do linii HT jest więc większy niż linii IM do linii MT, a punkt M pada pomiędzy punkty I oraz H; linia HT jest zatem większa niż linia MT. Zgodnie zatem z EE V,8, stosunek IM do HM jest większy niż [IM] do MT, a stosunek IM do MH większy niż linii IA do AT. Wobec tego stosunek IM do MH jest większy niż IA do AH, ponieważ, zgodnie z EE V,8, większy jest stosunek IA do AT niż [IA] do AH, skoro AT jest mniejsze od AH. Zgodnie z twierdzeniem I,3 tego dzieła, stosunek linii IL do LH niech będzie taki jak linii IA do AH, a punkt L, podobnie jak to było wcześniej, leży pomiędzy dwoma punktami N oraz I, co można wykazać w sposób, jak to zrobiono powyżej.



[Rys. 33]

Na podstawie tych przeprowadzonych powyżej wywodów zrobimy nowy rysunek [rys. 33]¹⁵. Niech układ będzie pod każdym względem taki jak na poprzednim rysunku, jednak w dowodzeniu idźmy dalej. Z punktów L i M poprowadźmy zatem, jak podano w EE III,17, dwie linie styczne do koła DBE, a są to linie LB i MG. Poprowadźmy linie IB, HB, IG, TG, AB, AG. Poprowadźmy linie AB i AG do koła zewnętrznego, każdą z nich do punktu Z. Ponieważ z powyższych wywodów wynika, że stosunek linii IL do linii LH jest taki jak prostopadłej IA do jej części AH, jest więc oczywiste na podstawie twierdzenia 12 tej księgi, że punkt H jest miejscem obrazu formy punktu I, odbitej od punktu zwierciadła, którym jest punkt B. Kiedy przyjmiemy przeciwne założenie, otrzymamy odwrotny stosunek wspomnianej linii IA do linii AH; wtedy bowiem stosunek linii IA do linii, poprowadzonej do miejsca obrazu z punktu A, będzie taki jak linii IL do linii, poprowadzonej z punktu L do miejsca obrazu. Ponieważ wcześniej przyjęto, że stosunek linii IL do linii HL jest taki jak linii IA do linii HA, wobec tego punkt H będzie miejscem obrazu. Kąt IBZ wyznaczony linią padania IB i prostopadłą ABZ, poprowadzoną ze środka zwierciadła do punktu odbicia, będzie równy kątowi HBA, wyznaczonemu linią odbicia oraz tą samą prostopadłą AB, dlatego że, jak wynika z twierdzenia 9 tej księgi, linia odbicia przecina się z prostopadłą padania, którą jest linia AI. Jeden i drugi kąt jest równy każdemu kątowi odbicia, np.: weźmy kąt ZBX tak, aby środek oka był w punkcie X albo w jakimś innym punkcie na tej linii [BX]; i tak, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, kątowi ZBX jest równy kąt IBZ, z czego wynika, że kąt padania jest równy kątowi odbicia, a kąt HBA jest, zgodnie z EE III,15, równy kątowi XBZ. I podobnie, gdy punkt H jest miejscem obrazu, a linia LB jest styczną do koła w punkcie B, wtedy, zgodnie z EE III,18, kąty LBZ i ABL będą proste. Jednak kąt IBZ jest równy kątowi HBA, a zatem pozostały kąt IBL jest równy kątowi LBH. Podobnie również kąt IGZ będzie równy kątowi TGA. Skoro linia MG jest styczna do koła w punkcie G i prostopadła do półśrednicy AG, to, zgodnie z poprzednimi wywodami, kąt IGM będzie równy kątowi MGT, bowiem, zgodnie z poprzednimi wywodami, punkt T jest miejscem obrazu formy punktu I, odbitej od punktu zwierciadła, który jest oznaczony jako G. Poprowadźmy również, zgodnie z EE I,31, z punktu H do linii AB linię równoległą do linii IB, którą jest linia HP. Z punktu T poprowadźmy do linii AG linię TR, która będzie równoległa do linii IG. Wobec tego, zgodnie z EE I,29, kąt IBZ będzie równy kątowi HPB. Jednak kąt IBZ, według wcześniejszych wywodów, jest równy także kątowi HBA, a więc dwa kąty HBA i HPB są równe, a zatem, zgodnie z EE I,6, dwa boki HB i HP są równe; wynika również i to, że dwa boki TG i TR są równe. Ponieważ w trójkącie HPB dwa kąty HPB i HBP są równe, to,

jak wynika z EE I,32, kąt HPA jest rozwarty, skoro te obydwa kąty są ostre. Wobec tego, zgodnie z EE I,19, w trójkącie HAP bok AH jest większy od boku HP, a linia AH jest większa od linii HB, i podobnie linia AT będzie większa od linii TG. Więcej, ponieważ linia HP jest równoległa do linii IB, to, zgodnie z EE I,29 i VI,4, stosunek linii AI do linii AH będzie taki jak linii AB do linii AP. I podobnie, skoro linia TR jest równoległa do linii IG, stosunek linii AI do linii AT będzie taki jak linii AG do linii AR. Odwrotnie więc, zgodnie z twierdzeniem I,5 tego dzieła, stosunek linii AH do linii AI będzie taki jak linii AP do linii AB. Zgodnie z definicją koła, linia AG jest równa linii AB, a zatem, jak wynika z EE V,7, taki sam jest stosunek linii AG i linii AB do linii AR. Stosunek linii AI do linii AT jest więc taki jak AB do AR. Z EE V,22 wynika, że, jeżeli z powyższych proporcji usuniemy te same wyrazy środkowe z jednej i drugiej strony [równości]¹⁶, tzn. AI oraz AB, to stosunek linii AH do linii AT będzie taki jak linii AP do linii AR. Skoro jednak kąt HPA jest rozwarty¹⁷, to z EE II,12 wynika, że kwadrat linii AH jest większy od kwadratów linii HP i AP razem wziętych o dwa razy wzięty iloczyn linii AP i linii, poprowadzonej z punktu P aż do miejsca prostopadłej, poprowadzonej z punktu H do linii AP, a prostopadła, poprowadzona z punktu H do poprowadzonej linii AP, musi paść w środek linii PB, zgodnie z twierdzeniem I,31 tego dzieła, ponieważ linie HB i HP są równe. Wobec tego, zgodnie z EE II,1, kwadrat linii AH jest większy od kwadratów linii HP i AP razem wziętych o iloczyn linii AP i PB. Jednak, jak wynika z EE II,3, iloczyn linii AB i AP jest równy iloczynowi linii AP i linii PB oraz kwadratowi linii AP. Z tego powodu kwadrat linii AH jest większy od kwadratu linii HP o iloczyn linii AB i AP. W ten sam sposób można również dowieść, że kwadrat linii AT jest większy od kwadratu linii TR o iloczyn jednej z linii, tzn. linii AG albo AB, oraz linii AR, ponieważ linia AG jest równa linii AB. Poprowadźmy linię AB do jednej i drugiej linii, AP oraz AR i pojawią się obydwa powyżej wspomniane iloczyny, a stosunek jednego iloczynu do drugiego jest, zgodnie z EE VI,1, taki jak linii AP do linii AR, ponieważ te iloczyny zawierają tę samą wielkość, która jest długością linii AB¹⁸. Zgodnie z wcześniejszymi wywodami, stosunek linii AP do linii AR jest taki jak linii AH do linii AT. Wobec tego stosunek różnicy kwadratu AH i kwadratu HP do różnicy kwadratu AT i kwadratu TR jest taki jak linii AH do linii AT. Ponieważ linia HP jest równa linii HB, a linia TR równa linii TG, to stosunek różnicy kwadratu AH i kwadratu HB do różnicy kwadratu AT i kwadratu TG będzie taki jak linii AH do linii AT. Skoro jednak, zgodnie z EE III,36, iloczyn linii EH i linii HD jest równy kwadratowi linii stycznej, poprowadzonej z punktu H do koła DEB, która to linia, zgodnie z twierdzeniem I,60 tego dzieła oraz EE V,8, jest mniejsza niż linia HB,

zatem iloczyn linii EH i linii HD jest mniejszy od kwadratu linii HB. Z twierdzenia I,127 tego dzieła, wynika zatem, że iloczyn linii AH i linii AD jest mniejszy od kwadratu HB. Niech więc będzie tak, że iloczyn linii AH i linii HU (większej od linii HD) jest równy kwadratowi linii HB. Ponieważ linia AH jest większa od linii HB, również linia AH będzie większa od linii HU. Odetnijmy więc, jak podano w EE I,3, linię HU od linii AH w punkcie U. Z EE II,2 wynika, że kwadrat linii AH jest równy iloczynowi linii AH i linii HU [wraz z iloczynem linii AH] i linii AU¹⁹; iloczyn linii AH i linii AU jest więc różnicą kwadratu AH i kwadratu HB. Stosunek linii AH do linii AT jest więc taki jak iloczynu linii AH i linii AU do różnicy kwadratu AT i kwadratu TG. Jeśliby zatem dwie linie AH i AT zostały poprowadzone wzdłuż linii AU, to, zgodnie z EE VI,1, stosunek iloczynu linii AH i linii AU do iloczynu linii AT i AU będzie taki jak linii AH do linii AT. Wobec tego, zgodnie z EE V,9, iloczyn linii AT i linii AU jest równy różnicy kwadratu AT i kwadratu TG, jednak, zgodnie z EE II,2, kwadrat linii AT jest równy iloczynowi AT i AU [wraz z iloczynem] AT i TU²⁰; iloczyn AT i TU jest więc równy kwadratowi TG. Jest zatem oczywiste, że iloczyn linii AU i linii HU jest równy kwadratowi HB, a iloczyn AT i TU jest równy kwadratowi TG. Podzielmy, jak podano w EE III,30, łuk BG na równe części w punkcie O. Poprowadźmy linię AO. Z punktów B, O, G poprowadźmy, jak podano w EE I,12, trzy prostopadłe do linii AH, tzn. prostopadłe BF, OY, GK, a z punktu G poprowadźmy, zgodnie z EE I,31, linię równoległą do linii AH i niech to będzie linia GS. Z punktu B natomiast poprowadźmy prostopadłą do linii AG i niech to będzie linia BC. Jeśli linię BC przedłużylibyśmy do obwodu koła, to linia AG podzieliłaby ją, zgodnie z EE III,3, na dwie równe części i podobnie podzieliłaby łuk na równe części w punkcie G, którego cięciwą byłaby poprowadzona linia BC. W ten sposób zostałby odcięty inny łuk równy łukowi BG, ponieważ na tym łuku oparłby się kąt CBG. I tak, jak wynika z EE III,20, kąt CBG jest połową kąta, opartego na tym samym łuku, którego [wierzchołek] jest w środku A, ale, zgodnie z EE III,27, kąt ten jest równy kątowi GAB, ponieważ obydwie te kąty opierają się na równych łukach, a wierzchołki ich są w środku koła A. Kąt CBG jest więc połową kąta GAB, a zatem, zgodnie z EE III,27, kąt CBG jest równy kątowi OAG. Dwa kąty BSG i BCG są równe; bo jeżeli wyobrazimy sobie koło, którego średnicą byłaby linia BG, przechodząca przez punkt S, to, zgodnie z EE III,31, będzie ona musiała przejść również przez punkt C. Powstanie łuk CS, na którym opierają się dwa kąty CBS i CGS. Te dwa kąty, zgodnie z EE III,27, są więc równe, ale, zgodnie z EE I,29, kąt GAY jest także równy kątowi CGS, ponieważ linie GS i AY są równoległe. Kąt GAY jest więc równy kątowi CBS. A jak to zostało wcześniej wykazane, kąt CBG jest

równy kątowi OAG, a zatem cały kąt OAY jest równy całemu kątowi GBS, ale kąty AYO i GSB są proste. Trójkąt YAO ma więc kąty równe kątom trójkąta GBS. Zgodnie z EE VI,4, stosunek linii GB do linii BS jest zatem taki jak linii OA do linii AY, a stosunek GB do GS jest taki jak AO do OY. Ponieważ kąt AHB jest ostry, to, zgodnie z 42 twierdzeniem księgi pierwszej tego dzieła, jest oczywiste na mocy EE II,13, że kwadrat linii AB jest mniejszy od kwadratów linii AH i HB razem wziętych o iloczyn linii AH i HF podwójnie wzięty. Kwadrat linii AH wraz z kwadratem linii HB jest więc większy od kwadratu linii AB bądź kwadratu linii równej tej linii, którą jest linia AD, o iloczyn linii AH i linii HF dwa razy wzięty. Ale iloczyn linii AH i linii HF dwa razy wzięty, jest, zgodnie z EE II,1, równy iloczynowi linii AH i linii HD dwa razy wziętemu wraz z iloczynem linii AH i DF dwa razy wziętym. Natomiast iloczyn AH i HD dwa razy wzięty wraz z kwadratem linii AD, zgodnie z EE II,7, jest równy kwadratowi linii AH wraz z kwadratem linii HD; odejmijmy zatem kwadrat linii AD wraz z iloczynem linii AH i linii HD dwa razy wziętym, ponieważ jest to wspólne dla obydwu przypadków. Pozostaje więc kwadrat linii DH, który razem z iloczynem linii AH i FD dwa razy wziętym jest równy kwadratowi linii HB²¹. Z poprzednio przeprowadzonych wywodów wynika jednak, że iloczyn AH i HT jest równy kwadratowi HD, a iloczyn linii AH i linii HU jest równy kwadratowi HB; iloczyn AH i HU jest więc równy iloczynowi AH i HT raz wziętemu, a dwa razy wziętemu iloczynowi [AH i DF]. Skoro więc odjęliśmy iloczyn AH i HT, który przyjmujemy, że jest wspólny dla obydwu przypadków, to jest oczywiste, że iloczyn linii AH i linii TU jeden raz wzięty jest równy iloczynowi linii AH i linii DF dwa razy wziętemu. Zgodnie z EE VI,1, linia TU będzie więc podwojeniem linii DF. Skoro kąt ATG jest ostry, to, zgodnie z przedstawionym sposobem dowodzenia, również kwadrat linii AT wraz z kwadratem linii TG będzie równy kwadratowi linii AD oraz iloczynowi linii AT i linii TK dwa razy wziętemu lub²² iloczynowi AT i DT dwa razy wziętemu oraz iloczynowi [AT] i DK dwa razy wziętemu. Pozostanie, jak poprzednio, kwadrat linii TG, równy kwadratowi linii TD oraz iloczynowi [linii] AT i linii DK dwa razy wziętemu. Przyjmijmy, zgodnie z EE VI,10, aby taki sam był stosunek TD do TX, jaki jest stosunek AT do TD²³. Wobec tego, zgodnie z EE VI,17, iloczyn linii AT i linii TX jest równy kwadratowi TD, ale, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, iloczyn AT i TU jest równy kwadratowi TG. Po odjęciu zatem w obydwu przypadkach iloczynu linii AT i linii TX, jest oczywiste, że iloczyn linii AT i XU raz wzięty jest równy iloczynowi AT i DK dwa razy wziętemu. Wobec tego, zgodnie z EE VI,1, linia XU jest podwojeniem linii DK. Jednak już zostało udowodnione, że linia TU jest podwojeniem linii DF. Wynika więc to, że linia XT jest

podwojeniem linii KF. Ponieważ, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, iloczyn AH i HT jest równy kwadratowi HD, wobec tego, zgodnie z EE VI,17, stosunek AH do HD jest taki jak HD do HT. Stosunek linii AH do HT jest więc kwadratem stosunku²⁴ linii AH do HD. Podobnie, z tego samego powodu, stosunek linii AT do linii TX jest kwadratem stosunku AT do TD, ale, zgodnie z twierdzeniem I,4 tego dzieła, stosunek AT do TD jest większy niż AH do HD, ponieważ nastąpiło dodanie tej samej linii, tzn. linii TH, do wcześniejszych [linii], poprzedzającej i następującej²⁵. Stosunek linii AT do linii TX jest więc większy niż linii AH do linii HT²⁶, a zatem, zgodnie z twierdzeniem I,10 tego dzieła, stosunek linii AT do linii AH wzajemnie będzie większy niż linii TX do linii HT, ale linia AH jest większa niż linia AT, ponieważ całość jest większa od części. Linia HT jest więc większa niż linia TX, ale linia TX jest dwukrotnie większa od linii FK, jak to pokazano powyżej. Wobec tego linia HT jest większa niż dwukrotność linii FK. Jak to powyżej zostało dowiedzione, również stosunek BG do GS jest taki jak OA do OY. A zatem, zgodnie z EE V,16, wzajemnie stosunek BG do OA jest taki jak GS do OY, ale linia OA jest równa linii BA, zgodnie z definicją koła, a linia GS jest równa linii FK, zgodnie z EE I,34. Skutkiem tego, jak wynika z EE V,7, stosunek BG do BA będzie taki jak FK do OY. Ponieważ, jak to wcześniej, prawie na początku tego [twierdzenia] wykazano, linia IH jest mniejsza od połowy linii OH, a linia OH jest trzykrotnością linii HT, linia IH będzie więc mniejsza od linii HT i jej połowy. Linia HT jest jednak mniejsza od piątej części linii HD, jak to udowodniono wcześniej, a zatem linia IH jest mniejsza od linii TD. Ale linia ND jest większa od linii TD, a zatem linia IH jest o wiele mniejsza od linii ND. Linia MI natomiast jest mniejsza od linii IH, zatem linia MI jest o wiele mniejsza od linii ND. Ponieważ linia ZH jest równa linii HD, jak to powyżej zostało wykazane, jest oczywiste, że punkt I leży pomiędzy dwoma punktami H i Z; wobec tego również punkt M leży pomiędzy dwoma punktami H i Z. Stwierdzono również, że iloczyn linii EZ i linii ZD jest równy kwadratowi półśrednicy AD, a zatem iloczyn linii EM i linii MD jest mniejszy od kwadratu linii AD, natomiast iloczyn linii EM i MD jest, zgodnie z EE III, 36, równy kwadratowi linii stycznej do koła; a jest to linia MG. Kwadrat linii MG jest więc mniejszy od kwadratu linii AD, stąd linia AD jest większa od linii MG. Linia MG jest zatem mniejsza od linii AG, która jest równa linii AD, ponieważ są półśrednicami tego samego koła. Skoro dwa trójkąty AGM i MGK mają jeden kąt AMG wspólny, a kąt AGM jest prosty, zgodnie z EE III,18, zaś kąt MKG jest prosty na podstawie definicji linii prostopadłej, to, zgodnie z EE I,32, trójkąty te są równokątne. Zgodnie z EE VI,4, stosunek MK do KG jest taki jak MG do GA. Linia MG jest jednak mniejsza od linii AG, jak to

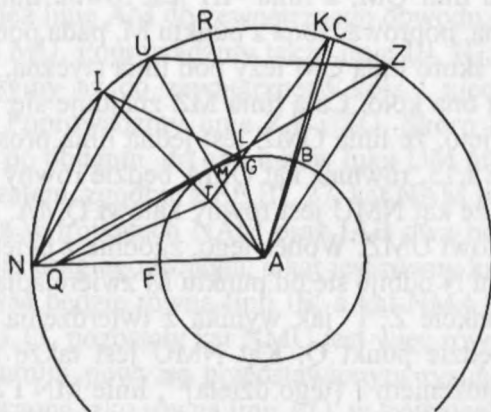
już wykazano, zaś linia MK jest mniejsza od linii KG, a linia KG jest mniejsza od linii OY, zgodnie z EE III,15, natomiast linia HD jest mniejsza od linii MK; a zatem linia HD jest mniejsza od linii KG i linia HD będzie mniejsza od linii OY. Ponieważ, zgodnie z wcześniejszymi wywodami oraz EE VI,17, stosunek AH do HD jest taki jak HD do HT, gdy linia HQ jest połową linii HD, to, zgodnie z EE V,15, stosunek linii AH do linii HQ jest taki jak linii HD do połowy linii HT²⁷. Już powyżej wykazano, że linia HT jest większa niż dwukrotność linii KF, a linia HD jest mniejsza od linii OY; stosunek połowy linii HT do linii HD jest więc większy niż linii FK do linii OY, zgodnie z twierdzeniem I,9 tego dzieła. Zgodnie z EE V,11 i twierdzeniem I,5 tego dzieła, stosunek QH do AH jest zatem większy niż FK do OY. Linia AQ przecina koło EDB. Punktem przecięcia niech będzie punkt X. Poprowadźmy cięciwę DX, która, zgodnie z twierdzeniem I,43 tego dzieła i EE I,28, będzie równoległa do cięciwy HQ dlatego, że łuki HQ i DX są równoległe. Zgodnie z EE I,29 i VI,4, stosunek HQ do AH będzie taki jak DX do AD, ale stosunek HQ do HA jest większy niż FK do OY, zatem stosunek DX do DA będzie większy niż FK do OY. Jednak z wcześniej przeprowadzonych wywodów wynika, że stosunek FK do OY jest taki jak GB do AB. Jest więc stosunek XD do DA większy niż BG do BA, ale linia DA jest równa linii BA, ponieważ są półśrednicami. Wobec tego, zgodnie z EE V,10, cięciwa XD jest większa od cięciwy BG, a zgodnie z EE III,28, łuk DX będzie większy od łuku BG. Poprowadźmy również linię AQ poza koło do punktu S tak daleko, aż, zgodnie z EE I,3, linia AS nie będzie równa linii AI. Poprowadźmy linię SI, która, zgodnie z EE V,7 oraz VI,2, będzie równoległa do linii HQ. Zgodnie z EE I,29 oraz VI,4, stosunek SI do HQ będzie więc taki jak IA do AH. Wcześniej już wykazano, że stosunek IA do AH jest taki jak TQ do QH; wobec tego, zgodnie z EE V,9, linia SI jest równa linii TQ, podczas gdy stosunek obydwu tych linii do linii QH jest taki sam jak stosunek linii IA do linii AH. Ponieważ jednak liczba wyznaczonych linii wielokrotnie przewyższa liczbę łacińskich liter, zmieniamy rysunek [33 na rysunek 34], aby przypadkiem te wszystkie linie nam się nie pomieszały.

Skoro nową wyznaczoną linię, którą jest linia AS, wykreślono jako równą linii AI, zakreślmy koło o środku w punkcie A i średnicy równej tym liniom, a w miejsce litery S umieścmy literę N. Koło DGB niech będzie podobne do wcześniejszego koła, którym jest koło DBE. Poprowadźmy linie AB i AG aż do koła zewnętrznego, do punktów C i R. Niech to będą linie ABC i AGR. Zamieńmy linie AI i AS tak, aby linia ADI była na miejscu linii AXS, a w miejscu linii ADI znalazła się linia AFN. Umieścmy w miejscu litery S literę N, a w miejsce litery X literę F. Jak wcześniej wykazano, łuk DF będzie większy od łuku GB. Niech za-

punkty I oraz H, jak to wykazaliśmy, i ponieważ jest to samo oddalenie punktu B od punktu H jak punktu M od punktu Q (bo wykazaliśmy, że linia BH jest równa linii QM, a linia IH jest równa linii NQ), to jest oczywiste, że styczna, poprowadzona z punktu M, pada pomiędzy punkty N i Q. Wobec tego, skoro linia QM leży pod linią styczną, to z EE III,16 wynika, że przecina ona koło. Cała linia MZ znajduje się więc poza kołem, ponieważ przyjęto, że linia QMZ jest jedną linią prostą. Z tego powodu, zgodnie z EE I,15, również kąt QMA będzie równy kątowi UMZ, a już wykazaliśmy, że kąt NMU jest równy kątowi QMA. Kąt NMU będzie więc równy kątowi UMZ. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 8 tej księgi, forma punktu N odbije się od punktu M zwierciadła do oka, znajdującego się w punkcie Z, i jak wynika z twierdzenia 11 tej księgi, miejscem obrazu będzie punkt Q. Kąt NMU jest także równy kątowi UMZ. Zgodnie z założeniem 1 [tego dzieła]³⁰, linie MN i ZM będą równo oddalone od średnicy AU, a zatem, zgodnie z EE III,7, one same są równe. Poprowadźmy również linie NU i ZU, które, na mocy EE I,4, będą równe, skoro linia MU jest wspólna dla obydwu trójkątów NMU i ZMU. Zgodnie z EE III,28, łuk NU jest więc równy łukowi UZ i, zgodnie z EE III,27, kąt NAU jest równy kątowi UAZ. Z poprzednio przeprowadzonych wywodów wynika jednak, że kąt NAU jest równy kątowi IAC, a zatem kąt IAC będzie równy kątowi UAZ. Kąt BAG będzie więc równy kątowi GAM albo mniejszy od niego, albo większy: najpierw niech będzie równy.

Jeśli od kąta IAB odejmiemy kąt BAG, a od kąta ZAU kąt GAM, to pozostanie kąt IAG równy kątowi ZAG. Ponieważ dwa boki IA i AG są [odpowiednio] równe dwom bokom ZA i AG, to wobec tego, zgodnie z EE I,4, linia IG będzie równa linii ZG, a kąt IGA będzie równy kątowi ZGA, skutkiem czego, na mocy EE I,13, kąt IGR jest równy kątowi ZGR. Na końcu linii AG, w punkcie G, wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi IGR; i niech to będzie kąt TGA, a linia poprowadzona do linii IA niech będzie linią GT. Kąt TGA będzie więc równy kątowi ZGR. Jeżeli linię TG poprowadzimy do obwodu koła, jest oczywiste na podstawie EE I,15, że dojdzie ona do punktu Z, bo linie ZG i TG połączone w punkcie G staną się jedną linią, zgodnie z EE I,14: linia TGZ jest więc jedną linią prostą. Wobec tego forma punktu I odbija się z punktu G zwierciadła do oka, znajdującego się w punkcie Z, a miejscem obrazu tego punktu jest punkt T. Jest także oczywiste, że do oka znajdującego się w punkcie Z odbijają się formy dwóch punktów N oraz I od dwóch punktów zwierciadła kulistego wypukłego, a są to punkty M i G. Miejscami obrazów są punkty T oraz Q. A zatem, jak wynika z twierdzenia 11 tej księgi, linia TQ będzie obrazem całej linii IN. Wcześniej zgodziliśmy się, że linia TQ jest równa linii NI. Jest więc oczywi-

ste, że zdarza się, że w tych zwierciadłach obraz jest równy rzeczy widzianej. A to jest jedno z założeń.



[Rys. 35]

Jeśli kąt BAG będzie większy od kąta GAM [patrz rys. 35]³¹, to odejmijmy kąt BAG od kąta IAB, a kąt GAM od kąta ZAU, równego kątowi IAB. Pozostaje więc kąt ZAG większy od kąta IAG. Wykreślmy, jak podano w EE I,32, kąt KAG równy kątowi IAG i po poprowadzeniu linii od środka [koła] do obwodu, do punktu K, połączmy punkty K i G. Kąt KAG będzie również mniejszy od kąta ZAG. Punkt K będzie więc wyżej³² położony niż punkt Z, a punkt M jest wyżej położony od punktu G; linia KG przetnie więc linię ZM i przyjmijmy, że przetnie ją w punkcie L. Przedłużmy linię KG do linii IA, do punktu T. Odłóżmy również na najbliższej linii linię TG³³. Jest oczywiste, że, gdy oko znajduje się w punkcie L, odbija się do niego forma punktu N z punktu M, a miejsce obrazu będzie w punkcie Q; podobnie do oka odbija się forma punktu I od punktu G, a miejsce obrazu będzie w punkcie T, zgodnie z wcześniej przeprowadzonym dowodem. Wobec tego linia TQ będzie obrazem linii NI, która jest równa tamtej linii [TQ], jak powyżej zostało udowodnione. W ten sposób wynika to samo, co poprzednio założono.

Jeżeli zaś kąt BAG będzie mniejszy od kąta GAM, to również kąt ZAG, jak powyżej, będzie mniejszy od kąta IAG. Wykreślmy zatem kąt OAG [rys. 36]³⁴, równy kątowi IAG, przeprowadzając linię AO do obwodu koła. Kąt OAG będzie więc większy od kąta ZAG. Punkt O znajduje się więc poniżej punktu Z. Poprowadźmy linię OG, która pada na linię IA w punkcie T. Jest rzeczą oczywistą, że forma punktu I odbija się do oka, znajdującego się w punkcie O, od punktu G zwierciadła. Dlatego linia OG albo przetnie linię ZMQ poza kołem zwierciadła albo jej nie przetnie: jeśli to [przecięcie] byłoby możliwe, niech ją przetnie poza ko-

NAZ i IAO jest większa od kąta trzeciego, a jest nim kąt NAI, zaś suma dwóch kątów IAO i NAI jest większa od kąta trzeciego, a jest nim kąt NAZ, wobec tego są trzy kąty NAI, NAZ, IAO, z których suma każdych dwóch jest większa od kąta trzeciego, a wszystkie trzy kąty razem wzięte są mniejsze od czterech kątów prostych, ponieważ, jak jest oczywiste, nie jest możliwe zmienić te kąty, które wokół środka koła A^{39} tworzą kąt równy czterem kątom prostym. Jest zatem, zgodnie z EE XI,23, możliwe żeby z tych kątów utworzyć jeden kąt bryłowy. Niech on powstanie wokół środka A, zgodnie z tym samym twierdzeniem EE XI,23. Linia SA niech zostanie poprowadzona ponad powierzchnię koła w punkcie A w taki sposób, aby kąt IAS był równy kątowi IAO, a kąt NAS równy kątowi NAZ, zaś kąt NAI pozostał tak, jak jest nieporuszony na powierzchni koła. Linia AS niech będzie równa dowolnej z linii: AN albo AI, albo AO; one wszystkie są równe, ponieważ są półśrednicami tego samego koła. Poprowadźmy linie TS i QS. Ponieważ kąt TAS jest równy kątowi TAO, jak wynika z poprzednich rozważań, i dwa boki TA i AO są równe dwom bokom TA i AS, a kąt TAO jest równy kątowi TAS, jak wynika z poprzednich wywodów, to, zgodnie z EE I,4, podstawa TS będzie równa podstawie TO, a cały trójkąt równy całemu trójkątowi; wobec tego kąt OTA albo kąt GTA będzie równy kątowi STA. Podobnie również kąt QAS jest równy kątowi QAZ, a dwa boki dwom bokom, z tego powodu, jak poprzednio, kąty ZQA i MQA są równe kątowi SQA. Podzielmy teraz, jak podano w EE I,19, kąt TAS linią AY. Punkt Y niech będzie tym punktem, w którym linia dzieląca kąt przecina linię TS. Jest oczywiste, że, gdy kąt IAG jest połową kąta IAO, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, to kąt TAG będzie równy kątowi TAY. Ponadto zostało udowodnione, że również kąt GTA jest równy kątowi YTA. Ponieważ dwa trójkąty YTA i GTA mają jeden bok wspólny, to, zgodnie z EE I,26, trójkąt YTA będzie równy trójkątowi GTA dlatego, że bok TY będzie równy bokowi TG, a bok AY równy bokowi AG. Punkt Y będzie zatem na powierzchni zwierciadła tak jak i punkt G, ponieważ obydwie znajdują się w równej odległości od środka zwierciadła, tj. od punktu A. Ponieważ kąt TAG jest równy kątowi TAY, to i kąt IAG będzie równy kątowi IAY, a boki są równe bokom, gdyż IA jest wspólnym bokiem, a bok AY jest równy bokowi AG. Wobec tego, zgodnie z EE I,4, kąt AGI będzie równy kątowi AYI, a poprowadzona linia IY będzie równa linii IG. Poprowadźmy również linię AY poza zwierciadło aż do punktu P. Wynika więc, że kąt IGR jest równy kątowi IYP. Ale skoro linia TS jest równa linii TO, jak wyżej zostało dowiedzione, a linia TY równa linii TG, to wynika, że linia GO jest równa linii YS. Wobec tego dwa boki AY i YS są równe dwom bokom AG i GO, a podstawa AS jest równa podstawie AO. A zatem, zgodnie z EE I,8, kąty w trójkątach AYS i

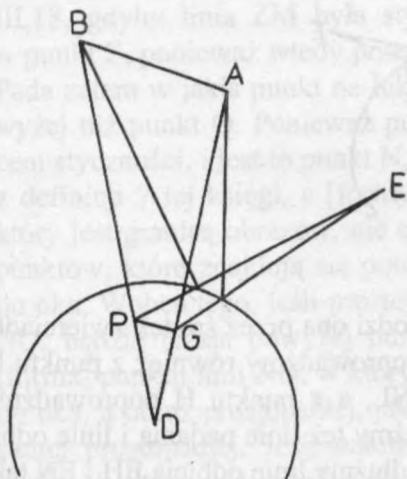
AGO, utworzone z równych boków, są równe; stąd kąt AYS jest równy kątowi AGO. Z EE I,13 wynika więc, że kąt SYP jest równy kątowi OGR, a zatem dwa kąty IGR i OGR są równe dwom kątom IYP i SYP. Linia AS przecina również powierzchnię wypukłą zwierciadła, a punktem przecięcia niech będzie punkt E. Trzy punkty zatem, tzn. punkty E, Y, D są na powierzchni wypukłej zwierciadła, a linie poprowadzone od środka zwierciadła, tzn. od punktu A, do owych trzech punktów są równe. Ponieważ jednak trójkąt TAS, zgodnie z EE XI,2, cały jest na tej samej płaszczyźnie, jest oczywiste, że te trzy punkty D, Y, E, które znajdują się na bokach tego trójkąta, są na tej samej płaszczyźnie, a zatem linia EYD, zgodnie z EE III,9, jest łukiem koła wielkiego kuli zwierciadła, którego środek A jest środkiem zwierciadła. Natomiast wspólne przecięcie powierzchni zwierciadła i płaszczyzny odbicia, zgodnie z twierdzeniem 1 tej książki, znajduje się na płaszczyźnie odbicia, a formy punktu I odbijają się do oka, znajdującego się w punkcie S, od punktu Y zwierciadła, zaś miejscem obrazu jest punkt T. Podobnie, gdy podzielimy kąt NAS na dwie równe części za pomocą linii AX, poprowadzonej do linii QS w punkcie X, i przedłużonej poza powierzchnię zwierciadła do punktu θ , udowodnimy w sposób powyżej przedstawiony, że linia QX będzie równa linii QM, a linia AX równa linii AM, zaś linia XS równa linii MZ. Dwa kąty natomiast $NX\theta$ i $SX\theta$ będą równe dwom kątom NMU i ZMU. W ten sposób forma punktu N odbije się z punktu X na zwierciadle do oka, znajdującego się w punkcie S, a miejscem obrazu jest punkt Q. I będzie tak jak poprzednio, że formy dwóch punktów N oraz I odbijają się od dwóch punktów X i Y na zwierciadle do oka znajdującego się w punkcie S, a linia TQ będzie obrazem linii IN; linia TQ jest równa linii IN. Wynika więc to, co poprzednio zakładano.

Otóż, jeśli z punktu I poprowadzimy prostopadłą do linii NA, padnie ona między punkty N i Q, ale nie poza punkt N, bo, skoro, zgodnie z twierdzeniem I,42 tego dzieła, kąt INA jest ostry, to, gdyby linia ta padała poza punkt N, powstałby kąt ostry zewnętrzny, zgodnie z EE I,16, większy od kąta prostego, a to jest niemożliwe. Wobec tego ta prostopadła padnie poniżej⁴⁰ punktu N i utworzy ona kąt prosty na linii NQ, naprzeciw którego leży linia IN; wobec tego linia IN, jak wynika z EE I,19, będzie większa od tej prostopadłej, a ta prostopadła będzie mniejsza od linii TQ, która jest równa linii IN. Natomiast [forma] punktu linii NQ, na który pada ta prostopadła, a jest to punkt K, odbija się od jakiegoś punktu zwierciadła do oka znajdującego się w punkcie S, a miejsce jej obrazu będzie na linii NA, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, i będzie on bardziej oddalony od środka zwierciadła (który jest w punkcie A) aniżeli punkt Q, gdyż będzie ponad punktem Q, jak to wynika z twierdzenia 17 tej książki. Bo o ile bardziej oddalone są punkty, których formy odbijają

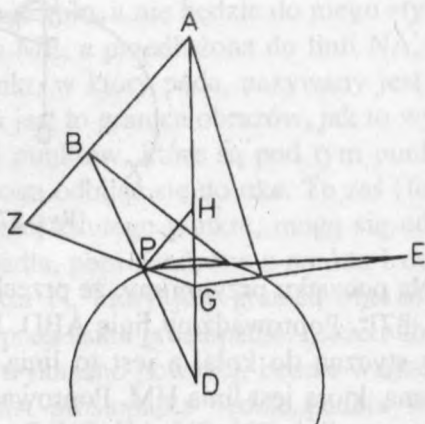
się od zwierciadeł kulistych wypukłych, o tyle bardziej miejsca obrazów zbliżają się do środka zwierciadła, ale [forma] punktu I tej prostopadłej odbija się do oka od punktu Y na zwierciadle, a miejscem jej obrazu jest punkt T. Jakakolwiek zatem linia zostanie poprowadzona od punktu T do jakiegoś punktu linii NQ ponad punktem Q, bliżej punktu N, np. linia TK, to ta linia, gdy znajdzie się naprzeciw kąta rozwartego, jak to jest oczywiste, będzie, zgodnie z EE I,19, większa niż linia TQ. Będzie więc również większa niż linia IN, która jest większa od tej prostopadłej, której obraz dochodzi do oka. Wynika więc, że obraz tej prostopadłej będzie większy niż sama prostopadła. I to samo zachodzi niezależnie od tego, jaką linię poprowadzimy od punktu I do linii NQ, pomiędzy tę prostopadłą IK i linię IN. Zawsze bowiem, zgodnie z EE I,47 albo EE I,19, linia IN będzie większa od tej linii, a obraz tej linii zawsze będzie większy niż linia QT i w ten sposób obraz tej linii zawsze będzie większy od niej samej. A to zakładano.

Można przedstawić to jaśniej. Ponieważ forma punktu N odbija się od punktu M na zwierciadle do oka znajdującego się w punkcie Z, a miejscem obrazu jest punkt Q, wynika więc, że linia odbicia, którą jest linia ZMQ, przecina koło; punkt Z niech będzie punktem przecięcia. Wynika więc, że styczna do koła, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, poprowadzona z punktu Z, nie może padać w punkt M, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 21 tej książki, kąt AMZ musi być większy od kąta prostego, gdyż byłoby to sprzeczne z EE III,18, gdyby linia ZM była styczną do koła. I nie może padać ona w punkt Z, ponieważ wtedy przetnie koło, a nie będzie do niego styczna. Pada zatem w jakiś punkt na łuku ME, a przedłużona do linii NA, pada wyżej niż punkt Q. Ponieważ punkt, w który pada, nazywany jest końcem styczności, i jest to punkt N, i jest to granica obrazów, jak to wynika z definicji 7 tej książki, a [formy] punktów, które są pod tym punktem, który jest granicą obrazów, nie mogą odbijać się do oka. Te zaś [formy] punktów, które znajdują się powyżej tamtego punktu, mogą się odbijać do oka. Wobec tego, jeśli prostopadła, poprowadzona z punktu I do linii NQ, będzie leżała powyżej punktu N, który jest granicą obrazów, to [forma] punktu linii NQ, w który pada sama prostopadła, może odbić się do oka, a obraz prostopadłej, jak wykazano powyżej, będzie większy od samej prostopadłej. Jeśli natomiast prostopadła będzie padała w sam punkt N, który jest granicą obrazów, albo leżała poniżej tego punktu, wtenczas forma punktu, na który pada prostopadła, nie odbija się: dlatego nie ma żadnego obrazu tej prostopadłej. Kiedy jednak koniec styczności jest poniżej linii IN i bliżej środka, to między punktem, który jest końcem styczności, i punktem N będzie nieskończona liczba punktów; [forma] każdego punktu odbija się do oka. I obraz każdego z nich będzie na

DT jest taki jak AM do MT. Podobnie, zgodnie z tym samym twierdzeniem, stosunek BD do DQ jest taki jak stosunek BL do LQ. Linia AD jest większa od linii BD, a linia DT jest mniejsza od linii DQ, wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,9 tego dzieła, stosunek AD do DT będzie większy niż BD do DQ, a zgodnie z EE V,11, stosunek AM do MT będzie większy niż BL do QL. Podzielmy, jak podano w twierdzeniu I,3 tego dzieła, linię AM w punkcie F tak, aby stosunek FM do MT był taki jak BL do LQ. Ponieważ linia MT jest większa od linii LQ, to jak wynika z EE V,14, linia FM będzie większa od linii BL, a zatem, zgodnie z EE V,8, stosunek linii FM do linii TM będzie większy niż linii BL do linii TM, ale stosunek BL do MT będzie mniejszy niż BL do LQ, a jeszcze mniejszy będzie stosunek BM do MT niż BL do QL. Podzielmy więc linię MT w punkcie K w taki sposób, aby stosunek linii BM do linii MK był taki jak linii BL do LQ. Z własności proporcji i EE V,8 wynika, że punkt K musi leżeć między punktami M i Q, bo linia LQ jest mniejsza od linii MQ, a linia BL jest większa od linii BM. Skoro więc stosunek FM do MT jest taki jak BL do LQ oraz jak BM do MK, to, zgodnie z EE V,19, stosunek FB do KT będzie taki jak BL do LQ. Jednak linia BL jest mniejsza niż linia LQ, a zatem linia FB jest większa niż linia KT, ale linia FB jest mniejsza od linii AB, a linia KT jest większa od linii QT. Jeśli więc linia FB jest większa od linii KT, to linia AB jest o wiele większa od linii QT. A to jest przedmiotem twierdzenia.



[Rys. 37a]



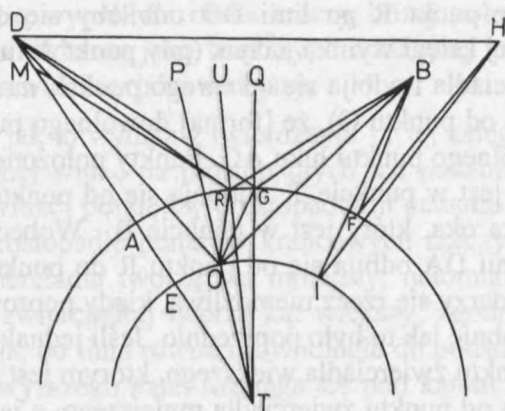
[Rys. 38]

Jeśli zaś linia AB po przedłużeniu nie przechodzi przez środek [zwierciadła] D [rys. 37a]³, to poprowadźmy z punktu A linię do środka D, i niech to będzie linia AD, a z punktu B poprowadźmy linię BD. Miej-

scem obrazu [punktu] A niech będzie punkt G, a miejscem obrazu [punktu] B niech będzie punkt P. Poprowadźmy linię PG. Linia PG będzie więc obrazem linii AB. Twierdzą, że linia AB jest większa od linii PG; linia PG jest bowiem linią równoległą do linii AB albo nią nie jest.

Jeśli będzie równoległą, jest oczywiste na mocy EE I,29 i VI,4, że linia PG jest mniejsza od linii AB⁴. Skoro stosunek linii AB do linii PG jest taki jak linii AD do linii DG, a linia AD jest większa od linii DG, to linia AB będzie większa od linii PG. Jeśli natomiast linia PG nie jest linią równoległą do linii AB [rys. 38]⁵, to przedłużmy ją tak, aby przecięła się z linią AB; punktem przecięcia niech będzie punkt Z. Poprowadźmy z punktu P linię równoległą do linii AB, i niech to będzie linia PH. Jeśli kąt PGH będzie kątem prostym albo większym od kąta prostego, to, zgodnie z EE I,19, bok PH będzie większy od boku PG, ale, jak wynika z EE I,29 i VI,4, bok PH jest mniejszy od boku AB, a zatem również bok PG jest mniejszy od boku AB. Jeśli kąt PGH będzie ostry, większy jednak od kąta PHG, taki sam będzie wynik jak poprzednio. Nie może się jednak zdarzyć, aby kąt PGH był mniejszy od kąta PHG, chyba że w przypadku, gdy odległość rzeczy od zwierciadła jest tak wielka, że tę odległość oko widzi jako mniejszą niż jest naprawdę, bo wtedy obraz może wydawać się większy niż sama forma dochodząca do oka, jak to wynika z poprzednio przeprowadzonych rozważań. Wynika więc to, co zakładano.

40. Wizerunki tej samej rzeczy w mniejszych zwierciadłach kulistych wypukłych ukazują się jako mniejsze (Euc. Catoptr. 22).



[Rys. 39]

Dla przykładu umieścimy dwa zwierciadła kuliste wypukłe tak, aby miały ten sam środek w punkcie T [rys. 39]¹. Koło większego zwiercia-

dła wspólne dla powierzchni zwierciadła i płaszczyzny odbicia oznaczmy jako AG, a mniejszego oznaczmy jako EI. Odbicie formy jakiejś rzeczy widzialnej, np. rzeczy HD, niech się dokona od jednego i drugiego zwierciadła tak, aby forma punktu D odbiła się od punktu G koła zwierciadła większego, tzn. koła AG, do oka, które jest w punkcie B. Jeśli zatem [forma] tego samego [punktu] D rzeczy widzianej² odbije się do oka B od jakiegoś punktu koła EI zwierciadła mniejszego, np. z punktu O, to nie jest możliwe, aby linia odbicia, którą jest linia OB, padła w punkt G zwierciadła koła większego.

Założmy³ [jednak], że [linia OB] pada w punkt G i odbija się do oka B⁴. Poprowadźmy linię DG jak poprzednio. Z twierdzenia 8 tej księgi wynika, że linia poprowadzona od środka zwierciadła T do punktu G dzieli kąt DGB na dwie równe części; tę poprowadzoną linię oznaczmy TGQ. Ponieważ forma punktu D pada na punkt zwierciadła mniejszego, którym jest punkt O, poprowadźmy linię TO od środka zwierciadła; ta linia podzieli więc kąt DOB na równe części, a poprowadzona linia jest linią TOP. Ponieważ kąt DGB, zgodnie z założeniem, jest zewnętrzny względem kąta DOB w trójkącie DOG, to na podstawie EE I,16⁵, pierwszy kąt jest większy od drugiego, a zatem połowa kąta DGB jest większa od połowy kąta DOB i w ten sposób kąt QGB jest większy od kąta POG, ale, zgodnie z EE I,15, kąt OGT jest równy kątowi QGB. Wobec tego zewnętrzny kąt POG będzie równy kątowi wewnętrznemu OGT w trójkącie TOG. To jednak jest sprzeczne z EE I,16 i jest niemożliwe, wobec tego linia odbicia OB nie przejdzie przez punkt G. Nie może ona również paść poza punkt G w kierunku punktu A do jakiegoś innego punktu zwierciadła większego. Jeśli bowiem to byłoby możliwe, stałoby się, że [forma] padając w punkt R po linii DO odbiłaby się do punktu B⁶. Z twierdzenia 17 tej księgi wynika jednak (gdy punkt A linii DA leży na powierzchni zwierciadła i odbija się od owego punktu, na który pada, to punkt D odbija się od punktu G), że [forma] dowolnego punktu linii DA odbija się od dowolnego punktu łuku AG. Punkty położone bliżej środka zwierciadła, który jest w punkcie T, odbijają się od punktu bardziej oddalonego od środka oka, który jest w punkcie B⁷. Wobec tego [forma] jakiegoś punktu linii DA odbija się od punktu R do punktu B: niech to będzie punkt M. Zdarzy się rzecz niemożliwa, kiedy poprowadzimy linie MR, RB, TR, podobnie jak to było poprzednio. Jeśli jednak forma punktu D odbija się od punktu zwierciadła większego, którym jest punkt G, również dzięki odbiciu od punktu zwierciadła mniejszego, a jest to punkt O, to forma ta pada w punkt zwierciadła większego, a jest to punkt R⁸. Wobec tego od dwóch punktów zwierciadła większego, a są to punkty G i R, odbija się forma jednego punktu do oka B. Spotykają się zatem promienie odbite z dwóch punktów tego samego zwierciadła, a to jest sprzeczne

z 15 twierdzeniem tej księgi i jest niemożliwe. Promień odbicia⁹ od punktu O zwierciadła mniejszego nie padnie zatem na jakiś punkt łuku AG zwierciadła większego, od którego zachodzi odbicie form punktów linii AD, ale bezpośrednio dochodzi do oka w punkcie B, przechodząc przez jakiś punkt łuku koła zwierciadła większego, przed punktem G¹⁰. Zdarza się podobna sytuacja, że punkt H linii DH [położony] z drugiej strony oka B (w stosunku do punktu D) odbija się do oka B od jakiegoś punktu zwierciadła większego, a jest to punkt F. Zgodnie z twierdzeniem 17 tej księgi, punkt F będzie po drugiej stronie punktu G¹⁰, a forma punktu H odbija się do punktu B od punktu I mniejszego zwierciadła. Zajdzie, podobnie jak poprzednio, również odbicie od punktu I do punktu B.

Ponieważ kąt GBF, pod którym ukazuje się obraz na większym zwierciadle, jest więc większy od kąta OBI, jest oczywiste na podstawie twierdzenia IV,20 tego dzieła, że na większym zwierciadle ukazuje się większy obraz niż na zwierciadle mniejszym, dlatego że formy wokół środków zwierciadeł mniejszych są bardziej ściśnięte niż wokół środków zwierciadeł większych; stąd obrazy stają się zawsze większe w zwierciadłach większych. Ogólnie, dla każdej rzeczy, która jest odpowiednio położona względem zwierciadła, może stać się oczywiste założenie z twierdzenia I,46 tego dzieła, ponieważ części średnicy koła większego są większe, a koła mniejszego są mniejsze, i w rezultacie również obrazy są większe i mniejsze, jak to wynika z twierdzenia 11 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

41. Gdy środek oka pozostaje nieporuszony, to w tym samym zwierciadle kulistym wypukłym obraz rzeczy bliżej położonej powierzchni zwierciadła widzimy jako większy, a oddalonej na tej samej linii od zwierciadła widzimy jako mniejszy.

Ponieważ, jak to wynika z twierdzenia 11 tej księgi, obrazy punktów rzeczy widzianej widać na prostopadłych ich padania, a obrazy rzeczy widzianych [widać] pomiędzy prostopadłymi padania ich punktów krańcowych, to prostopadłe punktów krańcowych rzeczy oddalonej od powierzchni zwierciadła tworzą kąt mniejszy, natomiast bliżej położonej [powierzchni zwierciadła] tworzą kąt większy, zgodnie z twierdzeniem I,34 tego dzieła, bo linia równa i równoległa do podstawy trójkąta, bliżej położonej najwyższego kąta, rozciąga się pod kątem większym¹. Ponieważ wraz ze zmianą miejsca rzeczy, zmienia się również jej obraz w każdym zwierciadle, jak to wynika z twierdzenia V,42 tego dzieła, jest oczywiste, że obraz rzeczy oddalonej jest mniejszy i dlatego widzimy go jako mniejszy, a rzeczy bliżej położonej powierzchni zwierciadła jest większy i dlatego widzimy go większy, ponieważ, zgodnie z wcześniej-

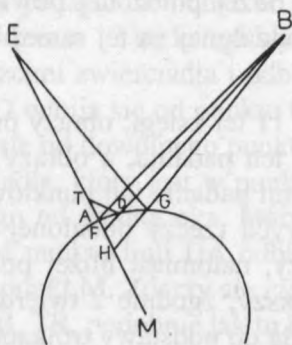
szymi wywodami w poprzednim twierdzeniu, widzimy go pod większym kątem, [o wierzchołku] w środku oka zawartym między liniami odbić punktów krańcowych tej rzeczy, jak to może wynikać z twierdzenia I,³⁴ tego dzieła i twierdzenia 23 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

Z tego i poprzednich wywodów można wnioskować, że jeśli stosunek oddalenia rzeczy widzianej od powierzchni zwierciadła większego do oddalenia od powierzchni zwierciadła mniejszego jest taki jak [stosunek] wielkości obrazów, które powstają w tych zwierciadłach, to chociaż różnią się swoją [wielkością] zależnie do stosunku średnic zwierciadeł, jednak jest możliwe, że w zwierciadle większym, bardziej oddalonym od rzeczy widzianej i w zwierciadle mniejszym, bliżej położonym tej samej rzeczy widzianej, zobaczymy obraz o tej samej wielkości tej samej rzeczy, która przy innej sposobności w zwierciadle większym ukazuje się większa, a w zwierciadle mniejszym – mniejsza, jak to wynika z poprzednich wywodów. I to jest godne podkreślenia.

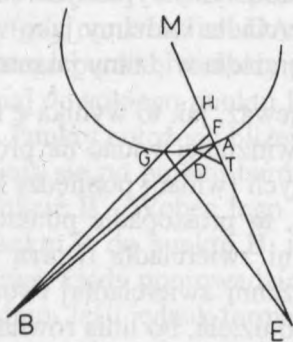
42. W zwierciadle wypukłym kulistym prawa strona rzeczy widzianej ukazuje się jako lewa, a lewa strona jako prawa (Euc. Catoptr. 20).

To twierdzenie nie wymaga innego dowodu niż ten, w którym omawia się podobne zjawisko na zwierciadłach płaskich. Dlatego w ten sam sposób należy dowodzić. I nie trzeba na to tracić czasu¹.

43. Kiedy [formy] wypukłości i wgłębienia¹ padają prostopadłe na zwierciadła kuliste wypukłe, to pojawiają się tam w postaci odwróconej (Euc. Catoptr. 8).



[Rys. 40]



[Rys. 40a]

Zwierciadło kuliste wypukłe oznaczmy jako ADG, a jego środek przez M. Na powierzchnię zwierciadła niech pada wypukłość, którą oznaczmy jako EA, której punktem wyższym niech będzie punkt E.

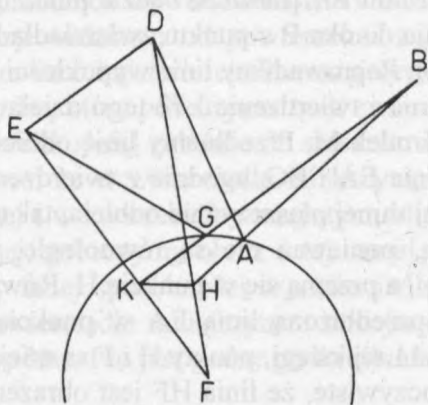
Środkiem oka niech będzie punkt B [rys. 40]. Niech [forma] punktu A odbija się od punktu zwierciadła i niech to będzie punkt A². Linią odbicia niech będzie linia AB. Również forma punktu wysokości E niech się odbija od punktu zwierciadła G. Linią odbicia niech będzie linia GB, a [forma] innego punktu linii EA [niech to będzie punkt T], niższego od punktu E, niech się odbija do oka B z punktu zwierciadła D, a linią odbicia niech będzie linia DB. Poprowadźmy linię wypukłości EA poza punkt A. Na podstawie założenia i twierdzenia I,72 tego dzieła jest oczywiste, że przejdzie ona przez środek M. Przedłużmy linię odbicia BG do wnętrza zwierciadła. I jak linie EA i BG, zgodnie z twierdzeniem V,27 tego dzieła, znajdują się na tej samej płaszczyźnie odbicia, tak też jest oczywiste, że one się przetną, ponieważ nie są równoległe, jak to wynika z twierdzenia 9 tej książki, a przetną się w punkcie H. Również linia odbicia BD przetnie się z przedłużoną linią EA w punkcie F. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, punkty H i F są miejscami obrazów punktów E i T, to jest oczywiste, że linia HF jest obrazem linii ET. Podobnie można dowodzić dla innych punktów linii EA. Obrazem linii EA będzie linia AH; wypukłość więc będzie się wydawała odwrócona, bo, co jest najwyżej, widzimy najniżej, i odwrotnie. Wynika bowiem z twierdzenia 23 tej książki, że, gdy na jednej prostopadłej padania zostaną oznaczone dwa punkty, to miejsce obrazu punktu A, bliższego środka zwierciadła, będzie bardziej oddalone od środka zwierciadła, a punktu bardziej oddalonego, bliżej środka zwierciadła. Z tego powodu obraz punktu T, który jest punktem F, będzie widoczny jako bardziej oddalony od środka M zwierciadła niż obraz punktu E, który jest punktem H. Pierwsze założenie jest oczywiste.

W ten sposób można przeprowadzić dowód w stosunku do wgłębienia [rys. 40a]³: najniższy punkt odbija się do punktu najwyższego obrazu i odwrotnie. Również punkty środkowe rozkładają się pośrodku odpowiednio w odwrotnej kolejności. A to jest przedmiotem twierdzenia.

44. Obrazy [form] ukośnych wielkości¹, odbitych od wypukłych zwierciadeł, pokazują się [z zachowaniem] swego właściwego układu (Euc. Catoptr. 10).

Weźmy wielkość DE, ukośnie padającą na zwierciadło kuliste wypukłe, które oznaczmy jako AG [rys. 41]². Jego środek niech będzie w punkcie F. Punkt D niech będzie punktem wyżej położonym nad powierzchnią danego zwierciadła niż punkt E. Niech środek oka będzie w punkcie B. [Forma] punktu D niech się odbije do oka B z punktu A zwierciadła, a punktu E z punktu G. Z punktu D poprowadźmy prostopadłą do powierzchni zwierciadła, która to linia, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, musi przejść przez środek zwierciadła, który jest

w punkcie F; a jest to linia DF. Podobnie poprowadźmy prostopadłą EF. Poprowadźmy linie odbicia BA i BG i przedłużmy je do [wnętrza] zwierciadła. Linia BA niech się przetnie z linią EF w punkcie K. Poprowadźmy linię HK, które, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, będzie obra-



[Rys. 41]

zem linii DE. Linia HK jest jednak położona ukośnie w stosunku do oka B, podobnie jak linia DE w stosunku do zwierciadła. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 23 tej księgi, punkt K będąc obrazem punktu E, znajdując się bliżej środka zwierciadła, jest bardziej oddalony od środka zwierciadła F niż punkt H, który jest obrazem punktu D bardziej oddalonego od środka zwierciadła, to z tego wynika, że [miejsce obrazu] takiego punktu na prostopadłej DF, który jest tyle samo oddalony od punktu F co punkt E, jest bardziej oddalony od środka F niż miejsce obrazu punktu D, zgodnie z twierdzeniem 23 tej księgi. Punkt H zatem ukazuje się jako bardziej oddalony od wypukłej powierzchni zwierciadła, a punkt K jako bliżej położony tej samej powierzchni. W taki sam sposób również punkt D był bardziej oddalony od powierzchni zwierciadła, a punkt E był bliżej tej samej powierzchni. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ wielkości ukazują się ukośnie w takiej odległości, w jakiej są naprawdę, [zachowując] swoje własne położenie.

45. Gdy dwa punkty rzeczy widzianej są równo oddalone od środka zwierciadła kulistego wypukłego, a znajdują się w nierównej odległości od środka oka na tej samej płaszczyźnie bądź na różnych płaszczyznach, to obraz i koniec styczności punktu bardziej oddalonego od środka oka będą bardziej oddalone od środka zwierciadła niż obraz i koniec styczności punktu bliżej położonego; z tego wynika, że obrazy punktów, znajdujących się w równej odległości od środka zwier-

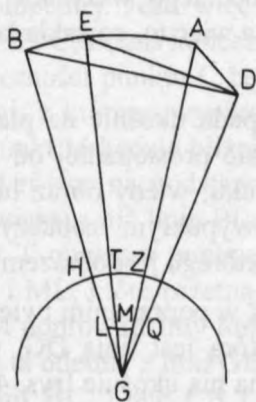
i do tego samego punktu przecięcia odbija się z punktu Q. Wobec tego forma punktu T odbija się z dwóch punktów powierzchni zwierciadła do jednego punktu; ale to jest niemożliwe i wbrew twierdzeniu 16 tej książki. Wynika zatem, że forma punktu T odbija się do punktu H z jakiegoś punktu na łuku QA. Niech to będzie punkt M. Z punktu M poprowadźmy, jak podano w EE III, 17, linię styczną do koła i przedłużmy ją aż do prostopadłej GT; niech to będzie linia MN. Punkt N będzie końcem styczności punktu T względem punktu H. Z punktu Q poprowadźmy linię styczną do koła, która przedłużona do prostopadłej TG, niech będzie linia QO. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I, 60 tego dzieła, musi leżeć pod linią NM. Poprowadźmy linię ZQ tak, aż dojdzie do prostopadłej GT w punkcie P (pada w ten sposób, zgodnie z twierdzeniem 9 tej książki); jak wynika z twierdzenia 11 tej książki, punkt P będzie miejscem obrazu formy punktu T. Zgodnie z twierdzeniem 12 tej książki, stosunek linii GT do PG będzie taki jak linii TO do OP, a zatem, zgodnie z EE V, 16, wymiennie stosunek linii GT do TO będzie taki jak linii GP do PO. Zgodnie z EE V, 8 większy jest stosunek linii GT do TN niż do linii TO. Skoro linia TN jest mniejsza niż linia TO, jak wynika z poprzednich rozważań, to większy będzie stosunek linii GT do TN niż linii GP do PO, a zgodnie z EE V, 8, stosunek linii GP do PD jest większy niż do linii PN. Wobec tego o wiele większy jest stosunek TG do TN niż GP do PN, ponieważ linia PO jest mniejsza od linii PN. Podzielmy zatem, jak podano w twierdzeniu I, 119 tego dzieła, linię GN w punkcie L w taki sposób, aby stosunek linii TG do TN był taki jak linii GL do LN; zgodnie z EE V, 8, linia GL będzie większa niż linia GP – ani równa, ani mniejsza, a zgodnie z EE V, 16, stosunek linii TG do GL będzie taki jak linii TN do LN. Odwracając zatem twierdzenie 12 tej książki, punkt L będzie miejscem obrazu punktu H.

Linie HG, EG, ZG niech będą sobie równe: linia GF niech będzie równa GP, a GS równa linii GO. Skoro zatem kąt EGD jest równy kątowi TGZ, to, zgodnie z 1 założeniem książki I tego dzieła, oddalenie punktu D od punktu E będzie takie jak oddalenie punktu Z od punktu T. Ponieważ punkty D i T znajdują się w tej samej odległości od środka zwierciadła, który jest w punkcie G, to linie DG i TG będą równe. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 23 tej książki, obraz formy punktu D w stosunku do oka E jest tak umieszczony na prostopadłej GD, jak obraz punktu T w stosunku do punktu Z jest umieszczony na prostopadłej GT. Miejsce obrazu formy punktu D będzie więc w punkcie F, tak jak miejsce obrazu formy punktu T jest w punkcie P, gdy linie GF i GP są równe. Podobnie koniec styczności punktu D względem punktu E będzie miał tę samą wysokość, jaką ma koniec styczności punktu T względem punktu Z, a zatem, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, koniec styczności punktu D

będzie w punkcie S^5 . Ponieważ jednak kąt EGT jest równy kątowi TGH, a linia HG równa jest linii EG, to na podstawie równości kątów, zgodnie z EE VI,33, będzie też równość łuków leżących pomiędzy prostą TG oraz liniami HG i EG. Zgodnie z wcześniejszymi wywodami, punkt L będzie więc miejscem obrazu punktu T względem punktu E, podobnie jak to jest względem punktu H, a punkt N będzie końcem stycznosci względem punktu E, podobnie jak jest względem punktu H. Obraz punktu bardziej oddalonego od środka oka E jest więc bardziej oddalony od środka zwierciadła niż obraz punktu bliższego [środku oka], a koniec stycznosci punktu bardziej oddalonego jest bardziej oddalony od tego samego środka niż koniec stycznosci punktu bliższego. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Z tego wynika, że, jeśli punkty widziane w zwierciadle kulistym wypukłym są równo oddalone od środka zwierciadła oraz od środka oka, to również ich obrazy będą równo oddalone od środka zwierciadła. Nie ma bowiem nigdy, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, żadnej różnicy w położeniach obrazów, kiedy końce stycznosci znajdują się w równej odległości od środka zwierciadła, ponieważ odległość obrazów od środka zwierciadła, który jest oznaczony jako punkt G, jest zależna od [położenia] końców stycznosci. Wynika więc to, co zakładano.

46. Gdy średnica widzenia jest prostopadła do płaszczyzny padania¹, wtedy obraz łuku koncentrycznego ze zwierciadłem kulistym wypukłym zobaczymy jako zakrzywiony, ale zawsze będzie on równoległy do łuku, którego jest obrazem (Alh. VI,11).



[Rys. 43]

Umieścmy łuk AB naprzeciw zwierciadła kulistego wypukłego. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła niech będzie koło HTZ [rys. 43]². Środkiem [krzywizny] łuku AB niech

będzie punkt G i tak samo niech będzie on środkiem zwierciadła, ponieważ, zgodnie z założeniem, widziany łuk i zwierciadło są koncentryczne. Środek oka niech będzie w punkcie D. Poprowadźmy linie DG, AG, BG. Obierzmy w sposób dowolny punkt E na łuku AB. Poprowadźmy linię EG. W ten sposób powierzchnia AGB będzie płaszczyzną padania, na której znajdzie się linia EG, a linia DG jest średnicą widzenia, która, zgodnie z założeniem, jest prostopadła do płaszczyzny AGB. Zgodnie z definicją linii prostopadłej do powierzchni, kąty DGA, DGB, i DGE będą proste i wszystkie one będą równe; również boki są równe bokom, ponieważ bok DG jest równy sobie samemu, a pozostałe boki są równe, zgodnie z definicją koła, a zatem, zgodnie z EE I,4, podstawy tych trójkątów są równe. Wszystkie punkty łuku AB znajdują się więc w tej samej odległości od środka oka; dlatego obrazy wszystkich tych punktów będą w tej samej odległości od środka zwierciadła, zgodnie z wnioskiem z poprzedniego twierdzenia. Niech QML będzie obrazem łuku AEB: linia GQ będzie więc równa linii GM i GL. Dlatego, zgodnie z EE III,9, linia QML będzie łukiem koła, którego środkiem jest punkt G. Łuk będzie więc wypukły w stosunku do środka G, a nie względem powierzchni wypukłej zwierciadła albo miejsca odbicia³. Ponieważ zakrzywienie łuku AB jest odpowiednie względem wypukłej powierzchni zwierciadła, tzn. są one koncentryczne na podstawie założenia, wynika więc, że ten sam łuk jest koncentryczny ze swoim obrazem. Z twierdzenia I,73 tego dzieła wynika zatem, że obraz jest równoległy do widzianego łuku, ponieważ zawsze znajduje się na płaszczyźnie padania, bo zawsze obraz dowolnego punktu znajduje się na prostopadłej swojego padania, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki. Wobec tego wszystkie te prostopadłe leżą na płaszczyźnie padania. Wynika więc to, co zakładano.

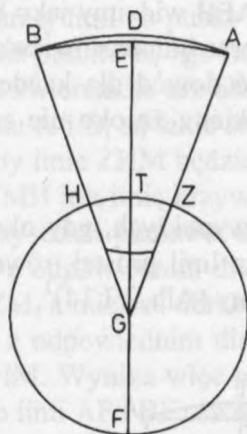
47. Gdy średnica widzenia pada ukośnie na płaszczyznę padania i nie będzie można poprowadzić prostopadłej od oka, która padałaby na jakiś punkt widzianego łuku, wtedy obraz łuku koncentrycznego ze zwierciadłem kulistym wypukłym zobaczymy jako zakrzywiony i nierównoległy do łuku, którego jest obrazem (Alh. VI,12).

Przyjmijmy układ taki jak w poprzednim twierdzeniu z wyjątkiem tego, że średnica widzenia, którą jest linia DG, nie jest prostopadła do płaszczyzny ABG, ale pada na nią ukośnie [rys. 44]¹. Twierdząc, że obraz łuku AB widzimy jako krzywy. Poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, prostopadłą z punktu D do płaszczyzny [padania]. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia I,21 tego dzieła, ta prostopadła jest mniejsza od wszystkich linii poprowadzonych z punktu D do tej płaszczyzny [ABG], a kąt prosty, utworzony przez tę prostopadłą, zwrócony w stronę punktu G², będzie,

połączone pod kątem podziela się proporcjonalnie, to z punktów przecięcia poprowadźmy linie przecinające się, a są to linie CO i MO. Jest oczywiste, że linia QT przetnie się z linią CB i ML, a ich przecięcie nastąpi w punkcie O. Końcem zaś styczności punktu E będzie punkt N. Ponieważ punkt N, zgodnie z twierdzeniem 45 tej książki, leży poniżej punktu M⁵, linia EN, jak poprzednio, będzie większa od linii CM. A zatem po przeprowadzeniu linii EC i NM jest oczywiste, jak poprzednio, że one się przetną. Punktem przecięcia niech będzie punkt P. Poprowadźmy linię QP i przedłużmy ją tak, aby przecięła linię EG w punkcie F. Poprowadźmy linię OQ aż do linii EG, którą niech przetnie w punkcie K. Z tego również wynika, że punkt N jest niżej położony niż punkt M, ponieważ punkt K będzie leżał wyżej⁶ od punktu F, a linia GK będzie większa niż linia GF. Z twierdzenia I,123 tego dzieła wynika natomiast, że stosunek linii GE do EN jest taki jak linii GF do FN, a końcem styczności jest punkt N. Miejscem obrazu, zgodnie z twierdzeniem 12 tej książki, będzie więc punkt F. Linia FQT będzie zatem obrazem łuku koła ECB i będzie linią krzywą, nie prostą, podobną, zgodnie z EE IV,5, do łuku opisanego na tych trzech punktach. Łuk ten nie będzie jednak równoległy ani do łuku zwierciadła, ani do łuku widzianego, ponieważ, jak to jest oczywiste, linie TB, QC i FE są nierówne dlatego, że i pozostałe linie GT, GQ i GF są nierówne. W podobny sposób również można dowodzić, jeśli prostopadła, poprowadzona z punktu D, będzie leżała z innej strony łuku AB, poniżej niego, bo wtedy jest taki sam dowód. Wynika więc to, co początkowo zakładano.

Jeśli natomiast prostopadła, poprowadzona z punktu D do płaszczyzny padania, znajdzie się w środku łuku AB, to linie poprowadzone z różnych stron od punktu D do łuku, znajdujące się w równej odległości od prostopadłej, będą równe, tworząc równe kąty z wierzchołkami w punkcie G, a ich obrazy znajdą się w równej odległości od środka G. Podobnie jest także z końcami styczności. I tak obraz będzie równoległy do łuku AB i łuku zwierciadła, ponieważ obraz ukształtuje się ponad środkiem zwierciadła, który jest w punkcie G, i, zgodnie z twierdzeniem I,73 tego dzieła, będzie z nim koncentryczny. W powyżej opisany sposób można również przeprowadzić dowód dla obydwu części łuku, na które został on podzielony prostopadłą, ponieważ jego obrazem jest linia krzywa, która w sposób powyżej przedstawiony jest równoległa do łuku widzianego z powodu równości linii, poprowadzonych od środka zwierciadła i łuku widzianego do miejsc obrazów. A to jest przedmiotem twierdzenia: bo w odniesieniu do obrazu łuku AE można dowieść tego samego, zgodnie z powyżej przeprowadzonymi wywodami.

48. Gdy oko znajduje się poza płaszczyzną padania, wtedy obraz łuku ekscentrycznego z kołem, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, widzimy jako łuk o większej krzywiźnie niż obraz łuku równoległego do tego samego koła zwierciadła, jeśli punkt środkowy tego łuku znajduje się bliżej środka zwierciadła [niż punkty skrajne] (Alh. VI,3).

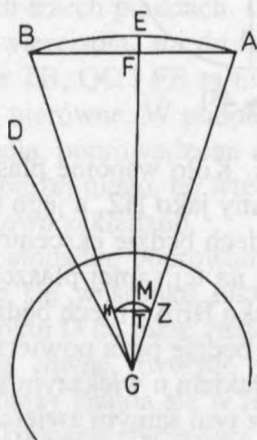


[Rys. 45]

Weźmy widziany łuk BEA. Koło wspólne płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła¹ oznaczmy jako HZ, a jego środkiem niech będzie punkt G [rys. 45]. Łuk BEA niech będzie ekscentryczny do łuku HZ. Te łuki niech się jednak znajdują na tej samej płaszczyźnie. Punkt E niech będzie punktem środkowym łuku BEA i niech będzie bliższy środkowi G [niż punkty B i A]. Oko niech będzie poza powierzchnią padania. Twierdząc, że obraz łuku BA będzie łukiem o większym zakrzywieniu niż obraz innego łuku koncentrycznego z tym samym zwierciadłem. Poprowadźmy linię od środka zwierciadła, który jest w punkcie G, do środka łuku BEA, który jest w punkcie E²; ta poprowadzona linia to linia GE. Jest oczywiste na podstawie EE III,7, że ona jest krótsza od wszystkich linii, poprowadzonych od środka zwierciadła G do łuku AEB. Ponieważ łuk BE jest równy łukowi EA, jest oczywiste, na mocy EE III,7, że linia GA jest równa linii GB. Po przeprowadzeniu linii GA i GB zakreślmy łuk położony w odległości tych linii od środka G³. Jest oczywiste na podstawie przeprowadzonych wywodów, że opisany łuk w swoim punkcie środkowym jest bardziej oddalony od łuku HZ aniżeli łuk BEA. Zakreślony łuk oznaczmy jako BDA. Poprowadźmy linię GD do punktu środkowego tego łuku, która będzie równa linii GB; łuk BDA znajduje się więc ponad łukiem BEA. Z poprzednich twierdzeń⁴ wynika, że obraz łuku BDA

jest łukiem, obojętnie w jakiej pozycji oko znajduje się względem powierzchni odbicia. Punkty wspólne dla tych dwóch łuków, tzn. punkty A i B, będą miały swoje obrazy umieszczone w taki sposób jak poprzednio, ale skoro punkt D jest bardziej oddalony od środka G niż punkt E, to, zgodnie z twierdzeniem 23 tej książki, jego obraz będzie bliżej środka zwierciadła niż obraz punktu E. W ten sposób obraz dowolnego punktu łuku BDA jest bliżej środka niż obraz odpowiadającego mu punktu na łuku BEA. Dlatego obraz łuku AEB widzimy jako bardziej zakrzywiony niż obraz łuku ADB. A to jest przedmiotem twierdzenia. Zgodnie z tym sposobem można przeprowadzić dowód dla każdego innego położenia łuków i zwierciadeł pod warunkiem, że oko nie znajduje się na płaszczyźnie padania ale poza nią.

49. W zwierciadłach kulistych wypukłych, gdy oko nie znajduje się na płaszczyźnie [padania], obraz linii prostej, równoległej do zwierciadła, widzimy jako zakrzywiony (Alh. VI,14)¹.

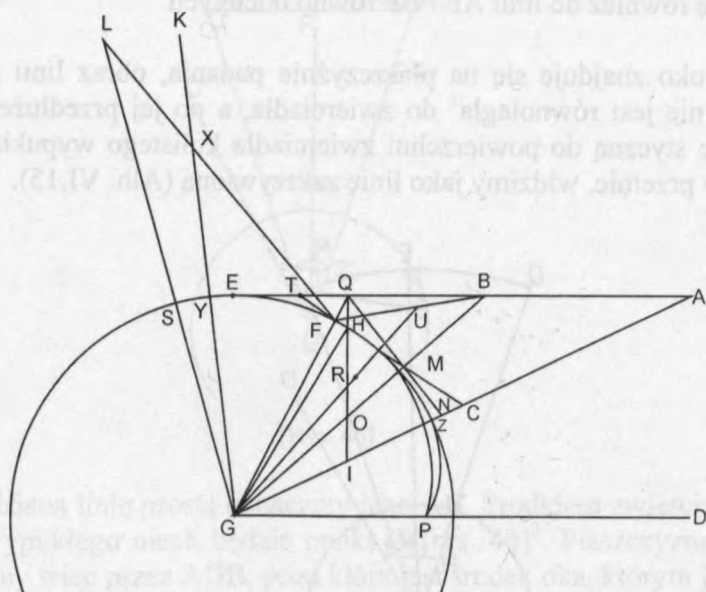


[Rys. 46]

Widzianą linię prostą oznaczmy jako AB. Środkiem zwierciadła kulistego wypukłego niech będzie punkt G [rys. 46]². Płaszczyznę padania oznaczmy więc przez AGB, poza którą jest środek oka, którym jest punkt D. Niech linia AB będzie równoległa do zwierciadła, tzn. do linii stycznej do łuku koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła) w punkcie środkowym tego łuku. Twierdzę, że obraz linii prostej AB zobaczymy jako zakrzywiony. Poprowadźmy linie proste: DG od środka oka do środka zwierciadła oraz GB i GA od środka zwierciadła do krańców linii AB. Jest oczywiste, że te linie AG i BG, skoro linia AB jest równoległa³ do zwierciadła, są równe. Zakreśl-

go styczna, ani go nie przecina, ale tylko pada na nie ukośnie [rys. 47]². Jest więc oczywiste, że poprowadzone linie GB i GA są nierówne. Niech więc linia AG będzie większa od linii GB. Zakreślmy koło ze środkiem w punkcie G o długości [półśrednicy równej] linii większej AG, które oznaczmy jako AEQ. Poprowadźmy linię GB poza punkt B tak, aby padła ona na to [zakreślone] koło w punkcie E. Z twierdzenia 46 albo 47 tej księgi wynika, że obraz łuku AE jest zakrzywiony: punkt Z jest obrazem punktu A³, zaś punkt M jest obrazem punktu E. Linia ZM będzie obrazem łuku AE. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 23 tej księgi, obraz punktu B jest bardziej oddalony od środka [zwierciadła] niż obraz punktu E, jest oczywiste, że obraz linii AB będzie zakrzywiony; a to także łatwo można wykazać w stosunku do punktów leżących pośrodku łuku AE i linii AB. Wynika więc to, co zakładano: ten sam dowód, jak poprzednio, stosuje się zawsze do linii AB odciętej z dowolnej jej strony.

51. Gdy oko nie znajduje się na płaszczyźnie padania, obraz linii prostej, która po przedłużeniu będzie styczna do zwierciadła kulistego wypukłego, zawsze będziemy widzieli jako zakrzywioną (Alh. VI,16).



[Rys. 48]

Układ niech będzie taki jak poprzednio, jednak linia AB po jej przedłużeniu niech będzie styczna do zwierciadła w punkcie E [rys. 48]¹. Poprowadźmy ze środka zwierciadła, który jest w punkcie G, linie GB i GA. Niech będzie tak, aby płaszczyzna padania, którą oznaczmy jako ABG, przecięła zwierciadło na łuku EHZ. Niech D będzie środkiem oka.

Niech wspólnym przecięciem powierzchni odbicia, na której znajdują się linie GA i GD, oraz powierzchni zwierciadła będzie łuk ZP, natomiast wspólnym przecięciem powierzchni odbicia, na której są linie GH i GD, oraz powierzchni zwierciadła niech będzie łuk HP. Oczywiście jest więc na podstawie tego, co zostało dowiedzione w twierdzeniu 16 tej księgi, że forma punktu B odbija się do oka D od jakiegoś punktu na łuku HP. Jeśli więc z tego punktu poprowadzimy linię styczną do łuku HP, to przetnie ona linię BG, a końcem styczności będzie punkt tego przecięcia. Niech to będzie punkt M. Jest także oczywiste, że jeśli przez punkt M poprowadzimy styczną do łuku EH, to ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,60 tego dzieła, będzie leżała poniżej² punktu E, ponieważ przedłużona linia AB jest styczna do koła w punkcie E, a punkt B znajduje się powyżej punktu M. Wobec tego styczna, poprowadzona przez punkt M, niech padnie w punkt F, i ta styczna po jej dalszym przedłużeniu w kierunku na wprost, zgodnie z twierdzeniem I,60 tego dzieła, przetnie linię AE. Niech więc przetnie ją w punkcie T. Z drugiej strony, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, przetnie linię GA, ponieważ wszystkie te linie znajdują się na jednej płaszczyźnie. Niech linię [GA] przetnie w punkcie C. Na końcu linii BG w punkcie G wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi BGD i niech to będzie kąt BGS, a punkt S znajdzie się na obwodzie koła. Przedłużmy linię GS tak, aby była równa linii GD; niech to będzie linia GL. A zatem, zgodnie z EE III,26, łuk SH będzie równy łukowi HP. Wobec tego, jak forma punktu B odbija się do oka w punkcie D od jakiegoś punktu na łuku HP, tak samo odbija się do punktu L od jakiegoś punktu na łuku HS. Odbicie z punktu F będzie takie, jakie zachodzi na łuku HP z punktu, przez który jest poprowadzona styczna przechodząca przez punkt M, dlatego że te łuki muszą być równe, jak to wynika z twierdzenia I,58 tego dzieła. Ponieważ przez punkt M przechodzi jedna i druga z tych linii stycznych, jest jasne, że one obydwie, zgodnie z twierdzeniem I,58 tego dzieła, są równe. Poprowadźmy więc linię BF i LF. Podobnie odbija się, również forma punktu A, zgodnie z twierdzeniem 16 tej księgi, do oka D od jakiegoś punktu na łuku ZP. Zgodnie z EE III,28 i I,20, w trójkącie HZP o zakrzywionych liniach³ dwa łuki HZ i HP są większe od trzeciego łuku, ale łuk HP jest równy łukowi HS; a zatem łuk ZP jest mniejszy od łuku ZS. Przytnijmy więc łuk ZS tak, aby miał długość łuku ZP (to można zrobić metodą podaną w EE III,34); niech to odcięcie nastąpi w punkcie Y. Poprowadźmy linię GY; ta linia równa wielkością linii GS, po przedłużeniu musi przeciąć linię FL dlatego, że linia GD jest równa linii GL. Ponieważ ta linia dzieli kąt LGZ, przetnie ona również, zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, jego podstawę. Niech więc ją przetnie w punkcie X, a linia GYK niech będzie równa linii GD. Jest więc oczywiste, że jak forma punktu A odbija się do

oka D od jakiegoś punktu na łuku ZP, podobnie forma tego samego punktu A odbija się do punktu K od jakiegoś punktu na łuku ZY. Jednak [forma punktu] A nie odbija się do punktu K, chyba że od jakiegoś punktu, który jest poza punktem F od strony punktu Z. Bo jeśli powiemy, że od punktu F albo od innego punktu na łuku FY odbija się forma punktu A do punktu K, wtedy stanie się to, że to odbicie nastąpi od punktu F. Jest więc oczywiste, że wówczas linia, poprowadzona z punktu A do punktu odbicia F, przetnie w jakimś punkcie linię BF, ponieważ linia styczna do koła w punkcie E przechodzi przez punkt B. Do tego więc punktu wspólnego przecięcia tych linii AF i BF odbija się [forma] punkt K i do tego samego punktu odbija się [forma] punkt L od punktu F⁴. W ten sposób, w przypadku tych zwierciadeł [formy] dwóch punktów odbijałyby się do tego samego punktu od tego samego punktu F i po tej samej stronie średnicy widzenia, co jest sprzeczne z twierdzeniem 16 tej książki. Jednak nie odbiją się również od innego punktu na łuku FY, ponieważ wtedy, jak poprzednio, linia, poprowadzona z punktu A do punktu odbicia, przetnie linię BF; punktem przecięcia niech będzie punkt U. Do tego więc punktu przecięcia U odbija się forma punktu K i forma punktu L i w ten sposób [formy] dwóch punktów znajdujących się w tej samej odległości od środka przyjętego zwierciadła, którym jest punkt G (ponieważ obydwie linie LG i KG są równe linii GD, zgodnie z założeniem), odbiją się do tego samego środka oka z tej samej strony średnicy widzenia, którą od tego punktu przecięcia linii BF, którym jest punkt U, można poprowadzić do punktu G, środka zwierciadła. Zgodnie z twierdzeniem 18 tej książki, kąt LGU będzie więc równy kątowi KGU, tzn. całość swojej części; a to jest niemożliwe. Wobec tego forma punktu A nie odbija się do punktu K od jakiegoś punktu na łuku FY. Wynika więc, że [forma] punktu A nie odbija się do punktu K od jakiegoś punktu na łuku ZF, z wyjątkiem punktu F. Jeśli więc od tego punktu poprowadzimy linię styczną do koła, to ta linia będzie musiała, zgodnie z twierdzeniem I,60 tego dzieła, przeciąć linię AZ i będzie przecinała pomiędzy punktami Z i C, dlatego że punkt F względem średnicy GA jest dalej⁵ położony od dowolnego punktu na łuku ZF. W ten sposób linia styczna w punkcie F, a jest to linia FC, jest wyżej położona niż inne linie styczne, poprowadzone z punktów na łuku ZF. Niech więc któraś z tych innych linii stycznych padnie w punkt N. Poprowadźmy linię MN. Ta linia niech przejdzie przez wierzchołek trójkąta BMT, a przedłużona niech podzieli, zgodnie z EE I,15, kąt BMT, ponieważ podzieli ona również kąt GMC, jak wynika z powyżej przeprowadzonych wywodów. Skoro zatem podzieli kąt BMT, musi również, zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, przeciąć podstawę BT. Niech ją więc przetnie w punkcie Q. Poprowadźmy linię GQ. Niech I będzie obrazem punktu A, O obrazem punktu B,

Niech pozostanie poprzedni układ; niech linia AB przetnie koło EHZ (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła) w punkcie E [rys. 49]¹. Punktem odbicia formy punktu B do punktu L niech będzie punkt F. Niech punkt M będzie końcem styczności linii stycznej w punkcie F do koła EHZ, poprowadzonej do linii BG. I tak [forma] punktu B odbije się do punktu D z jakiegoś punktu na łuku HP, podobnie jak to zostało przedstawione w poprzednim twierdzeniu. Również łuk, zawarty między tym punktem odbicia i punktem H, jest równy łukowi HE albo większy od niego, albo mniejszy.

Jeśli jest równy, [to jest równy] dlatego, że zgodnie z wywodami z poprzedniego twierdzenia, łuk ten jest równy łukowi HF, ponieważ linie styczne poprowadzone z punktu M wyznaczają równe łuki, zgodnie z twierdzeniem I,58² tego dzieła. Niech więc punkt Q będzie punktem tego koła, na który pada styczna poprowadzona z punktu M od strony punktu E. Linia AE przejdzie zatem przez punkt Q. W ten sposób linia MQ przetnie linię AE, przechodząc przez punkt E, ponieważ obydwa punkty E i Q leżą na obwodzie koła i są jednym punktem.

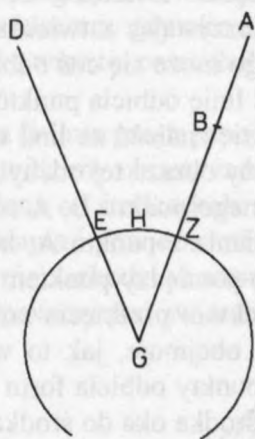
Jeżeli natomiast łuk ten będzie mniejszy od łuku HE, wtedy linia QM przetnie linię EA ponad³ punktem Q; niech przetnie tę linię w punkcie T w taki sposób, aby powstał trójkąt po przeprowadzeniu linii EQ.

Jeżeli zaś wspomniany łuk będzie większy od łuku HE, to linia MQ przetnie linię AE poniżej punktu Q. Cokolwiek z tego wyniknie, można powtórzyć dowód z poprzedniego twierdzenia i dokładnie w ten sam sposób dowieść, że obraz linii AB jest zakrzywiony. A to jest przedmiotem twierdzenia.

53. Obraz linii prostej, która po przedłużeniu przejdzie przez środek koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego), widzimy zawsze jako linię prostą, gdy środek oka znajduje się na tej samej [co i linia] płaszczyźnie bądź poza tą płaszczyzną, ale nie na samej tej linii (Alh. VI,18).

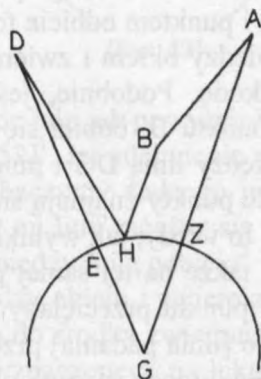
Przyjmijmy wszystko tak, jak w poprzednich twierdzeniach, z wyjątkiem tego, czego dotąd nie powiedzieliśmy o zachowaniu tych linii, gdy oko nie znajduje się na płaszczyźnie padania. Teraz właśnie przyjęliśmy, że oko jest na płaszczyźnie padania i znajduje się ono, jak poprzednio, w punkcie D [rys. 50]¹. Poprowadźmy linię GD. Linia AB po przedłużeniu niech się przetnie z kołem EHZ i niech przejdzie przez jego środek G. Jest więc oczywiste, że [wierzchołek] kąta utworzonego z tych linii AG i DG leży w środku zwierciadła G, a obraz linii AB zobaczymy jako jedną linię prostą. Bo obraz, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, dowolnego punktu tej linii AB, gdy ona sama znajduje się na prostopadłej swojego padania, pojawi się na samej linii AB, poprowadzonej do środka

G. Obraz całej tej linii prostej jest więc linią prostą, podobnie jak i sama linia AB. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 50]

54. Gdy środek oka [i linia prosta] znajdują się na tej samej płaszczyźnie padania, to obraz linii prostej odchylonej od środka koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego) w ten sposób, że odchylenie linii zachodzi w stronę przeciwną od oka¹ i linia dotyka powierzchni zwierciadła, widzimy jako obraz tylko jednego punktu (Alh. VI,19).



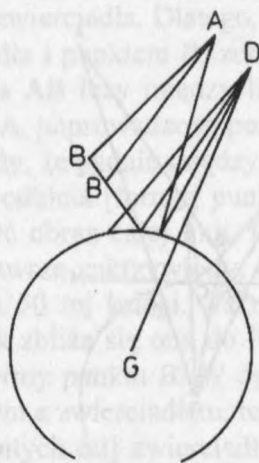
[Rys. 51]

Niech cały układ będzie taki jak we wcześniejszym twierdzeniu 51 tej księgi [rys. 51]². Niech linia AB będzie pochylona w stronę koła EHZ w taki sposób, żeby nie przechodziła przez jego środek. Niech oko D znajduje się na płaszczyźnie padania i odchylenie linii niech zachodzi w stro-

nę przeciwną do tej, w której jest oko, np. jeśli oko jest po prawej stronie, to punkt A niech się odchyła w lewą stronę bądź przeciwnie. Niech ta linia dotyka powierzchni zwierciadła. Twierdząc, że zobaczymy obraz tylko jednego punktu linii AB. Korzystając z twierdzenia 16 tej księgi, obierzmy na kole punkt, od którego może się coś odbić do oka; niech to będzie punkt H. Przyjmijmy jakąś linię odbicia punktów odchylonej linii AB, np. punktu B. Ta linia może się znaleźć na linii odbicia DH, ale jeżeli to się przydarzy, nie zobaczymy obrazu tej odchylonej linii, tzn. linii AB, z wyjątkiem obrazu tego jednego punktu B. A to jest oczywiste po przeprowadzeniu prostopadłej padania z punktu A, którą jest linia AG. Wtedy bowiem łuk znajdujący się pomiędzy punktem H, od którego odbija się forma punktu B, oraz punktem przecięcia koła EHZ przez prostopadłą AG (a to jest punkt Z) obejmuje, jak to wykazaliśmy w 50 twierdzeniu tej księgi, wszystkie punkty odbicia form punktów linii AB. Kiedy zatem przeprowadzimy od środka oka do środka zwierciadła linię, którą jest linia DG, przecinającą koło EHZ w punkcie E, to jeśli przylibyśmy na łuku koła, który oznaczmy jako EH, poniżej linii DH punkt, od którego odbijałaby się do oka [forma] jakiegoś punktu odchylonej linii AB, wtedy również [forma] tego punktu odbijałaby się od jakiegoś punktu wcześniej zaznaczonego łuku HZ. A ten punkt byłby końcem linii odbicia [padającej formy]. Gdyby linia odbicia [formy] tego punktu znalazła się powyżej linii odbicia formy punktu B, to [forma] tego punktu odchylonej linii odbiłaby się do tego samego oka z dwóch punktów łuku zwierciadła; a to jest niemożliwe i sprzeczne z twierdzeniem 16 tej księgi. Nie zachodzi zatem odbicie do oka od żadnego punktu łuku EH (znajdującego się pomiędzy linią DG i punktem odbicia formy punktu B) i nie jest to spowodowane tym, że między okiem i zwierciadłem znajduje się jakaś linia³ stanowiąca przeszkodę. Podobnie, jeśli [forma] jakiegoś punktu linii AB, z wyjątkiem punktu B, odbiła się do oka od jakiegoś punktu łuku EH, leżącego pomiędzy linią DG i punktem odbicia formy punktu B (ponieważ wszystkie te punkty znajdują się na tej samej płaszczyźnie padania co środek oka), to wtedy, jak wynika z EE XI,1, wszystkie linie odbicia znalazłyby się także na tej samej płaszczyźnie; wobec tego linia padania [formy] tego punktu przecięłaby linię padania formy punktu B. Forma punktu, którego [linia padania] przecina się⁴ z linią padania punktu B, odbiłaby się więc do tego samego oka D z dwóch punktów, tzn. z punktu H, który jest punktem odbicia formy punktu B, oraz od innego danego punktu; ale to wszystko jest niemożliwe i sprzeczne z twierdzeniem 16 tej księgi. Nie odbije się więc [forma] żadnego innego punktu linii AB (z wyjątkiem punktu B) do oka D od jakiegoś punktu łuku odkrytego⁵. Chociaż [forma] dowolnego punktu linii AB odbija się od jakiegoś punktu łuku HZ, który powyżej przyjęliśmy, to jednak tego

punktu nie zobaczymy, ponieważ znajduje się na linii odbicia, która zakryta jest przed okiem z powodu punktów znajdujących się wcześniej na linii materialnej⁶. W ten sposób linia przylegająca do linii odbicia formy punktu B nie jest widoczna, gdy oko ustawimy tak, jak to zostało powyżej przyjęte. Wynika więc to, co zakładano.

55. Gdy środek oka [i linia prosta] znajdują się na tej samej płaszczyźnie padania, to nie widzimy obrazu żadnego punktu tej linii prostej, jeżeli jest ona odchylona od środka koła (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego) tak, że odchylenie zachodzi w stronę oka i jest obojętne, czy linia ta jest styczną do powierzchni zwierciadła czy nie (Alh. VI,20).



[Rys. 52]

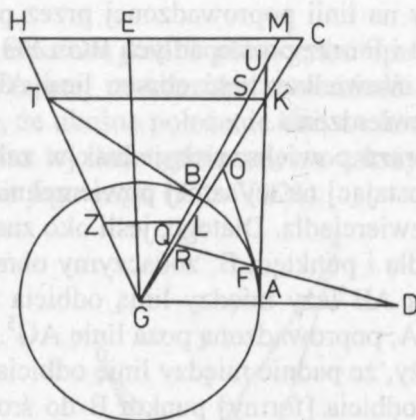
Niech układ będzie taki jak powyżej. Weźmy linię AB odchyloną tak, jak się zakłada [rys. 52]¹. Jej odchylenie niech zachodzi w stronę oka D². Twierdzę, że nie zobaczymy żadnego punktu tej linii. Przyjmijmy bowiem, że jakiś punkt tej linii mógłby się odbić od jakiegoś punktu łuku, znajdującego się pomiędzy linią odbicia³ (której nie zakrywa linia materialna⁴ leżąca pomiędzy okiem i zwierciadłem) oraz linią DG, poprowadzoną od środka oka do środka zwierciadła. Poprowadźmy linię od tego punktu do punktu wyznaczonego na łuku; ta linia przetnie linię odbicia, a punkt przecięcia odbije się do oka z dwóch punktów zwierciadła. A to jest niemożliwe.

Jeśli natomiast powiemy, że [forma] przyjętego punktu na linii AB odbije się od punktu łuku koła, które znajduje się pod linią AB, to będzie to również niemożliwe, ponieważ cały ten łuk jest zakryty przez linię położoną pomiędzy okiem i zwierciadłem, odcinającą wszystkie linie

podstawie twierdzenia V,20 tego dzieła, że forma punktu F odbija się do oka D w punkcie C, a miejsce obrazu punktu F będzie na linii FG. Podobnie forma punktu B, gdy nie ma żadnej przeszkody, odbije się do oka od jakiegoś punktu zwierciadła, a miejsce obrazu będzie na linii BG, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi. Ponieważ pomiędzy [zwierciadłem i okiem] znajduje się materialna przeszkoda³, którą jest linia FB, i inne punkty linii AB nie mogą odbijać się do oka, z wyjątkiem punktów linii BF, których obraz leży na linii poprowadzonej przez punkty przecięcia linii odbicia punktów B i F oraz prostopadłych BG i FG (a to jest drobna sprawa), jest jasne, że niewielka część obrazu linii AB jest widoczna. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Widoczna część obrazu powiększa się jednak w zależności od tego, na ile środek oka [pozostając] na tej samej powierzchni odchyła się bardziej⁴ do powierzchni zwierciadła. Dlatego, jeśli oko znajdzie się między powierzchnią zwierciadła i punktem B, zobaczymy obraz całej linii AB. Wtedy bowiem ta linia AB leży między linią odbicia formy punktu A i prostopadłą z punktu A, poprowadzoną poza linię AG⁵. Jeśli w taki sposób ta linia AB się ułoży, że padnie między linią odbicia DC i linią przechodzącą przez punkt odbicia [formy] punktu B do środka zwierciadła, będzie można zobaczyć obraz całej linii. Obraz całej linii AB bądź jej części będzie widać zawsze zakrzywiony, co można wykazać w sposób podany w twierdzeniu 50 tej księgi. Zakrzywienie obrazu tej linii się zmniejsza w miarę, jak zbliża się ona do linii, przechodzącej do środka przez punkt odbicia formy punktu B. W ogóle bowiem cokolwiek znajduje się pomiędzy okiem a zwierciadłem, to przeszkadza również dotrzeć formom punktów [odbitych od] zwierciadła do oka: i wtedy obrazu tej rzeczy nie zobaczymy na takich zwierciadłach. To, co tutaj przedstawiono, należy odnieść do linii dochodzących do oka na łuku koła, który jest widoczny dla oka, jak np. na łuku, który znajduje się pomiędzy dwoma stycznymi, poprowadzonymi od środka oka do zwierciadła, ponieważ zgodnie z twierdzeniem 5 tej księgi, tylko ten łuk znajduje się naprzeciw oka. Natomiast, gdyby któraś spośród linii, przecinających się ze zwierciadłem w części koła, niewidocznej dla oka, była równoległa do linii stycznej, to tej linii również nie zobaczymy. Podobnie, również linia granicząca z tą równoległą i leżąca pod tą równoległą, całkowicie będzie niewidoczna dla oka. Ale linię graniczącą z równoległą, która pada na nią z tamtej strony będzie można zobaczyć. Przeprowadzenie dowodów na podstawie przyjętych zasad pozostawiamy przedsiębiorczości przeprowadzających doświadczenie. Jednak obrazy linii prostych, widzianych w ten sposób, zawsze będą zakrzywione.

57. Gdy oko znajduje się na płaszczyźnie padania linii prostej, nie przecinającej się z powierzchnią zwierciadła kulistego wypukłego, lecz będącej linią równoległą do linii, leżącej pomiędzy środkiem zwierciadła i środkiem oka, bądź przecinającej się z linią znajdującą się poza zwierciadłem do strony oka, obraz zobaczymy jako zakrzywiony (Alh. VI,22).

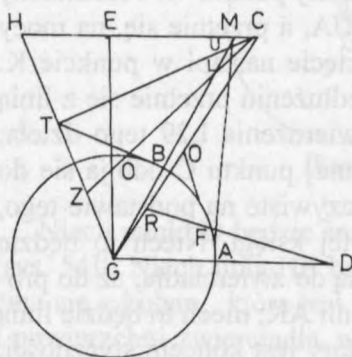


[Rys. 54]

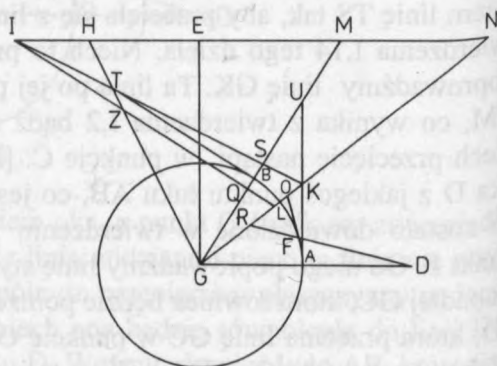
Niech punkt D będzie środkiem oka, a punkt G środkiem zwierciadła [rys. 54]¹. Niech linia HE będzie linią widzianą i niech ta linia nie przecina się z kołem, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania i powierzchni zwierciadła, ale niech ona będzie równoległa do linii DG bądź przetnie ją do strony punktu D. Weźmy również koło AB, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny padania bądź odbicia, na której znajdują się linie DG i HE, oraz powierzchni danego zwierciadła. Poprowadzimy linię HG, na której punkt Z niech będzie obrazem punktu H. Punktem koła, od którego odbija się forma punktu H do oka D, niech będzie punkt B. Poprowadźmy przez punkt B linię styczną do koła, która niech przetnie linię HG w punkcie T; punkt T będzie więc końcem styczności. Poprowadźmy także linię GB, która po jej przedłużeniu musi się przeciąć z linią HE. A jeśli linia HE będzie równoległa do DG, to ta ostatnia przetnie się również z GB, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, jeśliby natomiast DG przecięła się z linią HE, to o wiele bardziej GB przetnie się z tą samą linią [HE], zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła. To przecięcie nastąpi na linii HE albo poza tą linią; jeśli poza nią, to [niech] przetnie się w punkcie M. Poprowadźmy również linię MG, która będzie prostopadłą padania [formy] punktu M, a obrazem punktu M niech będzie punkt Q. Wyobraźmy sobie również linię przeprowadzoną przez punkt odbicia formy punktu M do linii GM. Końcem styczności

niech będzie punkt S^2 . Poprowadźmy linię ZQ, łączącą miejsca obrazów. Podobnie poprowadźmy linię TS, łączącą końce styczności. Niech będzie tak, aby linia DG przecięła koło AB w punkcie A. Poprowadźmy przez punkt A linię styczną do koła, którą jest linia AU. Jest również rzeczą oczywistą, że łuk AB jest mniejszy od czwartej części koła, ponieważ zgodnie z twierdzeniem 3 tej księgi, oko D widzi mniej niż połowę koła. Dlatego, zgodnie z EE VI,33, kąt AGB jest ostry, a kąt UAG jest prosty. Zatem, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linia AU przetnie się z linią GB; niech więc ją przetnie w punkcie U. Twierdząc, że punkt U leży ponad³ punktem S. Skoro, zgodnie z twierdzeniem 16 tej księgi, forma punktu M odbija się od jakiegoś punktu łuku AB, a punkt A jest niżej położony od punktu odbicia formy punktu M, to koniec styczności linii, stycznej do koła, poprowadzonej przez punkt A, będzie wyżej położony niż koniec styczności tego punktu, co wynika z twierdzenia I,60 tego dzieła; w rezultacie punkt S będzie poniżej punktu U. Przedłużmy zatem linię TS tak, aby przecięła się z linią UA, a przetnie się, na mocy twierdzenia I,14 tego dzieła. Niech to przecięcie nastąpi w punkcie K. Poprowadźmy linię GK. Ta linia po jej przedłużeniu przetnie się z linią HM, co wynika z twierdzenia I,2 bądź z twierdzenia I,29 tego dzieła; niech przecięcie nastąpi w punkcie C. [Forma] punktu C odbija się do oka D z jakiegoś punktu łuku AB, co jest oczywiste na podstawie tego, co zostało dowiedzione w twierdzeniu 16 tej księgi. Niech to będzie punkt F. Od niego poprowadźmy linię styczną do zwierciadła, aż do prostopadłej GC, która również będzie poniżej linii AK; niech to będzie linia FO, która przecina linię GC w punkcie O, który jest końcem styczności. Wobec tego punkt O, jak wynika z twierdzenia I,60 tego dzieła, będzie poniżej punktu K, bo punkty K i O są końcami styczności. Poprowadźmy również linię DF tak, aby padła na prostopadłą GC, i padnie ona zgodnie z twierdzeniem 9 tej księgi. Niech więc będzie tak, aby padła ona w punkcie R. Poprowadźmy linię ZQ aż do linii GC; niech ona padnie w punkt L. Twierdząc, że punkt L jest wyżej niż punkt R. Linie HC, TK i ZL są bowiem równoległe albo się przecinają. Przyjmijmy najpierw, że są one równoległe: gdy więc te linie równoległe przecinają linię CG w trzech punktach: C, K, L i przecinają linię MG oraz HG, i skoro, zgodnie z twierdzeniem 12 tej księgi oraz EE V,16, stosunek linii HG do HT jest taki jak linii GZ do ZT, i podobnie stosunek linii MG do MS jest taki jak linii GQ do QS, to na mocy twierdzenia I,122 tego dzieła, będzie taki sam stosunek linii GC do CK jaki jest linii GL do LK. Jednak z twierdzenia 11 tej księgi wynika, że R jest obrazem punktu C, bo linia DF jest linią odbicia, przecinającą się z prostopadłą CG w punkcie R, a punkt O jest końcem styczności. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 12 tej księgi i EE V,16, stosunek linii GC do CO jest taki jak linii GR do

RO, ale, zgodnie z EE V,8, stosunek linii GC do CK jest większy niż linii GC do CO. W ten sposób stosunek linii GL do LK będzie większy niż linii GR do RO. A zatem, przeciwnie, po odwróceniu [stosunku], zgodnie z twierdzeniem I,6 tego dzieła, stosunek linii LK do GL będzie mniejszy niż linii RO do GR. Stosunek linii OR do GR jest więc większy niż linii KL do GL. Łącznie zatem, zgodnie z twierdzeniem I,11 tego dzieła, stosunek linii OG do RG jest większy niż linii KG do LG, ale linia KG jest większa niż OG, a w rezultacie, zgodnie z EE V,14, linia LG jest większa niż RG. Jest więc punkt R niżej położony od punktu L, ale linia ZQL jest linią prostą, a linia ZQR jest linią zakrzywioną. Stąd obraz linii HC jest zakrzywiony. Po umieszczeniu zatem w miejsce punktu M innego punktu na linii HC; na przykład w miejsce punktu C punkt E, będzie można stwierdzić, że obraz linii prostej HE jest zakrzywiony.



[Rys. 55]



[Rys. 55a]

Jeśli natomiast linie HM, TS i ZQ nie są równoległe, muszą się więc przeciąć, a przecięcie nastąpi od strony punktu D albo od strony punktu H; niech będzie od strony punktu H i niech się przetną w punkcie C [rys. 55]⁴. Zgodnie z twierdzeniem 53 tej księgi, linia ZQL będzie więc linią prostą. Dlatego linia ZQR będzie zakrzywiona. Jest więc obraz linii prostej HC zakrzywiony, co wynika z powyżej przeprowadzonego dowodu. A to jest przedmiotem twierdzenia.

58. Obraz każdego łuku koła, na którego płaszczyźnie padania będzie środek oka, ukazujący się oku wewnątrz zwierciadła kulistego wypukłego, widzimy zawsze jako zakrzywiony (Alh. VI,23).

Łuk koła¹ oznaczymy jako AB. Środkiem zwierciadła niech będzie punkt G, a środkiem oka punkt D [rys. 56]². Niech środek oka znajduje się na płaszczyźnie padania, którą jest płaszczyzna ABG. Twierdzą, że

obraz łuku AB, wtedy kiedy ukazuje się oku wewnątrz zwierciadła, widzimy zawsze jako zakrzywiony. Poprowadźmy cięciwę AB. Na podstawie poprzednich twierdzeń jest oczywiste, że obraz cięciwy AB w każdym jej położeniu względem zwierciadła widzimy zawsze jako zakrzywiony, z wyjątkiem tego tylko przypadku, gdy sama cięciwa znajduje się na prostopadłej padania, w jednym z jej punktów skrajnych, np. gdy jest ona prostopadłą do powierzchni zwierciadła, przechodzącą przez jego środek. Wtedy bowiem obraz tej prostopadłej widzimy jako prosty, jak to wynika z twierdzenia 53 tej księgi. Jest zaś rzeczą niemożliwą, aby łuk AB był na prostopadłej padania, w jednym z jej punktów skrajnych, bowiem każdy z jego punktów ma inną prostopadłą padania. Wobec tego nigdy nie zobaczymy obrazu łuku w ten sposób umieszczonego jako linii prostej, ponieważ zawsze miejsca obrazów różnych punktów znajdują się na różnych prostopadłych. Zakrzywienia zaś obrazów bardzo łatwo można dowieść na podstawie dowodu, którym posłużyliśmy się w poprzednich twierdzeniach w stosunku do linii prostych. Pomocne nam będzie w tym także twierdzenie 45 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

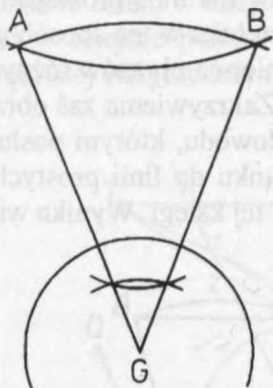


[Rys. 56]

59. Wypukłość obrazów dowolnych łuków, gdy miejsce obrazów znajduje się wewnątrz zwierciadła kulistego wypukłego albo na zewnątrz zwierciadła, jest usytuowana naprzeciw wypukłości łuków.

Niech będzie tak, że łuk AB zwraca się swoją wklęsłością albo wypukłością w stronę środka zwierciadła kulistego wypukłego, który znajduje się w punkcie G [rys. 57]. Twierdzę, że wypukłość tego obrazu będzie położona naprzeciw wypukłości samego zwierciadła, podczas gdy obraz w całości jest wewnątrz zwierciadła bądź w całości na zewnątrz zwierciadła, albo też częściowo wewnątrz zwierciadła, a częściowo na

powierzchni zwierciadła. Miejsca obrazów punktów bardziej oddalonych od powierzchni zwierciadła są bliżej środka zwierciadła, zaś miejsca [obrazów] punktów bliższych powierzchni zwierciadła są bardziej oddalone od środka zwierciadła, jak to wynika z twierdzenia 23 tej księgi. Ponieważ obrazy zachowują ciągłość położenia swoich części, podobnie jak mają swoją ciągłość rzeczy, których to są obrazy, jest oczywiste, że wypukłość samych obrazów jest położona naprzeciw wypukłości samych widzianych łuków, tak jak to wykazaliśmy w twierdzeniu 46 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.



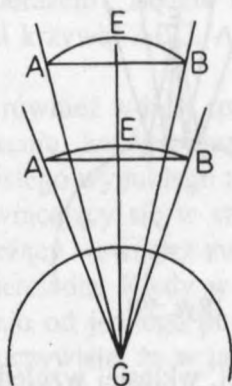
[Rys. 57]

60. Spośród widzianych zakrzywionych obrazów łuku, obraz łuku bardziej oddalonego od środka zwierciadła kulistego wypukłego widzimy jako bardziej zakrzywiony.

Łuk widziany oznaczmy jako AB, a jego punktem środkowym niech będzie punkt E [rys. 58]¹. Obraz tego łuku niech będzie zakrzywiony. Jego cięciwą niech będzie linia prosta AB. Środkiem zwierciadła niech będzie punkt G. Twierdzę, że gdy linia AB przybliży się do zwierciadła, zakrzywienie obrazu maleje, natomiast kiedy ta sama linia się oddala, zakrzywienie wzrasta.

Poprowadźmy prostopadłe AG i BG, na których, zgodnie z twierdzeniem 11 tej księgi, znajdują się miejsca obrazów punktów A i B. Ponieważ, kiedy linia prosta AB przybliży się do powierzchni zwierciadła, to zgodnie z twierdzeniem I,34 tego dzieła, kąt AGB zwiększa się, a kiedy się oddala, kąt AGB zmniejsza się, zaś obraz punktu E bardziej oddalonego od środka zwierciadła, jak wynika z twierdzenia 23 tej księgi, jest bliższy środka zwierciadła, a obraz tego samego punktu zbliżającego się do zwierciadła jest bardziej oddalony od środka, natomiast punkty skraj-

ne tego obrazu są zawsze na prostopadłych AG i GB^2 , jest więc oczywiste, że obraz łuku AB bardziej oddalonego od środka zwierciadła jest bardziej ściśnięty, a łuku przybliżonego do środka bardziej jest rozszerzony; zgodnie z tym [stwierdzeniem] rodzaj tego zakrzywienia się zmienia w sposób powyżej przedstawiony. Ponieważ obraz tego, co bardziej oddalone od środka zwierciadła, jest bardziej zakrzywiony, a tego, co bliżej środka, mniej zakrzywiony, dlatego że on sam zawsze staje się częścią koła większego podczas zbliżania do środka zwierciadła, a częścią koła mniejszego podczas oddalania się od środka, to wielkość wspomnianych obrazów zmienia się w zależności od wielkości jego zbliżenia i oddalania. Wynika więc to, co zakładano.

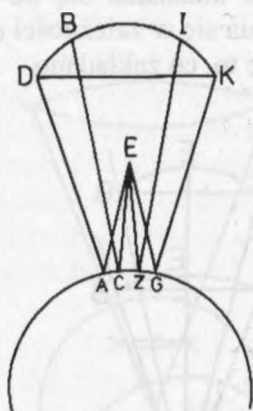


[Rys. 58]

61. Każdy obraz dochodzący z powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego do oka zawsze ukazuje się jako wypukły (Euc. Catoptr. 23).

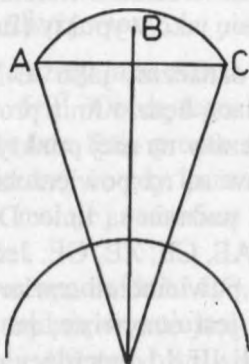
Zwierciadło kuliste wypukłe oznaczmy jako A . Niech środkiem oka będzie punkt E . Niech linią widzianą będzie linia prosta lub krzywa, którą jest linia DK [rys. 59]¹. Zaznaczmy na niej punkty B oraz I . Załóżmy, że miejsca obrazów tych punktów są na powierzchni tego zwierciadła, podczas gdy istniejącymi liniami padania są linie: DA , BC , IZ , KG . Liniami odbicia są natomiast linie: AE , CE , ZE , GE . Jeżeli jakaś z tych linii odbicia będzie prostopadła do powierzchni zwierciadła, to, zgodnie z twierdzeniem I,72 tego dzieła, jest oczywiste, że przejdzie ona przez środek zwierciadła. Zgodnie z EE III,8 i twierdzeniem I,21 tego dzieła, będzie więc ona najkrótszą z wszystkich tych linii odbicia, a linie jej bliższe będą krótsze od tych bardziej oddalonych [od niej]. Wynika więc, że [obraz linii DK] jest widziany jako zakrzywiony, ponieważ jakaś jej część jest bliżej oka, a inna część jest bardziej od oka oddalona. To samo zachodzi również, jeżeli żadna z tych linii odbicia nie jest prostopadła do

powierzchni zwierciadła, ponieważ po przeprowadzeniu, zgodnie z EE XI,11, linii prostopadłej z punktu E do powierzchni zwierciadła, jest oczywiste, że wszystkie linie odbicia bliższe tej prostopadłej są krótsze od linii bardziej oddalonych. I w ten właśnie sposób obraz linii prostej bądź zakrzywionej, którą jest linia DK, dochodzący do oka z powierzchni zwierciadła, widzimy zawsze jako zakrzywiony. Ponieważ w ten sam sposób można dowodzić w odniesieniu do każdego obrazu ukazującego się na powierzchni zwierciadła, wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 59]

62. Obraz linii zakrzywionej, wklęsłej względem powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, niekiedy jest widoczny jako linia prosta (Alh. VI,23).



[Rys. 60]

Niech będzie linia krzywa ABC, położona swoją częścią wklęsłą na przeciw zwierciadła kulistego wypukłego [rys. 60]. Twierdzę, że niekiedy obraz tej linii można zobaczyć jako linie prostą. Narysujmy linię pro-

stą, która jest jej cięciwą; a jest nią linia AC. Jest oczywiste, zgodnie z wieloma poprzednimi twierdzeniami tej księgi, że w jakimś położeniu¹ obraz tej linii prostej [AC] zobaczymy jako zakrzywiony, a to zakrzywienie zwraca się w kierunku środka zwierciadła. Ponieważ punkty skrajne zakrzywionej linii ABC (a są to punkty A i C) widzimy na krańcach obrazu linii prostej AC, to wyobraźmy sobie, że pod tym zakrzywionym obrazem linii prostej AC rozciąga się wewnątrz zwierciadła cięciwa. Jeżeli tak się zdarzy – co jest możliwe – że zakrzywienie tego łuku (a jest to łuk AB) będzie podobne do zakrzywienia obrazu jego cięciwy, tak że jego zakrzywienia z jednej i drugiej strony są podobne, to jest oczywiste na podstawie twierdzenia 23 i 45 tej księgi, że obraz linii krzywej, którą jest linia ABC, będzie linią prostą, położoną jako cięciwa pod tym zakrzywionym obrazem². Będzie więc widoczna linia prosta, która jest obrazem tej linii krzywej ABC. A to jest przedmiotem twierdzenia.

To staje się oczywiste również w inny sposób. Skoro, jak powiedziano w poprzednim twierdzeniu, każdy obraz ukazujący się oku na powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego zawsze widzimy jako wypukły, swoją wklęsłością zwracający się w stronę środka zwierciadła, to obraz tego samego łuku leżący wewnątrz zwierciadła swoją wklęsłością zwraca się do środka zwierciadła. Kiedy w tego rodzaju odbiciach nie przechodzi się bezpośrednio od jednego punktu skrajnego do drugiego punktu skrajnego, to jest oczywiste, że w jakimś położeniu w częściach powierzchni tego samego obrazu, jest on prosty³. Ponieważ wszystkie miejsca obrazów punktów tego łuku⁴ leżą na jednej linii prostej (wyznaczenie jednak położenia oka, rzeczy widzianej i zwierciadła byłoby czasochłonne i bezużyteczne, a przekona się o tym po prostu ten, kto chce tego szukać na podstawie wywodów wcześniej przeprowadzonych), to jest powodem, dla którego koło widzimy niekiedy jako półkoło i średnicę, a z części koła powstaje część odwrócona tak, że obraz linii prostej jest zakrzywiony, zaś linii krzywej jest prosty; a niekiedy obydwie linie widzimy jako zakrzywione po tej samej stronie, jeżeli zakrzywienie łuku widzianego jest mniejsze od zakrzywienia obrazu jego cięciwy; a niekiedy znów powierzchnia w różnych stronach jest zamknięta jak po przecięciu dwóch kół nierównych. Tych obrazów jest wielka różnorodność. Ich zbadanie, zgodnie z wcześniejszymi założeniami, jest kwestią pilności i zręczności. W tych zwierciadłach obraz linii prostej ukazuje się krzywy, a obraz linii krzywej zawsze widzimy jako krzywy, chociaż niekiedy wydaje się oku prosty. Co wykazaliśmy w odniesieniu do linii, to dotyczy również powierzchni płaskich, wklęsłych i wypukłych i odnosi się do linii, które znajdują się na tych powierzchniach. Dokładnie to samo dzieje się z ich liniami długości i szerokości. Jeśli zatem długie zakrzy-

wione ciało, ale o umiarkowanej szerokości pojawi się oku na tych zwierciadłach, to oko zobaczy wyraźnie zakrzywienie ciała, chociaż nie będzie można rozstrzygnąć, co znajduje się ponad ciałem, co wokół niego, a co poniżej. Nie oceniamy bowiem dokładnie niewielkiego zakrzywienia, kiedy ukryte są punkty skrajne długości i szerokości. Dlatego w przypadku ciała o umiarkowanym zakrzywieniu, ale przy dużej jego wielkości nie oceni się dokładnie tego zakrzywienia, chociaż jego obraz jest wypukły, ponieważ nie ukazują się punkty graniczne ani długości ciała, ani szerokości, które to punkty graniczne pomagają spostrzec nie-małe zakrzywienie.

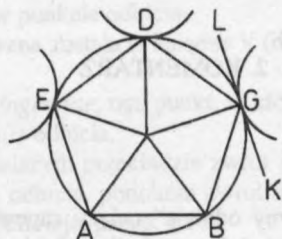
63. Formy odbite od powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego, składającego się z powierzchni różnych kul, widzimy jako obrazy zniekształcone.

Ponieważ różne powierzchnie kuliste mają różne środki, a te środki w takich nieregularnych zwierciadłach znajdują się w różnych miejscach, to jest więc oczywiste, że formy różnych punktów rozchodzą się w różne strony, natomiast miejsce obrazu dowolnego punktu na zwierciadłach kulistych wypukłych, zgodnie z twierdzeniem 11 tej książki, znajduje się na prostopadłej padania [formy] punktu, poprowadzonej z punktu widzianego do środka danego zwierciadła. Ponieważ odbicie zachodzi od całej powierzchni, a punkty odbicia znajdują się w różnych miejscach i nie mają jednego i tego samego położenia, jest oczywiste, że cały obraz, który jest wynikiem łączenia i zjednoczenia miejsc takich punktów, przyjmuje nieuporządkowane położenie swoich części. W takich więc zwierciadłach widzimy zniekształcony obraz, a jednokształtny zakres jakichś jego części pokrywa się z jednokształtnym zakresem tych powierzchni, a od innych części jest zniekształcony z powodu innych powierzchni. W związku z tym, że różne części¹ powierzchni zwierciadła mają różne środki różnych kul, dlatego też jedne części obrazu wydłużają się, inne rozciągają się wszerek, a jeszcze inne rozciągają się w poprzek. Wynika więc to, co zakładano.

64. Jest rzeczą możliwą widzieć obraz tego samego punktu na wielu wypukłych kulistych zwierciadłach, na ilu tylko kto zechce¹ (Euc. Catopt. 15).

Niech będzie taki układ, jaki został omówiony w twierdzeniu V, 61 tego dzieła w przypadku zwierciadeł płaskich. Niech A będzie środkiem oka, a B punktem widzianym [rys. 61]². Dla przykładu, narysujemy wielokąt równoboczny i równokątny i oznaczmy go jako ABGDE. W punktach G, D, E niech będą zwierciadła kuliste wypukłe przylegające

do wierzchołków kątów równych. Wyobraźmy sobie linie styczne do zwierciadeł w tych samych punktach, np. w punkcie G będzie styczna linia LK. Ponieważ kąt BGK jest równy kątowi DGL, jest oczywiste na podstawie twierdzenia V,20 tego dzieła, że forma punktu B odbija się z punktu G do punktu D, i w ten sam sposób z punktu D do punktu E, i z punktu E do punktu A. A to jest to, co zakładano.



[Rys. 61]

65. Nie jest rzeczą możliwą rozniecić ogień przy pomocy powierzchni jednego zwierciadła kulistego wypukłego, chociaż jest to możliwe, gdy zestawimy większą liczbę zwierciadeł.

Chociaż, jak to wykazano w twierdzeniu 15 tej księgi, linie odbicia formy tego samego punktu z różnych punktów tego samego zwierciadła kulistego wypukłego nie są równoległe, ale jednak nie przecinają się w środku jednego oka. Wobec tego ani promienie słoneczne, ani inne promienie padające na powierzchnię tego zwierciadła nie mogą się przeciąć w żadnym punkcie, tylko rozpraszają się w samym ośrodku. Te promienie, nawet razem wzięte, nie mogą ciała zapalić, ponieważ odbijają się od powierzchni jednego zwierciadła, chociaż samo ciało jest palne. Jednak w przypadku zestawienia większej liczby zwierciadeł może się coś takiego zdarzyć, że od jednego punktu każdego z tych zwierciadeł odbije się jeden promień do jednego punktu, a promienie [odbite] od wszystkich zwierciadeł spotkają się ze sobą. W ten sposób wzmocni się działanie w punkcie spotkania (liczba promieni będzie odpowiadała liczbie zwierciadeł) i nastąpi zjednoczenie bądź połączenie ich mocy. Takie zestawienie zwierciadeł przyniesie jednak więcej szkody niż korzyści. Dlatego wierzymy, że nie warto zabierać się do takiego przedsięwzięcia. Wynika więc to, co zakładano.

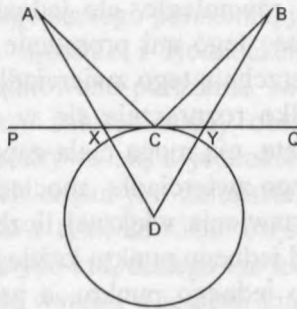
2. KOMENTARZ

¹ Przez wyrażenie „przyczyny odbicia” należy zapewne rozumieć warunki, jakie muszą być spełnione i zachowane, aby nastąpiło odbicie i promień odbity doszedł do oka.

Definicje

¹ Linia odbicia została zdefiniowana w księdze V (definicja 4); linią odbicia nazywamy linię, po której forma „odrzucona” odbija się do oka.

² Punkt odbicia został zdefiniowany w księdze V, jako definicja V,5. W oryg.: *Finis contingentiae dicatur punctus ubi altera cathetorum secatur lineam in puncto reflexionis speculum contingentem*. Tak sformułowana przez Witelona definicja budzi wątpliwości.



Rys. P1

W naszym przekładzie uwzględniamy dalsze jej objaśnienia, wynikające z szeregu twierdzeń (są to przede wszystkim twierdzenia: 13, 37, 38, 44, 45, 47, 52). Kiedy Witelo mówi o prostopadłych, ma zapewne na myśli średnicę widzenia (tzn. prostopadłą odbicia) lub prostopadłą padania (por. definicja V,8). W zjawisku odbicia istnieją zatem dwa końce stycznych. Jeden koniec znajduje się w punkcie przecięcia stycznej do zwierciadła, przechodzącej przez punkt odbicia, z prostopadłą odbicia, a drugi w punkcie przecięcia tej stycznej z prostopadłą padania. Tę sytuację przedstawiono na rysunku P1. Na rysunku tym literą A oznaczono przedmiot, a literą B środek oka. Punkt C jest punktem odbicia, a D środkiem kuli zwierciadła, zaś linia PQ jest styczna do powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego w punkcie odbicia. Linie AC i CB ozna-

czają odpowiednio linię padania i linię odbicia. Linia AD jest prostopadłą padania, a linia BD średnicą widzenia. Punkty X oraz Y są końcami styczności.

Twierdzenie 1

¹ Patrz definicja V,7.

² W oryg.: *superficies continens*: powierzchnia obejmująca, tzn. powierzchnia, na której znajdują się; linia padania, linia odbicia, prostopadła i styczna do powierzchni zwierciadła, poprowadzona w punkcie odbicia.

³ Linia padania zdefiniowana została w księdze V (definicja 3), a linia odbicia w definicji V,4.

⁴ W oryg.: *a puncto contingentiae*, tzn. punkt, w którym stykają się z powierzchnią zwierciadła linia padania i linia odbicia.

⁵ Tzn. płaszczyzną. W dalszym przekładzie zwrot *superficies reflexionis* będziemy tłumaczyli jako płaszczyzna odbicia, podobnie zwrot *superficies incidentie* jako płaszczyzna padania. Por. ks. V, definicje, przyp. 2 i 3.

⁶ W oryg.: *perpendiculares super superficies sphaeras contingentes*. W tym zwrocie słowo *contingentes* oznacza punkt zetknięcia prostopadłej z powierzchnią zwierciadła.

Twierdzenie 2

¹ W rękopisach A, C, Q, S, H rysunek jest odwrócony tak, że punkt A jest na dole, zaś punkty z prawej strony znajdują się z lewej, czyli rysunek jest o 180° odwrócony wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt E. W wydaniu I rysunek jest obrócony w lewo o 90° .

² W oryg.: *ad visum*. Nie jest prawdą, że wszystkie odbite formy wpadają do oka, natomiast jest prawdą, że formy, odbite od tej części zwierciadła, mogą wpaść do oka.

³ W oryg.: *puncti constituti directe*. O położeniu na wprost mówi Witelo dokładniej w księdze IV (*passim*).

⁴ W oryg.: *includunt superficiem*. Zwrot ten nastrocza pewne trudności interpretacyjne. W miejsce trybu oznajmującego powinien znaleźć się tryb warunkowy, co uwzględniliśmy w tłumaczeniu. Ponadto treść tego zwrotu jest zbyt zwięzła i jego znaczenia należy się raczej domyślać. Witelo wskazuje bowiem na fakt, że dwie linie proste nie mogą wyznaczyć pola figury geometrycznej.

Twierdzenie 3

¹ Tzn. do powierzchni zwierciadła.

² W oryg.: *in superficie continua*.

³ W rękopisach A, C, H, Q, S rysunek jest odwrócony o kąt 180° wokół osi przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do płaszczyzny rysunku, w wydaniu I jest odwrócony wokół tej samej osi w prawo o kąt 90° .

⁴ Tzn. oko, którego środek jest umieszczony w punkcie A.

⁵ Por. twierdzenie 68 – 70 z księgi IV i wstęp do księgi IV (Wit. Persp. PP11, s. 59).

Twierdzenie 4

¹ Rysunek zamieszczony w rękopisach A i C jest obrócony o kąt 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt B.

² Płaszczyzna odbicia została zdefiniowana w księdze V, definicja 7.

Twierdzenie 5

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S rysunek jest obrocony o kąt 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt B, a linia MD jest przedłużona poza punkt D. Brak oznaczenia punktu S. W wydaniu I obrót wokół tej samej osi w prawo o kąt 90° , punkt A połączony z okręgiem również z drugiej strony, ale brakuje oznaczenia tego punktu.

² Twierdzenie V,11 dotyczy promieni padających prostopadle na zwierciadło. Zastosowanie w tym przypadku może mieć tylko twierdzenie V,12.

Komentarz

Autor tutaj dowodzi jedynie tego, że odbicie do oka może zachodzić, ale nie określa warunków, kiedy ono zachodzi, tzn. nie podaje, jakie musi być wzajemne położenie przedmiotu i oka, aby obraz przedmiotu był widoczny po odbiciu. Zagadnieniu wzajemnego położenia przedmiotu i oka są poświęcone dalsze twierdzenia księgi VI.

Twierdzenie 6

¹ W oryg.: *punctum reflexum*. Z lektury księgi VI wynika, że tak określa Witelo punkt, którego forma się odbija.

² W oryg.: *in ipsa*, co sugeruje, że chodzi tu o wcześniej wspomnianą powierzchnię zwierciadła. Z kontekstu jednak wynika, że zaimek ten odnosi się do płaszczyzn odbicia i dlatego powinien być w liczbie mnogiej: *in ipsis*.

³ Tzn. płaszczyznach odbicia.

⁴ W powyżej wspomnianym wykazie, do którego odwołuje się Witelo, pominięty został środek zwierciadła.

Twierdzenie 7

¹ Niewidoczna część powierzchni zwierciadła, tzn. część kuli zwierciadła położona poza częścią, widzianą przez oko.

² W wydaniu I rysunek ten jest obrocony w lewo wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt G.

³ Zwroty: „pod linią”, „ponad punktem” i „pod punktem” odnoszą się do rysunku.

Twierdzenie 8

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S i wyd. I rysunek jest obrocony o kąt 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt F.

² Kąt padania jest określony w definicji V,11, a kąt odbicia w definicji V,12. Analizą zjawiska odbicia zajmuje się Witelo w księdze V. Tam też formułuje podstawowe prawo stwierdzające, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Podsumowanie analizy poszczególnych przypadków znajdujemy w twierdzeniu V,20. Jak podaje A. M. Smith (Wit. Persp. SI, s. 153), kąt padania i odbicia autor *Perspektywy* definiuje zgodnie ze starożytną tradycją. Współcześnie używane definicje tych kątów wprowadzono w XVII w. Kąt BDG na rysunku 6 współcześnie nazywa się kątem padania, a kąt ADG kątem odbicia.

Twierdzenie 9

¹ Patrz definicja V,8.

² W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I na rysunku mamy półokrąg, a nie pełny okrąg, jak w wydaniu Risnera.

³ Zdanie to nie ma żadnego znaczenia dla dowodu twierdzenia. Linii DZ nie znajdujemy na żadnym rysunku w rękopisach. Zdanie to występuje również w rękopisach A, C, H, Q, S i wyd. I.

Komentarz

To twierdzenie stanowi przykład bezpośredniego przeniesienia wyników uzyskanych dla zwierciadła płaskiego na przypadek zwierciadła kulistego. Wynika ono z twierdzenia V,37 i V,48 (których twierdzeń autor nie cytuję), a właściwie jest ich powtórzeniem i Witelo dowodzi w nich, że obraz przedmiotu w zwierciadle płaskim powstaje w punkcie przecięcia przedłużenia linii odbicia z prostą padania. Twierdzenie jest prawdziwe w kontekście ściśle geometrycznym. Zagadnienie konstrukcji obrazów w zwierciadłach kulistych wypukłych zostało omówione we *Wstępie* (rozdział I.3.4).

Twierdzenie 10

¹ W oryg.: *omnis perpendicularis reflectitur in se ipsam*. Zdanie to zawiera w bardzo zwięzłej formie następującą myśl: Forma punktu padająca po prostopadłej do powierzchni zwierciadła odbija się wzdłuż tej samej prostopadłej.

² W rękopisach A, C, H, Q, S rysunek stanowi odbicie zwierciadlane wzdłuż linii XD, i brak oznaczenia punktu E. W wydaniu I rysunek obrócony w prawo o kąt 90° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt D. Brak oznaczenia punktu E.

³ Na rysunku 8 mamy narysowaną półśrednicę. Jak wynika z dalszego tekstu księgi VI, terminu średnica używa Witelo na określenie linii poprowadzonej ze środka koła, która przecina jego obwód i została przedłużona poza okrąg.

Komentarz

Dowód pierwszej części twierdzenia jest nie wprost, ale przez wykazanie sprzeczności. Wniosek zaczynający się od słów „Skoro tylko z jednego...” jest nieprawdziwy z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy. Witelo zgodnie z przyjmowanym przez niego mechanizmem powstawania obrazu w oku uważa, że do powstawania obrazu wystarczy jeden promień. Błędem jest stwierdzenie, że w tym przypadku obraz powstaje na powierzchni zwierciadła. Obraz, jaki powstaje w tym przypadku, jest obrazem pozornym, który może powstać tylko na przecięciu przedłużenia promieni odbitych od zwierciadła (por. uwagi zawarte we *Wstępie*: rozdział I.3, zwłaszcza rys. W5). Nie powstaje on nigdy na powierzchni zwierciadła, ponieważ przedłużenia promieni odbitych nie przecinają się na powierzchni zwierciadła.

Twierdzenie 11

¹ Miejsce obrazu zostało określone w definicji V,14.

² W rękopisach A, C, H, Q, S mamy odbicie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku. W rękopisach A, C, S brak linii EP, jest natomiast dodatkowa linia BN nie wymieniona w dowodzie twierdzenia. W wydaniu I rysunek częściowo nie odpo-

wiada treści dowodu. Brakuje na nim linii odbicia BG, ale jest inna linia, która jest zbyteczna w dowodzie.

³ Zdanie zaczynające się od słów „Od tego samego punktu” do określenia „a to jest niemożliwe” niejasno wyraża myśl, która wcześniej już została wypowiedziana. Witelo w poprzednim zdaniu stwierdził, że chodzi o dwie prostopadłe, które zostały poprowadzone z dwóch różnych punktów leżących naprzeciw siebie (a nie z jednego i tego samego punktu) H i N do linii EGP, przecinające się w tym samym punkcie G.

⁴ W orygl.: *quoniam ipse est punctus communis lineae reflexionis, in qua necessario est forma et lineae AN, quae est cathetus incidentiae formae puncti A, secundum quam, ut secundum lineam brevior, necessario videtur forma*. Ostatnia część zdania zaczynająca się od słów: *secundum quam* odnosi się do linii odbicia, a nie do prostopadłej padania AN, jakby to wynikało z układu tekstu, ponieważ to linia odbicia jest tą linią krótszą. Z tego powodu ta część zdania znalazła się w przekładzie tuż po zdaniu: na której musi być forma.

⁵ Ta linia jest prostopadłą padania.

Komentarz

Twierdzenie to stanowi rozwinięcie twierdzenia 9. Zgodnie z tym, co powiedziano we *Wstępie*, rozdział I.3.1, obraz rzeczywisty punktu powstaje na przecięciu dwóch dowolnych promieni wiązki zbieżnej, a obraz pozorny przedłużeń dwóch dowolnych promieni wiązki rozbieżnej. Prostopadła padania jest niczym innym jak promieniem padającym prostopadłe na zwierciadło, który wewnątrz czaszy zwierciadła jest przedłużony do jego środka krzywizny. Witelo całą tą linie traktuje jednakowo. Nie rozróżnia nigdzie promienia i jego przedłużenia. Spowodowane to jest nierozróżnianiem obrazów pozornych i rzeczywistych. Obraz punktu powstaje, według Witelona, na przecięciu linii odbicia (tj. promienia odbitego wraz z jego przedłużeniem) z prostopadłą padania. W rzeczywistości w przypadku zwierciadeł wypukłych obraz powstaje na przedłużeniu przedłużenia promienia odbitego z przedłużeniem promienia padającego prostopadłe i jest to obraz pozorny. Twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku punktów leżących na osiach, które tworzą małe kąty z główną osią optyczną (na niej umieszcza Witelo oko) i dla promieni padających. Patrz uwagi zamieszczone we *Wstępie*, rozdział I.3.4.

Twierdzenie 12

¹ W rękopisie A, C, H, Q, S oraz wydaniu I rysunek jest obrocony w prawo o kąt 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt N. Ponadto w rękopisie A oraz H i wydaniu I brak oznaczenia punktu G, a punkt E został oznaczony na końcu linii PGE, a nie w punkcie jej przecięcia z linią AN. Zaznaczona na rysunku linia BN nie występuje w dowodzie twierdzenia.

Twierdzenie 13

¹ Przy dowodzeniu tego twierdzenia Witelo korzysta z rysunku 10 znajdującego się przy twierdzeniu 12 i dlatego wszystkie oznaczenia literowe w tekście dowodu odnoszą się do rysunku 10.

Twierdzenie 14

¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisie A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Stanowi on bez wątpienia dodatek Risnera, dlatego też otrzymał numer poprzedniego rysunku

z dodaną literą „a”. Ten sposób oznaczania rysunków dodanych przez Risnera będziemy stosowali w dalszym przekładzie.

Twierdzenie 15

¹ W oryg.: *unus visus non potest videre idolum eiusdem formae a diversis punctis talium speculorum reflexum*. Witelo mówi wyraźnie o „odbitym obrazie” (*idolum reflexum* – rzeczownika *idolum* używa tylko jeden raz, w pozostałych zaś przypadkach występuje *imago*), gdy tymczasem, jak wynika z innych wypowiedzi, chodzi o „odbitą formę”, ponieważ to forma przedmiotu się odbija, a nie obraz ani przedmiot.

Komentarz

Dowód twierdzenia został przeprowadzony nie wprost, ale przez wykazanie sprzeczności. Druga część twierdzenia zaczynająca się od słów: „Z tego wynika, że...” jest nieprawdziwa. Błąd ten spowodowany jest nieznaną budową oka, w szczególności roli soczewki. Jest on konsekwencją przyjętej przez Witelona budowy oka i mechanizmu powstawania obrazu w oku (por. Wit. Persp. PPI, gdzie przedstawiona jest budowa oka według Witelona oraz uwagi zawarte we *Wstępie*, rozdział I.3). W rzeczywistości, aby w oku powstał obraz przedmiotu, musi do niego wpadać wiązka światła. Jeżeli przedmiot widzimy przy użyciu zwierciadła, to wiązka ta musi odbić się od powierzchni zwierciadła i do oka wpada wiązka rozbieżna. Wiazka światła nie może odbić się od jednego punktu zwierciadła, ale musi odbić się od wielu punktów. I dopiero dzięki działaniu rogówki i soczewki na siatkówce powstanie obraz przedmiotu.

Twierdzenie 16

¹ Wyrażeniem „do oka znajdującego się w określonym miejscu” został przetłumaczony łaciński zwrot *ad visum unum*, który sugeruje, że chodzi o widzenie jednym okiem, ale treść dowodu wskazuje jednoznacznie, że liczebnik *unum* odnosi się do tego położenia oka, w którym forma dojdzie do oka.

² W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I mamy odbicie zwierciadlane na linii KN. W rękopisach tych na rysunku występują dodatkowo dwie linie, nie wykorzystane w dowodzie twierdzenia. Są to prostopadłe do okręgu w punktach Z i T poprowadzone do środka okręgu N. Ponadto brak oznaczenia punktu G.

³ Odbicie wprowadzi zachodzi, ale forma nie trafia do oka, którego środek znajduje się w punkcie A.

⁴ Punktu tego nie ma zaznaczonego na rysunku 12, chociaż w tym akapicie autor często do niego się odwołuje, określając go jedynie zaimkiem wskazującym. Jest to punkt hipotetyczny.

⁵ Wspomniana tutaj półśrednica jest linią hipotetyczną, poprowadzoną do również hipotetycznego punktu, o którym jest mowa w poprzednim przypisie.

⁶ Tzn. styczną w punkcie, o którym mowa w przypisie 4.

⁷ Tzn. do punktu, o którym mowa w przypisie 4.

⁸ W tekście błędnie mowa o linii BD, chodzi zaś o linię AD.

⁹ Patrz przyp. 3.

Komentarz

Dowód twierdzenia składa się z czterech części. W pierwszej części autor wyjaśnia, że zgodnie z założeniem, jeśli forma punktu B odbija się od powierzchni zwierciadła w punkcie G, to dojdzie do oka. Witelo również udowadnia, że punktem odbicia nie

może być punkt L. W części drugiej dowodzi, że odbicie formy punktu B do oka nie może nastąpić na łuku LE. W części trzeciej przeprowadza dowód dla łuku LG, a w części czwartej dla łuku GD. Z obydwu tych ostatnich łuków nie może nastąpić odbicie formy punktu B do oka. Z twierdzenia tego wynika, że w określonym wzajemnym położeniu punktu B, oka i zwierciadła odbicie formy punktu B do oka może nastąpić tylko w jednym punkcie powierzchni zwierciadła. Twierdzenie to z punktu dzisiejszej wiedzy jest nieprawdziwe. Zgodne jest natomiast z mechanizmem powstawania obrazu w oku przyjętym przez Witelona i jemu współczesnych. Patrz komentarz do twierdzenia 15 i uwagi zawarte we *Wstępie*, w rozdziale I.3.

Twierdzenie 17

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I znajdujemy: odbicie zwierciadlane na linii KN, brak oznaczenia punktu P. Z punktu P wychodzi tylko linia PT.

² Od słowa „ponieważ” do końca tego zdania mamy następujący tekst łaciński: *quoniam sola perpendicularis visualis reflectitur in seipsam per 10 huius*. Nasze tłumaczenie jest próbą interpretacji tego zdania zgodnie z treścią wywodów dowodu.

Komentarz

Twierdzenie to nie ma sensu z punktu widzenia dzisiejszej znajomości anatomii oka i mechanizmu powstawania obrazu w oku. Trzeba jednak zaznaczyć, że przebieg pojedynczych promieni, ale bez wiązania ich z powstawaniem obrazu w oku, jest prawidłowy. Patrz również uwagi we *Wstępie*, w rozdziale I.3.

Twierdzenie 18

¹ W oryg.: liczba mnoga *visus*. Tymczasem w dowodzie twierdzenia jest mowa tylko o jednym oku, które znajduje się w dwóch różnych miejscach.

² Łaciński tekst twierdzenia nie odpowiada w pełni wywodom. Polski przekład jest wynikiem analizy tekstu dowodu i rysunku. Należy zaznaczyć, że to twierdzenie nie ma referencji do Alhazena, a zatem można sądzić, że jest ono samodzielnym dodatkiem Witelona, opisującym szczególny przypadek.

³ Por. przypis 1. W oryg. zwrot: *a visibus*, przetłumaczyliśmy „od każdego oka”, aby podkreślić, że nie chodzi o dwoje oczu, ale o jedno oko, które jest w różnych miejscach.

Komentarz

Patrz komentarz do twierdzenia 17.

Twierdzenie 19

¹ Tekst łaciński jest niepełny. W świetle dotychczasowych rozważań Witelona wynika, że to twierdzenie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty odbicia będą równe. Bez naszego uzupełnienia tekstu w przekładzie zwrotem „pod równymi kątami” twierdzenie nie miałoby sensu. Należy dodać, że to twierdzenie, podobnie jak twierdzenie poprzednie, nie posiada referencji do Alhazena. Można zatem przyjąć, że pochodzi ono również od Witelona, który, jak widzimy, ma często kłopoty z jednoznacznym sformułowaniem twierdzenia.

² W rękopisach A, C, H, S i wydaniu I mamy cały okrąg.

Komentarz

Patrz komentarz do twierdzenie 17.

Twierdzenie 20

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S i wyd. I znajdujemy jeden rysunek, na którym są zaznaczone punkty i linie, które w wyd. Risnera są umieszczone na dwóch różnych rysunkach. Należy więc sądzić, że rys. 16a pochodzi od Risnera.

² W oryg.: *aequilateri* znaczy „równoboczne”, gdy w rzeczywistości te trójkąty nie są równoboczne, a jedynie mają boki odpowiednio sobie równe, co wynika również z EE I,4.

³ Rysunek ten w całości pochodzi od Risnera, por. także przypis 1.

⁴ W oryg.: *erit punctorum ipsorum reflexionis approximatio ad centrum visus secundum puncta suae reflexionis*. Część zdania zaczynająca się od słowa: *secundum* jest w zasadzie powtórzeniem sensu pierwszej części zdania. Witelo uogólnia wcześniejsze sformułowania podkreślając, że formy odbijają się w tym miejscu, w którym mają się odbić.

⁵ Risner błędnie środek koła oznacza literą B. Na rysunku i w rękopisach jest C i takie oznaczenie przyjęliśmy w naszym przekładzie.

Komentarz

W tym twierdzeniu pojawia się problem wyznaczenia położenia punktu odbicia, który jest rozwiązany w pierwszej części dowodu. W części drugiej autor wykazał, że położenie punktu odbicia na powierzchni zwierciadła przy danym położeniu oka A będzie zależało od odległości przedmiotu od zwierciadła. Nie został jednak podany sposób znajdowania punktu odbicia przy różnych położeniach oka i przedmiotu względem środka zwierciadła.

Twierdzenie 21

¹ W oryg.: *reflexionem perfectam*. Wydaje się, że przez ten zwrot rozumie autor odbicie, przy którym odbija się całe światło, tzn. nie może wystąpić sytuacja, gdy część światła ślizga się po powierzchni zwierciadła.

Twierdzenie 22

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I znajdujemy rysunki, które różnią się wyglądem od rysunku 18B i 19B. Spowodowane to jest innymi wielkościami poszczególnych odcinków. Są one również odbiciem zwierciadlanym w płaszczyźnie linii GF. Rysunki 18A i 19A w rękopisach, wydaniu I oraz wydaniu Risnera są takie same.

² Rysunek ten w przeciwieństwie do rysunku 18B jest w rękopisach i wyd. I taki sam jak u Risnera. Na rysunku tym (18A) wykonuje Witelo pomocniczą konstrukcję. Długości odpowiednich odcinków i odpowiednie kąty na obydwu rysunkach są sobie równe. Zamieszczanie tego rysunku ma na celu wykazanie równości szeregu kątów i proporcjonalności odcinków znajdujących się na rys. 18B.

³ W oryg.: *ergo per EE V,18 erit coniunctim proportio lineae ZD ad QD...*

Twierdzenie EE V,18 mówi, że:

jeżeli $ZD = ZQ + QD$ i $OK = OF + FK$

oraz $\frac{ZQ}{QD} = \frac{OF}{FK}$,

to

$$\frac{ZD}{QD} = \frac{OK}{FK}.$$

Przysłówek „łącznie” (*coniunctim*) oznacza w tym przypadku sumę odcinków.

⁴ W oryg.: *ergo per EE V,17 divisim proportio IQ ad QD, sunt...* Twierdzenie EE V,17 mówi:

jeżeli

$$ID=IQ+QD \text{ i } MK=MF+FK$$

oraz

$$\frac{ID}{QD} = \frac{MK}{FK},$$

to

$$\frac{IQ}{QD} = \frac{MF}{FK}.$$

Przysłówek „oddzielnie” (*divisim*) oznacza w tym przypadku część odcinka.

⁵ Począwszy od następnego zdania Witelo dowodzi, że: linia HD przetnie się z linią AG w punkcie A. Do tego wniosku dochodzi po dość długim wywodzie kończącym się pod koniec tego akapitu. Swoje rozważania zamyka konkluzją: „Linia GA jest więc linią, którą linia HD odcina od linii AG, i tak linia HD przecina się z linią AG w punkcie A”. Wywód ten miejscami sprawia wrażenie, jak gdyby był wewnętrznie sprzeczny. Wszelkie wątpliwości usuwa jednak stwierdzenie zawarte w powyżej cytowanym zdaniu.

⁶ Rozważania Witelona możemy zapisać w ten sposób: ponieważ znamy stosunki

$$\frac{BD}{DH} \text{ i } \frac{DH}{DL},$$

to zachodzi:

$$\frac{BD}{DL} = \frac{BD}{DH} \times \frac{DH}{DL}.$$

⁷ Ta część dowodu polega na wykazaniu sprzeczności.

⁸ W tym miejscu zaczyna Witelo drugą część dowodu twierdzenia, w której wyjaśnia, kiedy nie istnieje taki punkt odbicia, w którym promień odbity trafi do oka. Przeprowadza od nowa bardzo podobną konstrukcję jak na rysunku 18B. Zamieszcza również rysunek z pomocniczą konstrukcją (rys. 19A), a jego cel jest taki sam jak w pierwszej części dowodu. Korzystanie z konstrukcji pomocniczej zamieszczonej na rys. 19A nie zostało jednak wyraźnie zaznaczone w tekście.

⁹ W oryg.: *secundum dispositionem figurae*. Rzeczownik *figura* nie oznacza rysunku, ale chodzi raczej o zwrócenie uwagi na wzajemny układ zwierciadła, przedmiotu i oka. Dla jasności przekładu w miejscu rzeczownika *figura* wstawiliśmy nazwy elementów, które tworzą ten układ.

¹⁰ Z kontekstu wynika, że jeden z wymienionych kątów musi być większy od kąta prostego.

¹¹ Wymienione kąty znajdujemy tylko na poprzednim rysunku 18A, ale i przeprowadzone tutaj rozważania są jeszcze związane z poprzednią częścią dowodu.

¹² W tym miejscu zaczyna się właściwa, druga część dowodu.

¹³ Treść tego zdania nie wynika z poprzedniego tekstu, ale z poprzedniej części dowodu tego twierdzenia. Autor w drugiej części dowodu często bez uprzedzenia nawiązuje do części pierwszej.

¹⁴ W tym miejscu autor używa w dowodzie rysunku pomocniczego 19A.

¹⁵ Oznaczenie punktu X i linii ZX stanowią jedyne różnice między rysunkami 18B i 19B.

¹⁶ Stwierdzenie to wynika z EE I,13.

¹⁷ Linia SFP występowała uprzednio na rysunku 18A. Jest także zaznaczona na rysunku 19A. Autor pod słowem „wcześniejszy” rozumie linię na rysunku 18A. Dalszy ciąg wywodów dotyczy „nowej” linii SFP, tzn. zamieszczonej na rysunku 19A.

¹⁸ Do obu kątów SPK na rys. 19A odnoszą się uwagi podane w przyp. 17.

¹⁹ Do tego miejsca mają również odniesienie uwagi zawarte w przyp. 17.

Komentarz

Dowód twierdzenia składa się z dwóch części. W pierwszej części autor zakłada, że są spełnione warunki podane w twierdzeniu 21, tzn. że linia padania tworzy z półśrednicą zwierciadła poprowadzoną do punktu odbicia kąt większy od kąta prostego. W takim przypadku jest możliwe znalezienie punktu odbicia przy danym położeniu przedmiotu i oka. Do tej części dowodu odnoszą się rysunki 18A i 18B. W części drugiej Witelo zakłada, że linia padania tworzy z półśrednicą zwierciadła poprowadzoną do punktu odbicia kąt nie większy od kąta prostego. Dowodzi, że w takim przypadku nie istnieje taki punkt odbicia, aby odbite formy mogły trafić do oka, a dowód polega na wykazaniu sprzeczności. Do tej części dowodu odnoszą się rysunki 19A i 19B.

Twierdzenie 23

¹ Wydaje się, że tym zwrotem określa autor prostopadłe padania, które tworzą ten sam kąt ze średnicą widzenia.

² To wyrażenie jest nieściśle. W rzeczywistości linie te spotykają się w środku oka, to jest w punkcie E, i w tym właśnie punkcie przecinają się ze średnicą widzenia.

³ Witelo mówi w tym akapicie o prostopadłych padania, których formy punktów odbijają się od zwierciadła i wpadają do oka.

Komentarz

Mimo że Witelo przyjmuje błędny mechanizm powstawania obrazu w oku, twierdzenie to jest prawdziwe z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy. Wynika ono ze wzoru (1). Ponieważ Risner nie zamieścił odsyłacza do wcześniejszych autorów, można przyjąć, że sformułowanie i dowód tego twierdzenia pochodzą od Witelona.

Twierdzenie 24

¹ W rękopisach A,C,H,S mamy odbicie zwierciadlane na linii GD rysunku z wydania Risnera. W rękopisach A,H,C brak na rysunku linii GD. Ponadto w rękopisie A nie jest zaznaczony punkt Z. W wydaniu I brak linii GD.

² W oryg.: *locus imaginis reflexae* – miejsce obrazu odbitego. Witelo często jest niedokładny w swoich wyrażeniach. Z treści książki wynika, że chodzi o miejsce obrazu punktu, którego forma odbija się do oka. Łaciński zwrot powinien być: *locus imaginis formae puncti qui reflectitur*.

³ Należy zaznaczyć, że w tym miejscu odstępkuje Witelo od starożytnej tradycji i posługuje się pojęciem kąta padania i kąta odbicia w znaczeniu używanym obecnie, o czym mówiliśmy w twierdzeniu 8, przyp. 2.

Komentarz

Twierdzenie i jego dowód są zgodne z twierdzeniem 11 i przyjętym przez Witelona mechanizmem powstawania obrazu w oku. Twierdzenie to jest tylko częściowo prawdziwe, tzn. jeśli oko będzie znajdowało się na głównej osi optycznej (jak umieszcza je Witelo). Obraz pozorny, a z takim mamy do czynienia, powstaje rzeczywiście wewnątrz

zwierciadła, ale jego położenie będzie zależało od tego, jakimi promieniami będzie ograniczona część wiązki odbitej, która trafia do oka. Jednym z tych promieni jest promień, o którym mowa jest w twierdzeniu, o drugim oczywiście nie ma mowy, bo jest on zbyt długi w przyjętym mechanizmie powstawania obrazu w oku. Tak więc miejsce obrazu nie musi być na osi, na której leży przedmiot (punkt P w twierdzeniu), i będzie zależne od innego promienia ograniczającego wiązkę wpadającą po odbiciu od zwierciadła do oka (patrz rozdział I.3.4).

Twierdzenie 25

¹ Wyrażeniem: „linia odbicia, której część wewnętrzna koła jest równa półśrednicy koła” określa Witelo linię poprowadzoną od środka oka do części powierzchni zwierciadła kulistego wypukłego widzianej okiem, która po przedłużeniu do przeciwległej części powierzchni będzie miała wewnątrz kuli zwierciadła długość równą półśrednicy kuli. Jest to linia GHK na rysunku 22. W twierdzeniu 24 była to rozpatrywana linia odbicia – stąd prawdopodobnie to określenie linii GHK. Trzeba zaznaczyć, że ta wspomniana w tym miejscu linia odbicia jest linią hipotetyczną, ponieważ wzdłuż niej w omawianym układzie nie rozprzestrzeniają się formy oglądanego punktu (punkt P na rysunku 22) do oka. Wprowadzenie jej ma na celu wyznaczenie określonego punktu na powierzchni zwierciadła.

² W rękopisie A rysunek jest obrocony o 90° . W rękopisach C, H, S oraz wydaniu I znajduje się odbicie zwierciadlane na linii GZD.

³ Odnosi się tu w całości treść przypisu 1.

⁴ Część GI linii GIS jest linią, wzdłuż której rozprzestrzenia się forma punktu P do oka po odbiciu od zwierciadła w punkcie I. Zgodnie z definicją V,4, jest to prawdziwa linia odbicia. Z powyższych rozważań wynika, że Witelo używa w dowodzie tego twierdzenia i twierdzenia 26 określenia „linia odbicia” w dwojakim znaczeniu; w jednym odnoszącym się do hipotetycznej linii, a w drugim przypadku do rzeczywistej linii. Czytelnik czytając wywody Witelona musi pamiętać o tym podwójnym znaczeniu tego zwrotu.

Komentarz

Zgodnie z dzisiejszym stanem wiedzy twierdzenie to jest tylko częściowo prawdziwe. Prawdą jest, że gdy wiązka odbije się od zwierciadła, jak to zakłada autor, to obraz pozorny powstanie wewnątrz zwierciadła, ale w zasadzie nie będzie się znajdował na osi (prostopadłej padania). Położenie jego będzie zależne od tego, która część wiązki wpadnie do oka. Jeżeli do oka będą wpadać promienie przyosiowe, tzn. biegnące w pobliżu osi, na której leży punkt P na rysunku 22 (oś ta jest prostopadłą padania według terminologii Witelona), to wówczas obraz pozorny punktu P będzie na osi. Patrz uwagi zawarte we Wstępie, rozdział I.3.4 oraz komentarz do twierdzenia 24.

Twierdzenie 26

¹ W dalszym ciągu chodzi o tę samą hipotetyczną linię odbicia, o której mowa jest w twierdzeniu 25, por. przypis 1 do twierdzenia 25.

² W rękopisie H brak linii DR.

³ W dalszym ciągu mowa o hipotetycznej linii odbicia, por. przyp. 1.

⁴ W tym miejscu mowa jest o rzeczywistej linii odbicia, por. przypis 4 do twierdzenia 25.

⁵ Miejsce, gdzie powstaje obraz, jest zależne od odległości punktu, który oglądamy w zwierciadle, tj. od punktu odbicia N.

⁶ Chodzi tu o twierdzenie 24 i 25 oraz dotychczasowy dowód twierdzenia 26.

⁷ Witelo odsyła do rysunków 21, 22 i 23, które czytelnik musi sobie odpowiednio wyobrazić. Przeprowadzenie dowodów dla punktów łuku ZA wymaga bowiem dokonania odbicia zwierciadlanego rysunków wzdłuż linii GZD.

⁸ W oryg.: *diameter*. Jak wynika z rysunku 23, słowo to zostało użyte na określenie średnicy widzenia.

Komentarz

To twierdzenie, podobnie jak obydwa poprzednie twierdzenia, jest tylko częściowo prawdziwe. Przypadek omawiany w twierdzeniu dotyczy promieni pozaosiowych, tzn. promieni, dla których kąt RDN na rysunku 23 jest duży (kąt RDN odpowiada kątowi φ na rysunku W.7). Jak pokazano w rozdziale I.3.4 *Wstępu*, w przypadku promieni pozaosiowych miejsce obrazu w sposób istotny zależy od tego, która część wiązki odbitej trafia do oka. Zgodnie z założeniem, w analizowanym przypadku do oka trafia część wiązki odbitej od łuku HB. Obraz pozorny powstanie na przecięciu promieni odbitych i jego miejsce będzie zależało od tego, która część odbitej rozbieżnej wiązki trafi do oka. Przy założeniach przyjętych przez autora obraz widziany przez oko punktu R nie powstanie na osi RD w punkcie L, a punktu E w punkcie Q na osi ED, ani punktu C na osi DC. Jeżeli przyjmiemy, że jedynym z promieni ograniczających wiązkę odbitą jest promień NG, to położenie obrazu będzie zależne od tego, pod jakim kątem pada na zwierciadło drugi promień ograniczający wiązkę. Patrz uwagi zawarte we *Wstępie*, rozdział I.3.4 oraz komentarz do twierdzeń 24 i 25.

Twierdzenie 27

¹ Twierdzenie to wynika z twierdzeń 24 – 26 i w pewnym sensie można je traktować jako ich uzupełnienie. Sformułowanie twierdzenia jest wyjątkowo niedokładne, na co wskazują nasze uzupełnienia, wprowadzone do tekstu, które wynikają z treści dowodu. Dla przykładu, Witelo mówi w tym twierdzeniu o średnicach (*diametri*), chociaż na rysunku 23, do którego odsyła czytelnika, zostały zaznaczone jedynie półśrednice. Podobnie wyrażenie „niżej położone” (*demisior*) odnosi się raczej do wyobrażeniowych stosunków przestrzennych niż rysunku 23, ponieważ trudno sobie wyobrazić stosunki: wyżej – niżej pomiędzy stycznymi do powierzchni kuli i do niej prostopadłymi.

² W oryg.: *quoniam catheti incidentiae et linea reflexionis illorum punctorum in illis punctis concurrere non possunt*. Witelo bardzo często posługuje się zaimkami. Ich nagromadzenie powoduje niejasność tekstu, jak na przykład w tym zdaniu, w którym mamy dwukrotnie użyte wyrażenie „tych punktów”, ale za każdym razem odnosi się ono do innych punktów. Interesujące nas zdanie należy rozumieć w ten sposób: ponieważ prostopadłe padania i linie odbicia tych punktów [tzn. punktów, których miejsce obrazu znajduje się na powierzchni zwierciadła] nie mogą się przecinać w tych punktach [tzn. punktach leżących na łuku AB].

³ Tzn. średnicach przechodzących przez łuk AB.

⁴ W oryg. acc. *diametros* oczywisty błąd. Musi być nominativus, gdyż jest to podmiot. W rękopisie S mamy formę *diameter* i dopisana litera „o” nad wyrazem.

⁵ Na przykład linia DC na rysunku 23.

⁶ Mowa tu o stycznej do powierzchni kuli wyznaczającej widoczną część zwierciadła. Na rysunku 23 będzie to np. linia GB.

Komentarz

Na podstawie tego, co powiedziano w rozdziale I.3.4 *Wstępu*, wydaje się, że Witelo nie przeprowadził obserwacji, o których wspomina w tym twierdzeniu, a jego rozważa-

nia tutaj przedstawione mają charakter typowo teoretyczny i są konsekwencją twierdzenia 11. Patrz uwagi zawarte we *Wstępie*, rozdział I.3.4 oraz komentarz do twierdzeń 11 i 24 – 26.

Twierdzenie 28

¹ W rękopisie A znajdujemy odbicie zwierciadlane na linii NFD, a w rękopisach C i S oraz wydaniu I rysunek jest ten sam. W rękopisie H jest wprawdzie taki sam rysunek, ale brakuje na nim oznaczenia punktu B.

² Wyrażenie: „przy punkcie F” w tym przypadku mowa jest o wierzchołku kąta w punkcie F.

³ Tzn. punktu F.

Twierdzenie 29

¹ W oryg.: *diameter*. Z kontekstu tego twierdzenia wynika, że słowo to zostało użyte na określenie linii prostej przechodzącej przez środek kuli zwierciadła. W innych miejscach używa Witelo określenia „prostopadła padania”.

² W rękopisach A, C, S mamy półokrąg, w rękopisie H oraz wydaniu I pełny okrąg jak u Risnera.

³ Średnica, o której tutaj jest mowa, przecina zwierciadło poza punktem styczności w części niewidocznej dla oka. Określenie „poniżej punktu styczności” odnosi się do sytuacji na rysunku 25, na którym rzeczywiście punkt taki znajdowałby się poniżej punktu styczności.

⁴ Wywód Witelona jest następujący: Przyjmijmy, że punkt Q, położony między punktami G i T jest miejscem obrazu i poszukajmy położenia takiego punktu D na przedłużeniu linii AG (tj. linii AGD), którego miejsce obrazu będzie w punkcie Q.

Twierdzenie 30

¹ Por. objaśnienie w przypisie 1 do twierdzenia 29.

² Tzn. w części niewidocznej dla oka.

³ W rękopisie H i wydaniu I mamy rysunek obrócony w lewo o kąt 90° i zmienione proporcje. To sprawia, że rysunek wydaje się inny.

⁴ Wyrażenie: „ponad punktem G” dotyczy sytuacji przedstawionej na rysunku 26.

⁵ Wyrażenia: „poniżej” i „powyżej” tutaj także odnoszą się do położenia linii na rysunku 26.

⁶ Wspomniana linia odbicia nie jest równoległa do linii BF. Natomiast równoległa do linii BF będzie linia padania formy punktu P (wcześniej nie wymienianego oddzielnie w tekście), która odbija się w punkcie M po linii MA. To zdanie jest jednak niezgodne z tokiem całego wywodu.

⁷ W punktach T i O, jak wynika z poprzedniego zdania i zdania następnego oraz twierdzenia 28, nie powstaje obraz. Obrazy punktów średnicy BF powstają na odcinku TO z wyłączeniem tych właśnie punktów.

⁸ O sposobach widzenia mówi Witelo w księdze III i IV (por. Wit. Persp. PPI i Wit. Persp. PPII). Jak wynika ze wstępu do księgi III *Perspektywy* (Wit. Persp. PPII, s. 176), punkt T jest widziany w sposób prosty dlatego, że jego forma wpada bezpośrednio do oka, a nie odbija się od powierzchni zwierciadła. Obserwatorowi zaś jedynie wydaje się, że widzimy punkt w wyniku odbicia się jego formy od powierzchni zwierciadła.

Komentarz

Twierdzenie to i twierdzenia 31 i 32 są zgodne z mechanizmem powstawania obrazu w oku, przyjętym przez Witelona, oraz stanowią wynik zastosowania konstrukcji obrazu w zwierciadle płaskim do zwierciadeł wypukłych. Zgodnie z dzisiejszym stanem wiedzy, są one częściowo prawdziwe. Patrz uwagi zawarte w rozdziale I.3.4 i I.4.2 *Wstępu*.

Twierdzenie 31

¹ W rękopisach A, C, H, S występuje ponadto druga linia styczna do okręgu oznaczona AC (punkt leży po drugiej stronie okręgu). W rękopisie H i wydaniu I mamy odbicie zwierciadlane na linii AZ.

² Tym punktem przecięcia jest punkt I, o którym mowa będzie poniżej.

³ Z twierdzenia 28, dotychczasowego tekstu i rysunku 27 wynika, że byłaby spełniona relacja: $UI > RL$.

⁴ Z wywodów i rysunku 27 wynika, że chodzi tu o punkty położone na średnicy BL przedłużonej poza punkt E.

Twierdzenie 32

¹ Risner umieszcza w nawiasie wyłącznie pierwszy fragment tekstu „której część wewnątrz koła”, gdy tymczasem pozostałe słowa „jest równa półśrednicy koła” należą również do tej myśli. Dlatego całe zdanie względne trzeba umieścić w nawiasie.

² W rękopisach A, C, S brak oznaczenia punktu T. Literą C jest oznaczony punkt styczności drugiej linii poprowadzonej od punktu A do okręgu (jest on nie wykorzystywany w dowodzie twierdzenia). Poprowadzono również dodatkową linię AS między liniami AQ i AO. W wydaniu I znajdujemy taki sam rysunek jak w rękopisach A, C, S, jednak bez oznaczenia punktu C. W rękopisie H brak tego rysunku. Należy podkreślić, że w wydaniu R brakuje linii AS, chociaż sam punkt S jest zaznaczony. Dlatego linię AS dodano na zamieszczonym rysunku.

³ Słowo „średnica” określa średnicę przedłużoną poza okrąg. Por. twierdzenie 29 przyp. 1.

⁴ W tekście łacińskim występuje słowo *diameter* (średnica) w znaczeniu linii, która jest półśrednicą przedłużoną poza okrąg. Trudno sobie wyobrazić linię poprowadzoną od obwodu do linii BP, o której mówi tutaj Witelo, która jest linią hipotetyczną, bo, jak wynika z następnego zdania, dowód polega na wykazaniu sprzeczności.

⁵ Uważamy, że chodzi tu o linię, o której była mowa w poprzednim zdaniu, tzn. o linię MO.

⁶ Jest to zapewne określenie linii, która jest równa półśrednicy, to jest linii MO.

⁷ Tzn. poprowadzona od oka A tak, aby padała pomiędzy punkty Q i P.

⁸ W ten sposób określa Witelo linie poprowadzone ze środka zwierciadła, to jest z punktu B, które przecinają łuk OH (patrz także przyp. 3 i 4).

⁹ Oznaczenia FY, L, IL oraz LE odnoszą się do rysunku 27 z twierdzenia 31.

¹⁰ Dokładniej mówiąc, nie są to obrazy, jak pisze Witelo, ale przedłużone linie odbicia form punktów linii FY, które padają na część IL linii BY.

¹¹ Tutaj jest taka sama sytuacja jak w przypadku łuku OH (por. przyp. 8).

Twierdzenie 33

¹ Rysunku tego nie ma w żadnym przekazie poza wydaniem Risnera i dlatego do liczby dodaliśmy literę „a”, bo prawdopodobnie pochodzi od Risnera.

² W całym dowodzie tego twierdzenia rzeczownik „średnica” występuje w takim znaczeniu, o którym mówiliśmy w poprzednim twierdzeniu (przyp. 3 i 4 do twierdzenia 32), tzn., że przez „średnicę” należy rozumieć linię poprowadzoną od środka koła poza jego okrąg (por. także twierdzenie 29 przyp. 1).

³ W oryg.: *Unde omnes passiones probatae secundum quoscumque punctos circuli DGZC, in completis circulis accidunt per totam speculi superficiem*. Wyrażenie *in completis circulis* należy rozumieć tak, że cała kula składa się z nieskończenie wielu kół.

⁴ W tekście Risnera występuje zaimek *istorum*, który wskazuje na rzeczownik rodzaju męskiego lub nijakiego, gdy tymczasem, jak wynika z kontekstu, zaimek ten zastępuje rzeczownik *imagines* i dlatego powinna być forma gen. pl. rodz. żeń. *istarum*.

Twierdzenie 34

¹ W oryg.: *superficierum ambarum reflexionis*. Tutaj po raz pierwszy jest mowa o dwóch płaszczyznach odbicia, co należy rozumieć w ten sposób, że są to dwie płaszczyzny odbicia po jednej do każdego oka.

² W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I mamy półokrąg, który odpowiada widocznej części zwierciadła.

³ Przekład tego zdania przynosi próbę interpretacji łacińskiego tekstu, który jest bardzo zwięzły i z tego powodu niejasny. Tekst łaciński jest następujący: *Quia enim AB et BD diametri visuales secant ex circulis communibus superficiebus speculi et reflexionis arcus, et continent angulos aequales cum catheto CD in centro D. Palam per 26 p³, quia illi arcus lineas CD et BD ex una parte, et ex alia lineas CD et AD interiacentes duo puncta reflexionis, quae sunt H et G, et punctum O, sunt aequales per 26 p³.*

⁴ Linie BH i AG nie przecinają się. Przetną się one dopiero po ich przedłużeniu.

⁵ O widzeniu wielu przedmiotów mówi Witelo w twierdzeniach od IV,99 do IV,109 (por. Wit. Persp. PPII, s. 63 oraz 190 – 205).

Twierdzenie 35

¹ Podobnie jak w poprzednich twierdzeniach rzeczownik „średnica” oznacza linię przechodzącą przez środek koła.

Twierdzenie 36

¹ Tekst twierdzenia w języku łacińskim jest następujący: *In quibusdam sitibus possibile est a speculis sphaericis convexis, pluribus visibus rem apparere unamquamque imaginem habentem*. Brak referencji do Alhazena i innych autorów wskazuje, że twierdzenie to zostało sformułowane przez samego Witelona, na co wskazywałaby również nieporadność stylistyczna. Sens tego twierdzenia staje się nieco jaśniejszy po przestudiowaniu dowodu, a dokładniej mówiąc po przeanalizowaniu ostatnich zdań dowodu. Wynika z nich, że określenia: *plures visus* czy *ambo visus* nie odnoszą się do dwojga oczu jednego obserwatora, a chodzi o oczy różnych obserwatorów umieszczone w określony sposób lub oczy jednego obserwatora, który zmienia miejsce obserwacji tak, że każdorazowo oczy znajdują się w określonych miejscach. W przypadku omawianym w twierdzeniu są to punkty G i H oraz wszystkie punkty znajdujące się na okręgu przechodzącym przez punkty G i H, prostopadłym do linii CD.

² W rękopisach A i S zamiast łuku koła mamy dwa łuki przecinające się w punkcie O. Jest to niezgodne z przyjętymi przez Witelona założeniami.

³ W wydaniu I znajdujemy odsyłacz do twierdzenie I,5 *Perspektywy*, które nie ma tu zastosowania. Risner poprawił ten błąd i dlatego przyjęliśmy lekcję z wydania Risnera.

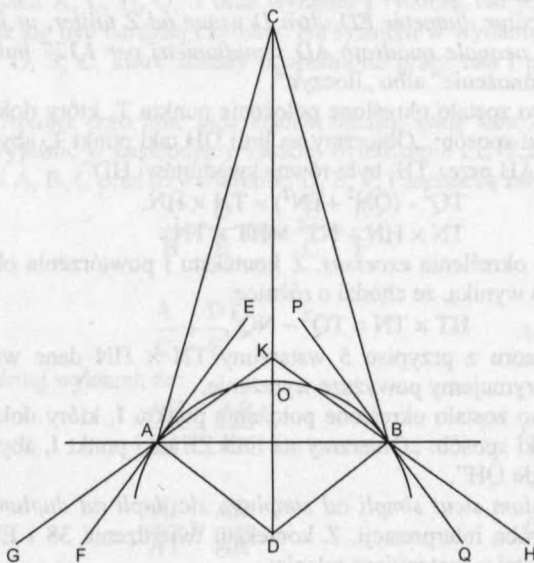
⁴ O tego rodzaju kątach, ograniczonych prostą i krzywą, dzisiaj się nie mówi.

⁵ Odwoływanie się w tym miejscu do twierdzenia EE III,16 jest niezrozumiałe.

⁶ W wydaniu I znajdujemy odsyłacz do twierdzenia I,23 *Perspektywy*, które nie ma zastosowania. Risner poprawił ten błąd i dlatego przyjęliśmy lekcję z wydania Risnera.

⁷ Risner w swoim wydaniu powołuje się błędnie na twierdzenie I,20 *Perspektywy*. W wydaniu I jest poprawiona referencja V,20 i taką podajemy w przekładzie.

⁸ Jeżeli umieścimy oczy w punktach G i H, które leżą na ramionach kątów: $\angle GAC = \angle CAE$ i $\angle HBC = \angle CBP$ to do tak umieszczonych oczu nie może zejść odbicie formy punktu C. $\angle CAE$ i $\angle CBP$ są zgodnie z definicją V,11 kątami padania (rys. 30). Równe im kąty GAC i HBC nie będą jednak kątami odbicia (por. definicja V,12). Nie spełniają one bowiem relacji, jakie muszą zachodzić między nimi a kątami padania. Relacje te zostały przedstawione przez autora *Perspektywy* w wielu twierdzeniach książki V, np. w twierdzeniach 20, 26 i 33 oraz twierdzeniu VI,8, które mówi, że prostopadła poprowadzona z punktu odbicia dzieli kąt między linią padania i odbicia na połowę. Z tego powodu rysunek 30 jest mylący. Jeśli kątem padania formy punktu C jest $\angle CAE$ to kątem odbicia **musi być** równy mu $\angle GAF$, zaś jeżeli kątem padania jest $\angle CBP$, to kątem odbicia **musi być** równy mu $\angle HBQ$. Tak określone kąty odbicia spełniają warunek podany w twierdzeniu VI,8. Gdy umieścimy oczy w punktach G i H leżących na ramionach kątów GAF i HBQ to zobaczymy formę punktu C. Na rysunku P2 przedstawiono sytuację omówioną przez Witelona w poprzednim zadaniu.



Rys. P2

Tekst poprzedniego zadania od słów: „i niech to będzie kąt GAC” powinien, naszym zdaniem, być: i niech to będzie kąt GAF, a w punkcie B, który jest końcem linii CB, utworzymy kąt, równy kątowi PBC i niech to będzie kąt HBQ, a kąt HBQ będzie równy kątowi GAF. Dalszy ciąg dowodu dotyczący punktu przecięcia K jest poprawny.

⁹ Zgodnie z tym co powiedziano w przypisie 8 $\angle HBQ = \angle GAF$ z założenia, bo są kątami odbicia i to zdanie jest zbędne.

¹⁰ W oryginale czytamy: *tunc res una diversis visibus in locis videbitur diversis*. Nawiązując do wyjaśnień przedstawionych w przypisie 1 do tego twierdzenia, wyrażenie „różne oczy” (*diversis visibus*) należy rozumieć w ten sposób, że chodzi o oczy, które umieszczone są w miejscach nie spełniających warunków podanych w twierdzeniu, wspomnianych w przypisie 1.

Komentarz

Trudno, a właściwie jest niemożliwe, powiedzieć dlaczego w tym twierdzeniu występuje tyle błędów. Nie jest z pewnością spowodowane brakiem wiedzy. O głębokiej wiedzy matematycznej i fizycznej Witelona dowodnie świadczy cała treść *Perspektywy*.

Twierdzenie 37

¹ W rękopisach A, C, H, S rysunek jest podobny, chociaż układ linii jest inny, co nie ma merytorycznego znaczenia. W rękopisie H linia TL jest przedłużona poza punkt L. W wydaniu I brakuje tego rysunku.

² W oryg., *linea visa oblique incidens speculo*. Rzecz jasna, że to nie linia pada na zwierciadło, ale formy jej punktów.

Twierdzenie 38

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I na rysunkach jest zaznaczona linia QH, a punkt Q jest „odsunięty” dalej od linii EO.

² W oryg.: *Educatur diameter ED ultra D usque ad Z taliter, ut illud, quod fit ex ductu EZ in ZD sit aequale quadrato AD semidiametri per I,127 huius*: Rzeczownik *ductus* oznacza tu „mnożenie” albo „iloczyn”.

³ Tak ogólnikowo zostało określone położenie punktu T, który dokładnie powinien zostać opisany w taki sposób: „Obierzmy na linii DH taki punkt T, aby to, co otrzymujemy z pomnożenia AH przez TH, było równe kwadratowi HD”.

$$^4 \text{ Tzn. } TQ^2 - (QN^2 + TN^2) = TN \times HN.$$

$$^5 \text{ Tzn. } TN \times HN + NT^2 = HT \times TN.$$

⁶ W oryg. użyto określenia *excessus*. Z kontekstu i powtórzenia obliczeń wykonanych przez Witelona wynika, że chodzi o różnicę:

$$\text{tzn. } HT \times TN = TQ^2 - NQ^2,$$

bo: jeżeli do wzoru z przypisu 5 wstawimy $TN \times HN$ dane wzorem podanym w przypisie 4, to otrzymujemy powyższe wyrażenie.

⁷ Tak ogólnikowo zostało określone położenie punktu I, który dokładnie powinien zostać opisany w taki sposób: „Obierzmy na linii ZE taki punkt I, aby stosunek AI do AH był taki jak TQ do QH”.

⁸ W oryg.: *quoniam sicut simpli ad simplum, sic dupli ad duplum*. Przekład tego zdania jest naszą próbą interpretacji. Z kontekstu twierdzenia 38 i EE VI,20 wynika bowiem, że chodzi tutaj o następującą relację:

$$\text{jeżeli } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ to } \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2}.$$

Słowo *duplum* w cytowanym zdaniu nie znaczy „podwójny”, tylko „dwukrotnie pomnożony”, czyli w terminologii tłumacza Euklidesa J.Czecha, „dwumnożny” (por. EE V, opisanie 10).

$$^9 \text{ Tzn. } \frac{AI^2 - AH^2}{AH^2} = \frac{HT \times TN}{QH^2}.$$

$$^{10} \text{ Tzn. } \frac{OH}{AH} = \frac{AI^2 - AH^2}{AH^2}.$$

¹¹ Mowa jest o stosunku wielkości złożonej $OA = AH + HO$ do jej części,

$$\text{tzn. } \frac{AO}{HA}.$$

¹² Dla jasności tekstu można dodać: z linii OA i z linii IA .

¹³ Jak powiedziano wyżej: $HD < \frac{1}{4} AD$,

czyli

$$4HD < AD,$$

ale

$$HA = AD + HD,$$

a więc:

$$AD = HA - HD;$$

wynika zatem, że:

$$4HD < HA - HD,$$

stąd otrzymamy:

$$5HD < HA.$$

¹⁴ Tak ogólnikowo zostało określone położenie punktu M , który dokładnie powinien zostać opisany w taki sposób: „Obierzmy, jak podano w twierdzeniu I,3 tego dzieła, na linii AI taki punkt M , aby stosunek IM do MT był taki jak IA do AT .” To samo wyjaśnienie odnosi się do punktu L , o którym jest mowa poniżej.

¹⁵ W rękopisach A , C , H , Q , S oraz wydaniu I rysunek ten jest znacznie większy i przez to wydaje się być bardziej czytelny. Na rysunku w wydaniu Risnera brak oznaczenia punktów O , S , C , które zostały uzupełnione przez nas i podane w nawiasach kwadratowych.

¹⁶ W oryg.: *Ablatis ergo hinc inde eisdem mediis, quae sunt AI et AB*. Myśl tego zdania można wyjaśnić w następujący sposób: twierdzenie EE V,22 mówi: jeżeli dane są trzy wielkości A , B , C oraz trzy wielkości D , E , F , i zachodzą związki:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E} \text{ oraz } \frac{B}{C} = \frac{E}{F},$$

to

$$\frac{A}{C} = \frac{D}{F}. \quad (1)$$

Witelo wcześniej wykazał, że:

$$\frac{AH}{AI} = \frac{AP}{AB}, \quad (2)$$

oraz

$$\frac{AI}{AT} = \frac{AB}{AR}. \quad (3)$$

Wobec tego z EE V,22 wynika, że:

$$\frac{AH}{AT} = \frac{AP}{AR}.$$

I tak pisze Witelo. Z twierdzenia EE V,22 i analizy tekstu wynika, że wyrazy środkowe to mianowniki w proporcji (1) i liczniki w proporcji (2).

¹⁷ Od tego miejsca, aż do słów: „Wobec tego stosunek różnicy kwadratu AH i kwadratu HP do różnicy kwadratu AT i kwadratu TR jest taki jak linii AH do linii AT ”, geometryczne wywody Witelona są zawile. Poniżej przedstawiamy je w postaci alge-

braicznej, która jest znacznie prostsza. Ponieważ kąt HPA jest rozwarty, to zgodnie z EE II,12:

$$AH^2 = HP^2 + AP^2 + 2AP \times \frac{1}{2} PB \quad (1)$$

Czynnik $\frac{1}{2} PB$ występuje dlatego, że trójkąt HPB jest równoramienny i HB=HP.

Wobec tego:

$$AH^2 = HP^2 + AP^2 + AP \times PB, \quad (2)$$

z EE II,3 otrzymujemy

$$AB \times AP = AP \times PB + AP^2,$$

bo

$$AB = AP + PB,$$

stąd

$$AP \times PB = AB \times AP - AP^2. \quad (3)$$

Wstawiając (3) do (2) znajdujemy

$$AH^2 = HP^2 + AB \times AP, \quad (4)$$

i podobnie

$$AT^2 = TR^2 + AB \times AR, \quad (5)$$

z (4) otrzymujemy:

$$AB \times AP = AH^2 - HP^2, \quad (6)$$

a z (5)

$$AB \times AR = AT^2 - TR^2. \quad (7)$$

Dzieląc stronami (6) przez (7) dostajemy:

$$\frac{AP}{AR} = \frac{AH^2 - HP^2}{AT^2 - TR^2}. \quad (8)$$

Ponieważ wcześniej Witelo wykazał, że:

$$\frac{AP}{AR} = \frac{AH}{AT},$$

a więc

$$\frac{AH}{AT} = \frac{AH^2 - HP^2}{AT^2 - TR^2}.$$

To wyrażenie oddaje treść ostatniego zdania analizowanego przez nas fragmentu.

¹⁸ Całe to zdanie w oryginale ma postać: *Ducatur ergo linea AB in ambas lineas AP et AR et provenient duo praemissi excessus, quorum alterius ad alterum proportio per EE VI,1 est sicut lineae AP ad lineam AR, cum ipsorum fit eadem altitudo, quae est lineae AB.* W nawiązaniu do przypisu 6 należy wyjaśnić, że w powyższym zdaniu rzeczownik *excessus* oznacza iloczyn, a nie różnicę, co wynika z analizy całego kontekstu tego zdania i powtórzenia obliczeń Witelona. Rzeczownik *altitudo*, który oznacza „wysokość”, tutaj przetłumaczyliśmy przez „wielkość” i „długość”. Witelo używa w tym miejscu słowa „wysokość” w nawiązaniu do cytowanego twierdzenia EE VI,1, które mówi: „Trójkąty i równoległoboki mające tę samą wysokość są między sobą jak ich podstawy” (przekład J. Czech). W łacińskim przekładzie Euklidesa występuje słowo *altitudo*. Pozostaje jednak niejasna pierwsza część tego zdania, gdyż na rysunku 33 półśrednica zwierciadła AB pokrywa się z liniami AP i AR, a więc nie tworzy figury. Naszym zdaniem, prawdopodobnie Witelo ma na myśli trójkąty bądź równoległoboki, których podstawy są odpowiednio liniami AP i AR, a wysokość AB. Tylko w takim przypadku byłoby uzasadnione powoływanie się na twierdzenie EE VI,1.

¹⁹ Tzn.

$$AH^2 = AH \times HU + AH \times AU,$$

bo

$$AH = AU + HU.$$

²⁰ Tzn.
bo

$$AT^2 = AT \times AU + AT \times TU,$$

$$AT = AU + UT.$$

²¹ Rozważania Witelona zawarte we fragmencie tekstu zaczynającym się od słów: „kwadrat linii AH wraz z kwadratem linii HB jest więc...” można przedstawić następująco:

$$AH^2 + HB^2 - 2AH \times HF = AD^2, \quad (1)$$

zaś

$$2AH \times HF = 2AH \times HD + 2AH \times DF, \quad (2)$$

oraz

$$2AH \times HD + AD^2 = AH^2 + HD^2, \quad (3)$$

wstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$AH^2 + HB^2 - 2AH \times HD - 2AH \times DF = AD^2, \quad (4)$$

czyli:

$$2AH \times DF + AD^2 = AH^2 + HB^2 - 2AH \times HD, \quad (5)$$

odejmując stronami (5) od (3) znajdujemy:

$$0 = HD^2 - HB^2 + 2AH \times DF,$$

stąd

$$HB^2 = HD^2 + 2AH \times DF. \quad (6)$$

I tak pisze Witelo.

²² W oryginale: jest wyrażenie *et ita ei (sc. ductui)*. Z wcześniejszych obliczeń wynika, że jest tu alternatywa, a nie implikacja, jak to sugeruje tekst łaciński.

$$AT \times TK = AT \times (TD + DK) = AT \times TD + AT \times DK$$

równość ta zachodzi, ponieważ

$$TK = TD + DK,$$

patrz rysunek 33.

²³ Tak ogólnikowo zostało określone położenie punktu X, który dokładnie powinien zostać opisany w tak sposób: „Obierzmy taki punkt X, aby, zgodnie z EE VI,10, taki był stosunek TD do TX jaki jest AT do TD”.

²⁴ W oryginale: *proportio duplicata lineae*. Jeżeli

$$\frac{AH}{HD} = \frac{HD}{HT},$$

to

$$\frac{AH}{HT} = \left(\frac{AH}{HD} \right)^2.$$

Taką proporcję tłumacz Euklidesa J. Czech nazywa dwumnożną. Proporcja dwumnożna jest zdefiniowana w EE V, opisanie 10. J. Czech podaje ją w następującej formie: „Gdy trzy wielkości są proporcjonalne, mówi się, że pierwsza wielkość do trzeciej jest w stosunku dwumnożnym pierwszej do drugiej.” Wynika z tego, że przymiotnik dwumnożny oznacza podniesienie do kwadratu. Na tej podstawie wnioskujemy, że słowo *duplicate* u Witelona również oznacza w tym miejscu podniesienie do kwadratu. Patrz także przyp. 8.

²⁵ Z twierdzenia I,4 wynika: Jeżeli

$$AT > TD,$$

to

$$\frac{AT}{TD} > \frac{AT+TH}{TD+TH}.$$

W świetle twierdzenia I,4 i wywodów Witelona linią poprzedzającą jest linia AT, a następującą linia TD.

²⁶ U Risnera błędne oznaczenie AT, w rękopisie S jest HT. Taka lekcja wynika również z wywodów Witelona.

²⁷ Rozważania Witelona można przedstawić następująco:
ponieważ:

$$\frac{HA}{HD} = \frac{HD}{HT},$$

oraz

$$HD = 2HQ,$$

to zachodzi

$$\frac{HA}{2HQ} = \frac{HD}{HT},$$

czyli:

$$\frac{HA}{HQ} = \frac{2HD}{HT},$$

stąd wynika, że

$$\frac{HA}{HQ} = \frac{HD}{\frac{1}{2}HT}.$$

²⁸ To jest: $NA = IA$ oraz $AM = AB$ i $\angle DAM = \angle IAB$.

²⁹ W rękopisach i wydaniu I rysunki są umieszczone trochę przypadkowo. Stąd nie wiadomo dokładnie, który rysunek Witelo ma na myśli. Z przeprowadzonej przez nas analizy wynika, że chodzi o rysunek 34.

³⁰ Wyrażna nieścisłość. Witelo odsyła czytelnika do księgi I założenia 1, które tam określa jako *petitio*, a nie *suppositio*.

³¹ Od tego miejsca Witelo bez uprzedzenia zaczyna posługiwać się rysunkiem 35.

³² Wyrażenia „wyżej” i „niżej” występujące w tekście odnoszą się do położenia punktów na rysunku 35 i 36.

³³ Tekst niejasny.

³⁴ Od tego miejsca Witelo zaczyna się posługiwać rysunkiem 36. W rękopisach A, C, H, S układ linii na rysunku jest inny i są na nim inne proporcje. W wydaniu I brakuje tego rysunku.

³⁵ W tym położeniu, tzn. w powyżej analizowanym wzajemnym położeniu oka i linii NI.

³⁶ Tzn. takiego punktu nie można znaleźć na całej powierzchni zwierciadła.

³⁷ Formy punktów N oraz I odbijają się do danego punktu niezależnie od tego, czy umieścimy w nim oko czy nie. Pełny sens tego zdania jest: możemy znaleźć taki punkt, do którego odbijają się formy obu tych punktów, i gdy umieścimy w nim oko, to zobaczymy te formy.

³⁸ Rozważania te można zapisać

$$\angle NAZ - \angle IAD = 2 \times \angle GAB,$$

ale, jak powiedziano wyżej,

$$\angle GAB < \frac{1}{2} \angle NAI,$$

ale

$$\angle NAZ - \angle IAD < \frac{1}{2} \angle NAI,$$

czyli

$$\angle NAZ - \angle IAC < \angle NAI.$$

³⁹ Tzn., że wierzchołki tych kątów znajdują się w punkcie A – środku koła.

⁴⁰ Podobnie jak w innych przypadkach chodzi o położenie na rysunku. Wyrażenia „niżej” i „wyżej” w dalszym ciągu tekstu odnoszą się do oznaczenia miejsca na rysunku 36.

Komentarz

Twierdzenie to pozornie może wydawać się błędne, chociaż jest całkowicie prawdziwe, jego dowód, oparty na przyjmowanym w średniowieczu mechanizmie powstawania obrazu w oku z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy jest błędny. Witelo mówiąc, że gdy okiem nie możemy dostrzec prawdziwej wielkości przedmiotu, ma na myśli przedmiot bardzo odległy, np. Słońce. Jak wynika z teorii zwierciadeł kulistych obraz przedmiotu, w zależności od rozmiarów zwierciadła, będzie miał różne rozmiary. Tak więc może być zarówno większy, jak i równy wielkości przedmiotu widzianego przez oko. Dowód geometryczny podany przez autora jest bardzo długi i skomplikowany. Spowodowane to jest nieznaną pojęciem ogniska, ogniskowej oraz wzoru (1) wraz z następnymi wzorami wynikającymi z niego i zamieszczonymi we *Wstępie* w rozdziale I.3.4.

Twierdzenie 39

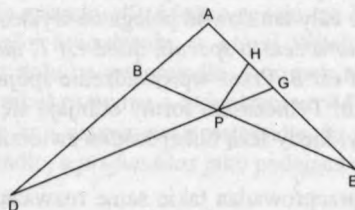
¹ W wydaniu Risnera brakuje spójnika *et*.

² W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I znajduje się rysunek, który jest odbiciem zwierciadlanym rysunku w wydaniu Risnera w płaszczyźnie prostopadłej do linii AD i przechodzącej przez punkt D.

³ Tego rysunku brakuje w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I. Z przeprowadzonych badań wynika, że rysunek ten został sporządzony przez Risnera. Jest on bardzo pożyteczny w śledzeniu tych wywodów i ułatwia ich zrozumienie.

⁴ U Risnera i w rękopisie S występuje linia AG. Z kontekstu wynika jednak, że chodzi tu o linię AB.

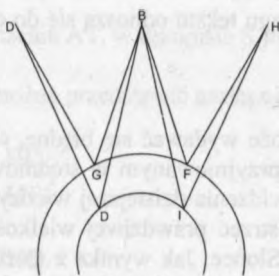
⁵ Tego rysunku również nie ma w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I. Prawdopodobnie został on także sporządzony przez Risnera i jest użyteczny w zrozumieniu wywodów Witelona. Przy tym twierdzeniu znajdujemy natomiast zamieszczony poniżej rysunek P3, który jest niekompletny, bo nie zostały na nim oznaczone wszystkie punkty występujące w tekście. Z tego powodu rysunek Risnera dokładniej oddaje myśl Witelona.



Rys. P3

Twierdzenie 40

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I przy tym twierdzeniu znajduje się dodatkowy rysunek, zamieszczony poniżej jako rysunek P4, który ilustruje tezę Witelona. Jest on bardziej przejrzysty niż rysunek 39. Sytuację dowodu twierdzenia pokazuje jednak rysunek 39. W rękopisach rysunek ten różni się innym położeniem linii, co nie ma jednak znaczenia dla dowodu twierdzenia.



Rys. P4

² W oryg.: *si itaque idem visibile D*. Nieco powyżej Witelo przedmiot widzialny określił przez HD. W tym miejscu rozpatruje wyłącznie odbicie jednego punktu rzeczy widzianej oznaczonego przez D.

³ Witelo w poniższym akapicie przeprowadza skomplikowany dowód, aby wykazać, że forma odbita od punktu O nie może przejść przez jakikolwiek punkt łuku AG. Dowód jest przeprowadzony przez wykazanie sprzeczności.

⁴ Rzeczywista droga formy punktu D jest taka: forma punktu D odbija się do oka B od punktu O i przechodzi przez punkt G. W rezultacie zdanie to powinno mieć taką postać: założmy, że [forma punktu D] odbijając się od punktu O do oka B przechodzi przez punkt G.

⁵ To zdanie od słów „Ponieważ kąt DGB” nie ma sensu, gdyż kąt DGB leży wewnątrz kąta DOB. Natomiast, dlaczego został wspomniany trójkąt DOG, jest zupełnie niezrozumiałe. Twierdzenie EE I,16 nie ma tutaj zastosowania. Mówi o kącie zewnętrznym i kątach wewnętrznych trójkąta, gdy tymczasem w tym zdaniu Witelo przedstawia taki przypadek, kiedy jeden kąt znajduje się wewnątrz drugiego. Zdanie to stanie się zrozumiałe, jeżeli usuniemy z niego fragment „w trójkącie DOG, z EE I,16”, a słowo „zewnętrzny” zastąpimy przymiotnikiem „wewnętrzny”. Otrzymamy wtedy taką postać tego zdania: „Ponieważ kąt DGB, zgodnie z założeniem, leży wewnątrz kąta DOB, wynika, że...”.

⁶ W oryg.: *ut ad punctum R incidens reflectatur linea DO ad B*. W tekście łacińskim podmiotem jest słowo „linia”, podczas gdy z kontekstu wynika, że podmiotem musi być rzeczownik „forma”, która pada po linii DO w punkcie R na zwierciadło i odbija się do punktu B. Należy pamiętać, że cały ten dowód polega na wykazaniu sprzeczności.

⁷ W oryg.: *Fiunt propinquiore centro speculi, quod est T, quia reflectuntur a puncto remotiori a centro visus, quod est B*. Przez wprowadzenie spójnika *quia* autor odwrócił następstwo przyczyny i skutku. Tymczasem formy odbijają się od punktu bardziej oddalonego od środka oka wtedy, kiedy leżą bliżej środka zwierciadła, co Witelo wykazał w twierdzeniu 17.

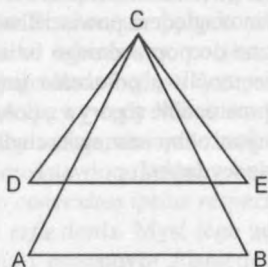
⁸ W tym miejscu Witelo przeprowadza takie same rozważania odnośnie do punktu R, jak powyżej w odniesieniu do punktu G.

⁹ W oryg.: *radius reflexionis* (promień odbicia). Ponieważ nie jest znane pojęcie promienia odbicia, chodzi zapewne o promień odbity. Dotąd Witelo w tej księdze mówił wyłącznie o linii odbicia. Być może, że użył wyrażenia „promień odbicia” analogicznie do wcześniej używanego wyrażenia „linia odbicia”.

¹⁰ W oryg.: *citra punctum G*. Dotyczy to sytuacji przedstawionej na rysunku 39.

Twierdzenie 41

¹ Sytuację, którą omawia Witelo, przedstawiono na rysunku P5, który pochodzi z wydania Risnera z ks. I, tw. 34. Jeżeli $DE=AB$ i $DE \parallel AB$, to: $\angle ACB < \angle DCE$.



Rys. P5

Komentarz

Twierdzenie to wynika z wzorów (1) i (4) zamieszczonych we *Wstępie* (rozdział I. 3.4). Twierdzenie to można potraktować jako komentarz do wspomnianych wzorów.

Twierdzenie 42

¹ Witelo uważa za stratę czasu dowodzenie tego twierdzenia, skoro zrobił to w twierdzeniu V,55, w którym dowiódł, że to, co znajduje się po prawej stronie na zwierciadle, ukazuje się po lewej stronie, a co w rzeczywistości jest po lewej, na zwierciadle pojawia się po prawej stronie.

Twierdzenie 43

¹ W oryg.: *Altitudines et profunditates perpendiculariter incidentes speculis sphericis convexis, reversae apparent*. W tekście dowodu *altitudo* tłumaczymy przez „wypukłość”, a *profunditas* przez „wkłębłość”.

² Punkt A leży na powierzchni zwierciadła, a więc jego forma odbija się w tym samym punkcie.

³ Rysunku tego nie ma w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I. Pochodzi on od Risnera i jest odwrotnością rysunku 40. Można sądzić, że Risner dodał ten rysunek jako ilustrację do drugiej części twierdzenia, w której Witelo mówi o głębokościach, tzn. o formach padających z dołu na zwierciadło. Rysunek ten jest zbyteczny dla dowodu twierdzenia, ale doprowadził nas wraz z twierdzeniem 44 do wniosku, że *altitudo* należy rozumieć jako formę linii ustawionej prostopadle do powierzchni zwierciadła i padającą z góry na zwierciadło, a *profunditas* jako padającą z dołu na zwierciadło.

Komentarz

Sformułowanie tego twierdzenia jest niezbyt szczęśliwe. Sądzymy, że można je rozumieć w ten sposób: jeżeli ciało jest zwrócone wypukłością skierowaną prostopadle w stronę zwierciadła, to na obrazie powstałym w zwierciadle wypukłość będzie zwrócona również w stronę jego powierzchni. Twierdzenie to jest zgodne z dzisiejszym stanem wiedzy, chociaż sposób jego sformułowania i dowód są wynikiem przyjętego przez Witelona mechanizmu powstawania obrazu w oku. Twierdzenie to dowodzi Witelo na przykładzie linii prostej (na rysunku 40 jest to linia EA), która, jak należy się domyślać, zastępuje wypukłość jakiegoś ciała, której forma pada prostopadle na powierzchnię zwierciadła.

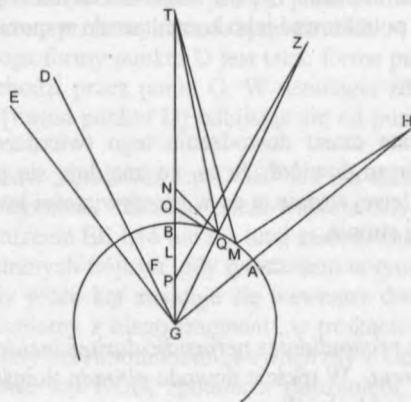
Twierdzenie 44

¹ W oryg.: rzeczownik *longitudo*, który tłumaczymy przez wielkość. Z dowodu twierdzenia wynika, że pod pojęciem „wielkości” Witelo rozumie po prostu linię, którą tutaj rozpatruje w położeniu ukośnym względem powierzchni zwierciadła. To twierdzenie należy traktować jako analogiczne do poprzedniego twierdzenia. Obydwa te twierdzenia wyczerpują zatem wszystkie możliwe położenia linii prostych względem powierzchni zwierciadła, położonych prostopadle z góry i z dołu oraz z ukosa.

² Rysunek w wydaniu Risnera jest odbiciem zwierciadlanym wzdłuż linii DF rysunku z rękopisów A, C, H, Q, S oraz wydania I.

Twierdzenie 45

¹ Na rysunku w wydaniu Risnera nie zostały umieszczone wszystkie punkty i linie. Z tego powodu zamieszczamy rysunek, który znajdujemy w rękopisach A, C, H, S i wydaniu I, i oznaczmy go jako rysunek P6.



Rys. P6

² Z kontekstu wynika, że Witelo przez punkty łuku BQ rozumie wszystkie punkty tego łuku z wyłączeniem punktów B oraz Q. Odbicie od tych punktów omawia poniżej.

³ W oryginale tekst niejasny. Zapisany skrótami *no. n.a puncto B*.

⁴ Treść tego zdania jest sprzeczna z wcześniejszymi rozważaniami. Zaczyna się tutaj dowód polegający na sprowadzeniu do niedorzeczności.

⁵ Punkt S nie został zaznaczony na żadnym rysunku.

Komentarz

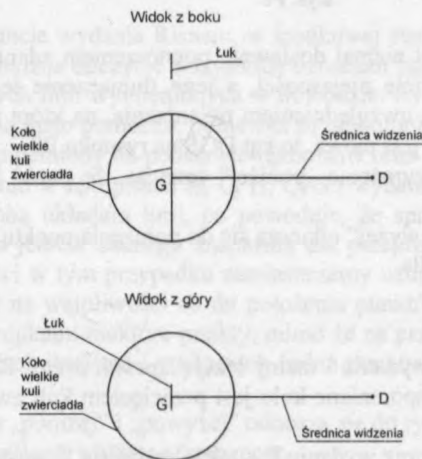
Twierdzenie ma charakter pomocniczy i jest zgodne z przyjętym przez Witelona i jemu współczesnych mechanizmem powstawania obrazu w oku. Z punktu widzenia dzisiejszego stanu wiedzy formułowanie tego twierdzenia jest niecelowe, ponieważ miejsce, w którym powstaje obraz pozorny punktu, gdy do oka trafiają promienie pozaośiowe, jest zależne od tego, jaka część wiązki odbitej od zwierciadła wpada do oka. Patrz rozdział I.3.4 *Wstępu*.

Twierdzenie 46

¹ Definicja płaszczyzny padania jest w księdze V, jest to definicja V,10, w tym przypadku płaszczyzna padania jest wyznaczona przez łuk i środek kuli zwierciadła.

² Konstrukcje rysunku w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I różnią się układem linii od rysunku w wydaniu Risnera, ale ponadto obraz LMQ w wyżej wymienionych rękopisach i wydaniu I został odwrócony, co jest sprzeczne z tezą Witelona. Witelo dowodzi bowiem, że łuk i jego obraz będą w tym przypadku koncentryczne. Przekazane rysunki niezbyt trafnie ilustrują wywody Witelona. Z tego powodu dołączamy jako rys. P7 rysunek przedstawiający wzajemne położenie kuli zwierciadła, łuku oraz oka. W górnej części rysunku przedstawiono widok z boku, a w dolnej widok z góry.

³ W oryginale: *erit ergo convexitas ipsius respectu centri G, non respectu superficiei convexae speculi sive loci reflexionis*. Myśl tego zdania jest sprzeczna z dotychczasowym dowodem twierdzenia i następnym zdaniem. Wydaje się, że to zdanie stało się powodem umieszczenia obrazu MQL na rysunkach w rękopisach i wydaniu I w sposób nieprawidłowy, co wyjaśniliśmy w poprzednim przypisie. Sądzymy, że zdanie to powinno mieć następujące brzmienie: „Jego wypukłość nie będzie zwrócona w stronę środka G, a w stronę powierzchni wypukłej zwierciadła albo miejsca odbicia”.



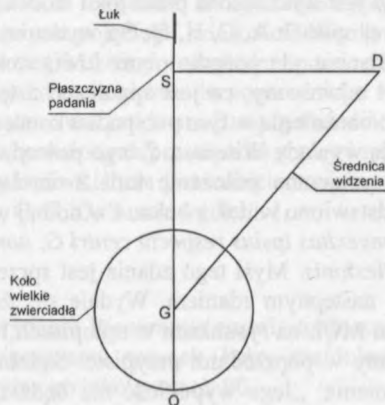
Rys. P7

Twierdzenie 47

¹ Na rysunku znajdującym się w rękopisie A jest więcej linii niż na rysunku Risnera, a ponadto punkt D mieści się w innej części rysunku, bliżej punktu O. W rękopisach H i S oraz wydaniu I rysunek jest obrócony o 90° . W rękopisie S i wydaniu I punkt D znajduje się w lewej części rysunku koło punktu O. Wspomniane rysunki różnią się od rysunku w wydaniu Risnera jedynie układem linii. Żaden z tych rysunków nie pokazuje jednak wyraźnie wzajemnego położenia: łuku, oka i środka zwierciadła, co jest niezmienne ważne dla zrozumienia wykładu Witelona. Z tego powodu postanowiliśmy dla uświadomienia czytelnikowi wymienionych relacji załączyć rysunek P8, który jest widokiem z boku i przedstawia wzajemne położenie oka, łuku i środka zwierciadła. Linia DS na rysunku P8 jest prostopadła do płaszczyzny padania, która jest prostopadła do płaszczyzny rysunku.

² W oryg.: *versus punctum*.

³ Jak wynika z cytowanych powyżej twierdzeń Euklidesa i analizy tekstu, ów domniemany kąt jest to kąt DGQ na rysunku P8.



Rys. P8

⁴ Powyższe zdanie jest niemal dosłownie powtórzeniem zdania z Alhazena VI,12. Tekst łaciński zawiera wiele niejasności, a jego tłumaczenie jest wynikiem analizy zdania przeprowadzonej z uwzględnieniem twierdzenia, na które powołuje się Witelo. Kąt mniejszy, o którym tu jest mowa, to kąt DGS na rysunku P8.

⁵ W tym przypadku wyrażenie „poniżej” oznacza, że punkt N leży bliżej środka zwierciadła.

⁶ Określenia „niżej” i „wyżej” odnoszą się do położenia punktu na rysunku w odniesieniu do środka zwierciadła.

Twierdzenie 48

¹ W rękopisie H oraz wydaniu I mamy lekcję: *speculi arcus*. Risner słusznie usunął słowo *arcus*, ponieważ wspomniane koło jest przecięciem kuli zwierciadła i płaszczyzny.

² W wydaniu Risnera oraz wydaniu I, a także rękopisie S występuje litera F. Jest to oczywista pomyłka. Z treści dowodu wynika bowiem jednoznacznie, że Witelo mówi o linii GE. Punkt F znajduje się na przedłużeniu linii GE poza punkt G, tzn. znajduje się naprzeciw punktu E. We wspomnianych wydaniach i rękopisach zaznaczony jest punkt F na rysunku, chociaż nie ma żadnego związku z dowodem twierdzenia.

³ Wspomniany tutaj łuk jest łukiem koncentrycznym z kulą zwierciadła. Używając terminologii Witelona, półśrednicą (tzn. promieniem krzywizny) jest linia $GA = GB$.

⁴ Wynika to z twierdzenia 46 i 47.

Twierdzenie 49

¹ W oryg.: *In speculis sphericis convexis, visu non existente in superficie lineae rectae aequidistantis speculo, imago videtur curva*. W dosłownym tłumaczeniu tekst jest następujący: W zwierciadłach kulistych wypukłych, gdy oko nie znajduje się na powierzchni linii prostej równoległej do zwierciadła, widzimy obraz zakrzywiony. Przyjęty przez nas przekład jest rezultatem interpretacji wynikającej z dowodu, gdzie Witelo wyraźnie mówi o powierzchni padania oraz o obrazie linii prostej. Tą interpretację potwierdza również tekst twierdzenia VI,14 Alhazena, który jest podstawą przyjęte-

go przez nas tłumaczenia: *Si visus extra superficiem incidentiae: imago lineae rectae, parallelae rectae tangenti peripheriam circuli (qui est communis sectio superficierum, reflexionis et speculi spherici convexi) videbitur curva.*

² W rękopisach H i S na rysunku brakuje linii BFA.

³ Linia AB jest równoległa do zwierciadła w sensie definicji 5.

⁴ Tzn., że te obrazy są w tej samej odległości od środka zwierciadła.

Twierdzenie 50

¹ Patrz twierdzenie 49 przyp. 3.

² Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I różnią się od rysunku zamieszczonego przez Risnera tym, że linia BA jest równoległa do zwierciadła i przedłużona do punktu Q, co jest niezgodne z wywodami Witelona.

³ W oryg.: *punctus autem imaginis A sit Z, punctus vero imaginis E sit M*. Wyraża stylistyczna niezręczność, gdyż wiadomo, że chodzi tutaj o obrazy punktów, a nie punkty obrazów, jak wynika z tekstu łacińskiego.

Twierdzenie 51

¹ Rysunek w reprimie wydania Risnera, w środkowej swojej części jest tak niewyraźnie odbity, że nie można odczytać wszystkich oznaczeń literowych, co uniemożliwia identyfikację niektórych linii wymienionych w dowodzie. Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I są mało pomocne, ponieważ są niekompletne. Zamieszczony przez nas rysunek został uzupełniony na podstawie rękopisów oraz wydania I i tekstu dowodu twierdzenia. Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I oraz wydaniu Risnera różnią się między sobą układem linii, co powoduje, że sprawiają wrażenie różnych rysunków. Nie ma to jednak żadnego znaczenia dla przeprowadzonego dowodu. Dla większej przejrzystości w tym przypadku zamieszczamy uzupełniony rysunek z wydania Risnera. Z uwagi na wątpliwości co do położenia punktów wyjątkowo na tym rysunku zaznaczamy kropkami niektóre punkty, mimo że na przekazanych przez tradycję rysunkach, w wydaniach drukiem i rękopisach żadne punkty nigdzie nie zostały oznaczone.

² Użyte określenia „poniżej” i „powyżej” odnoszą się do rysunku.

³ Jest to próba określenia trójkąta sferycznego.

⁴ W tym miejscu Witelo skorzystał z odwracalności biegu promieni świetlnych.

⁵ W oryg.: *demissior* znaczy głębiej położony. Z rysunku i kontekstu wynika jednak, że chodzi o jego odległość na łuku ZF od średnicy GA.

Twierdzenie 52

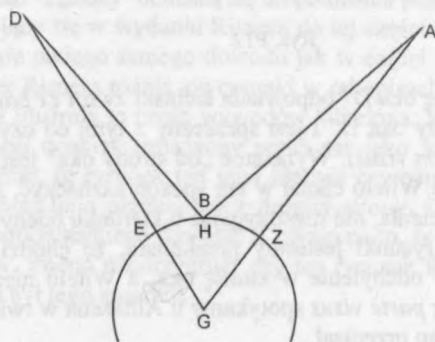
¹ Rysunek ten pochodzi od Risnera i różni się od rysunków zamieszczonych w rękopisach A, C, H, Q, S liczbą linii oraz innym rozmieszczeniem punktów. Wszystkie one odpowiadają wywodom Witelona. Dla wykazania tych różnic dodatkowo zamieszczamy rysunek z rękopisu H oznaczony jako rys. P9. Warto dodać, że w wydaniu I rysunek nie odpowiada treści dowodu twierdzenia.

² Od słowa „ponieważ” tekst u Risnera brzmi: *ideo quia a puncto M productae lineae contingentes pertingunt ad arcus aequales per 59 th. I huius*. W rękopisie S i wydaniu I znajdujemy twierdzenie 58 księgi I zamiast cytowanego przez Risnera twierdzenia I,59. Obydwa te twierdzenia mogą mieć tutaj zastosowanie, ale bliższe idei Witelona jest twierdzenie I,59, szczególnie w świetle naszej interpretacji czasownika *pertingunt*, który przetłumaczyliśmy jako wyznaczają. Według twierdzeń I,58 i I,52, to linie styc-

Twierdzenie 54

¹ W oryg.: *declinatio lineae sit ad partem aliam a visu*. Zdanie to przetłumaczyliśmy dosłownie, gdyż istotny jego sens wyjaśnia Witelo na początku dowodu, gdzie pisze: *sit declinatio lineae ad partem aliam ab illa, in qua est visus* (niech odchylenie zachodzi w stronę przeciwną do tej, w której jest oko).

² Rysunek 51 niewątpliwie pochodzi od Risnera i jest on niezgodny z tezą twierdzenia, ponieważ punkt B na tym rysunku nie znajduje się na powierzchni zwierciadła. W rękopisach A, C, H, Q, S znajdujemy poniższy rysunek, oznaczony przez nas jako rys. P11. Oddaje on treść tezy twierdzenia i do niego odsyłamy czytelnika. Należy dodać, że w wydaniu I znajduje się ten rysunek – prawdopodobnie przez pomyłkę – przy twierdzeniu 52.



Rys. P11

³ Oczywiście, Witelo zdawał sobie sprawę, że linia nie może stanowić przeszkody w widzeniu. Niekiedy zapomina jednak, że operuje tworamii matematycznymi i nadaje im właściwości konkretnych przedmiotów.

⁴ Tutaj Witelo mówi o odbiciu form punktu przecięcia się linii padania. Jest to punkt w przestrzeni, który nie wysyła światła i nie może być widoczny. Wprawdzie cały ten dowód polega na sprowadzeniu do niedorzeczności, ale trudno zrozumieć wywód Witelona. Tej myśli nie ma w twierdzeniu VI,19 Alhazena.

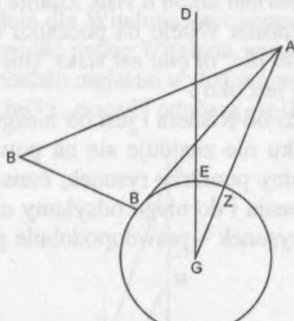
⁵ Wydaje się nam, że Witelo nawiązuje do wcześniejszych rozważań, kiedy wspomina o jakiejś przeszkodzie występującej między okiem i zwierciadłem, która nie pozwalałaby na dotarcie form punktów linii AB (innych niż punkt B) do oka. Tutaj Witelo dodaje, że, nawet jeśli usuniemy tę przeszkodę, to i tak tych punktów nie zobaczymy.

⁶ W oryg.: *per praecedentia puncta lineae solidae*. Sens tego zdania staje się zrozumiały, jeśli przyjmiemy, że Witelo zakłada, iż linia AB jest materialna i nieprzezroczysta. Wtedy linie odbicia form punktów leżących na linii AB innych niż punkt B nie dojdą po odbiciu od powierzchni zwierciadła do oka nie tylko z powodu prawa odbicia, ale również dlatego, że nie pozwoli na to nieprzezroczysta linia AB.

Twierdzenie 55

¹ Rysunek zamieszczony przez Risnera nie pokazuje sytuacji omawianych w twierdzeniu. Należy więc korzystać z rysunku w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I, który poprawnie ilustruje drugą część dowodu. W wydaniu I rysunek ten znajduje się

przy twierdzeniu 53 (w rękopisach A, C oraz wydaniu I brakuje linii BH). Rysunek z rękopisów zamieszczony jest poniżej i oznaczony został jako rysunek P12.



Rys. P12

² Wyrażeniu „w stronę oka D” odpowiada łaciński zwrot *ex parte visus D*, który dosłownie znaczy „od strony oka D” i jest sprzeczny z tym, co czytamy w twierdzeniu: „w stronę oka” (*ad partem visus*). Wyrażenie „od strony oka” jest bardzo ogólne i niedokładne. Wydaje się, że Witelo chciał w ten sposób zaznaczyć, że odchylenie występuje bliżej oka niż zwierciadła, nie rozstrzygając o kierunku odchylenia. Mając na uwadze tekst twierdzenia i rysunki jesteśmy przekonani, że chodzi tutaj, podobnie jak w tekście twierdzenia, o odchylenie w stronę oka, a Witelo niezręcznie się wyraził. Warto dodać, że zwrot *ex parte visus* spotykamy u Alhazena w twierdzeniu VI,20, skąd Witelo prawdopodobnie go przepisał.

³ Z tekstu nie wynika, o jaką linię odbicia chodzi. Brak oznaczenia tej linii powoduje niezrozumienie pierwszej części twierdzenia.

⁴ W oryg.: *corpus lineae*. O linii materialnej stanowiącej przeszkodę w widzeniu obrazu w zwierciadle mówi Witelo pod koniec poprzedniego twierdzenia (por. twierdzenie 54 przypis 6).

⁵ Porównaj twierdzenie 54 przyp. 6.

Twierdzenie 56

¹ Zwrotem „ponad powierzchnią zwierciadła” tłumaczymy wyrażenie Witelona *in aere* (dosłownie znaczy to „w powietrzu”). W ten sposób Witelo chciał podkreślić, że punkt B znajduje się w przestrzeni poza zwierciadłem.

² W wydaniu I rysunek ten znajduje się przy twierdzeniu 54.

³ W oryg.: *quia propter interpositionem lineae solidae*; porównaj twierdzenie 54 przypis 6.

⁴ W oryg.: *declinat plus*. Zwrot ten należy rozumieć w ten sposób, że odchylając oko zbliżamy je do powierzchni zwierciadła.

⁵ Część tekstu „prostopadła z punktu A, poprowadzona poza linię AG” w języku łacińskim występuje w różnych wersjach. W:

rękopisie S: *Inter productam katetum AG ultra lineam AB.*

wydaniu I: *Inter productam cathetum puncti A ultra lineam AG;*

rękopisie C: *Inter perductam kathetum AG ultra lineam AB.*

Różnice w tekście występujące między wydaniem i rękopisami C i S świadczą, że wydawcy mieli kłopoty ze zrozumieniem tego tekstu i starali się go na swój sposób poprawić. Tekst ten jednak w dalszym ciągu pozostaje niejasny, ale w zasadzie to zda-

nie jest zbyt cenne dla zrozumienia całości wywodów Witelona. Poprawna wersja tekstu łacińskiego, zgodnie z rękopisami, powinna mieć postać: *inter perductam cathetum AG ultra lineam AB*.

Twierdzenia 57

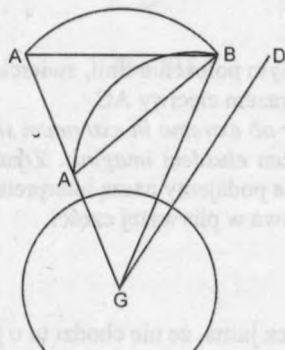
¹ W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I rysunek jest obrócony o 180° wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt G. Na rysunku w wydaniu Risnera jest niedokładność. Linia wychodząca z punktu Z winna być doprowadzona do linii CG, którą przecina w punkcie L, co wynika z dowodu twierdzenia. W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I linia ta jest poprowadzona prawidłowo.

² Koniec styczności (to jest punkt S) jest punktem przecięcia się wyobrażonej linii, o której jest mowa w poprzednim zdaniu, z linią GM.

³ Wyrażenia „ponad” i „niżej” odnoszą się do położenia punktów na rysunku.

⁴ Rysunek znajdujący się w wydaniu Risnera do tej części dowodu umożliwia przeprowadzenie dokładnie takiego samego dowodu jak w części poprzedniej. Od rysunku zamieszczonego przez Risnera różnią się rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. One również ilustrują tę część wywodów Witelona. Risner w swoim wydaniu zamieścił jeszcze trzeci rysunek oznaczony przez nas jako 55a, który jest zbyt cenny. Można tylko przypuścić, że rysunek ten miał ułatwić czytelnikowi wyobrażenie sobie takiej sytuacji, w której linie przetną się z drugiej strony, i pomóc mu ewentualnie w przeprowadzeniu odpowiedniego dowodu. Z uwagi na to, że nie mogliśmy sprawdzić wszystkich rękopisów, trudno rozstrzygnąć, czy ten rysunek Risner znalazł w którymś z rękopisów, czy sam był jego autorem.

Twierdzenie 58



Rys. P13

¹ W wydaniu Risnera, wydaniu I oraz w rękopisach C oraz S dowód zaczyna się od stwierdzenia: *Sit arcus visus AB*. Z tekstu dowodu wynika, że chodzi o łuk koła oznaczony AB, a nie łuk oka. Środek oka, jak wynika z następnych zdań, znajduje się w punkcie D.

² W rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I (gdzie rysunek ten znajduje się przy twierdzeniu 56, prawdopodobnie omyłkowo) występuje powyżej zamieszczony przez nas rysunek oznaczony jako P13. Na rysunku tym występuje łuk AB w dwóch różnych położeniach względem zwierciadła. Nie ma to jednak żadnego związku z dowodem, który dostatecznie ilustruje rysunek z wydania Risnera.

Komentarz

Twierdzenie to wymaga pewnego uzupełnienia. Zgodnie z tym, co pisze Witelo, jeżeli mamy łuk AB zwrócony swoją wklęsłością w stronę zwierciadła, to obrazy punktów dalej położonych od środka zwierciadła będą bliżej niego i w rezultacie w zwierciadle zobaczymy łuk wklęsły, a oznacza to, że jego punkty skrajne znajdują się bliżej powierzchni zwierciadła. Jeżeli łuk jest skierowany swoją wypukłością w stronę zwierciadła, to jego obraz będzie wypukły. Mowa jest o tym w twierdzeniu 59.

Twierdzenia 60

¹ W wydaniu Risnera rysunek ten prawdopodobnie pomyłkowo znalazł się przy twierdzeniu 61, a rysunek do twierdzenia 61 znalazł się przy twierdzeniu 60. W naszym wydaniu przyjmujemy prawidłową kolejność, która występuje w rękopisach.

² W wydaniu Risnera i wydaniu I oraz w rękopisach druga prostopadła została błędnie oznaczona jako AB.

Komentarz

Twierdzenie pozornie wydaje się błędne. Jest to spowodowane nieporadnością terminologiczną. W rzeczywistości promień krzywizny obrazu łuku bardziej oddalonego jest mniejszy, a więc krzywizna łuku jest większa i łuk widzimy, używając terminologii Witelona, „jako bardziej zakrzywiony”.

Twierdzenie 61

¹ Porównaj przypis 1 do twierdzenia 60.

Twierdzenie 62

¹ To znaczy w jakimś wzajemnym położeniu linii, zwierciadła i oka.

² To znaczy zakrzywionym obrazem cięciwy AC.

³ W oryg.: *cum ergo non eatur ab extremo in extremum sine medio in huiusmodi re flexionibus et superficiebus partium eiusdem imaginis*. Zdanie to jest w języku łacińskim niezrozumiałe. W przekładzie podajemy naszą interpretację tego zdania.

⁴ To znaczy łuku, o którym mowa w pierwszej części.

Twierdzenie 63

¹ W oryg.: *partes aliquae*. Rzecz jasna, że nie chodzi tu o jakieś dowolne części, które mają różne środki, ale każda część ma swój środek, tzn. każda część ma odmienny sobie właściwy środek.

Komentarz

Twierdzenie jest prawdziwe, chociaż dowód jest oparty na błędnym mechanizmie powstawania obrazu w oku. Wnioski jednak wynikające z tego twierdzenia są prawdziwe i podane przykłady są odpowiednie.

Twierdzenie 64

¹ Jak wynika z treści dowodu twierdzenia, chodzi tu o widzenie jednego i tego samego punktu, którego forma odbija się kolejno w wielu zwierciadłach kulistych.

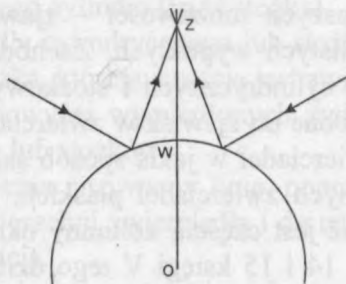
W związku z tym twierdzenie powinno być sformułowane następująco: „Jest możliwe widzieć obraz tego samego punktu po kolejnych odbiciach na wielu wypukłych zwierciadłach kulistych, na ilu tylko kto zechce”.

² Na rysunku tym w rękopisie A i wydaniu I brak linii LK.

Twierdzenie 65

Komentarz

Twierdzenie jest prawdziwe wtedy, gdy na zwierciadło pada rozbieżna lub równoległa wiązka światła. Przypadek, gdy na zwierciadło kuliste wypukłe pada wiązka zbieżna, przedstawiono na rysunku P14, bo wtedy może nastąpić „odbicie promieni do jednego punktu” (jak pisze Witelo). Jest to punkt Z na rysunku P14. Jeżeli w tym punkcie umieścimy ciało palne, to może się zapalić. Do twierdzenia tego Risner nie dodaje referencji. Można więc sądzić, że twierdzenie to pochodzi od Witelona. Na usprawiedliwienie Witelona należy dodać, że w jego czasach znano jedynie naturalne źródła światła, np. słońce, płomień świecy, które wysyłają wiązki rozbieżne. Z tego prawdopodobnie powodu Witelo tak sformułował to twierdzenie.



Rys. P14

IV. KSIĘGA VII PERSPEKTYWY

1. PRZEKŁAD NA JĘZYK POLSKI

KSIĘGA SIÓDMA OPTYKI WITELONA, SYNA TURYNÓW I POLAKÓW

Naturalny porządek rzeczy skłania nas do tego, abyśmy teraz zajęli się właściwościami zwierciadeł cylindrycznych i stożkowych, skoro omówiliśmy – według naszych możliwości – zjawiska właściwe dla zwierciadeł płaskich i kulistych wypukłych. Zachodzą bowiem pewne zjawiska w zwierciadłach cylindrycznych i stożkowych, które są takie same bądź częściowo podobne do zjawisk w zwierciadłach płaskich, np. kształty tych ostatnich zwierciadeł w jakiś sposób składają się z kształtów wcześniej wspomnianych zwierciadeł płaskich. Zwierciadło cylindryczne bowiem, ponieważ jest częścią kolumny okrągłej (to przedstawiliśmy w twierdzeniu 8, 14 i 15 księgi V tego dzieła), jak to wynika z wcześniejszych rozważań w księdze I tego naukowego dzieła i z założeń księgi XI dzieła Euklidesa, powstaje w wyniku obrotu prostokąta, który jeden bok ma umocowany na stałe, a pozostałe boki obracają się tak długo, aż dojdą do miejsca, skąd zaczął się ruch. Podobnie powstaje zwierciadło stożkowe w wyniku ruchu trójkąta prostokątnego, którego jeden z boków tworzących kąt prosty jest umocowany na stałe, a pozostałe dwa obracają się w sposób podany powyżej, aż dojdą do miejsca, z którego zaczęły się poruszać. Każde z tych zwierciadeł, ponieważ powstaje dzięki ruchowi linii prostych, nie może uniknąć zjawisk charakterystycznych dla linii prostych. W jakim stopniu te linie tworzą figury kół, kiedy obracają się w koło, w takim samym stopniu zjawiska właściwe dla kół dotyczą również tych zwierciadeł, tzn. zjawiska te zawsze towarzyszą kulom, które powstają z [ruchu] koła. A to najbardziej jest widoczne w zwierciadłach cylindrycznych, jak to pokażemy w trakcie wykładu. Właściwe dla tych zwierciadeł zjawiska, np. te, które występują przy przecięciach ostrokątnych¹, jakie spotykamy jedynie na zwierciadłach [cylindrycznych i stożkowych], obojętnie czy są to zwierciadła wypukłe, czy wklęsłe, zachodzą w tych zwierciadłach z powodu podobieństwa

natury linii prostych i ruchu. Ponieważ natura linii prostych i ruchu jest zawsze podobna, zwierciadła cylindryczne i stożkowe mają układ wtórny względem zwierciadeł płaskich i kulistych wypukłych. Wcześniej jednak zajmiemy się zwierciadłami wypukłymi cylindrycznymi i stożkowymi, zanim zajmiemy się niektórymi zwierciadłami kulistymi wklęsłymi. Ponieważ zjawiska w zwierciadłach wypukłych są prostsze [w rozumieniu] w porównaniu ze zjawiskami w zwierciadłach wklęsłych, zjawiska na tych ostatnich zwierciadłach przeniesiemy w inne miejsce. A takie są te zagadnienia, które teraz przedstawimy.

DEFINICJE

1. Zwierciadłem cylindrycznym lub stożkowym wypukłym albo wklęsłym większym nazywamy takie zwierciadło, które jest częścią większego cylindra bądź stożka, mniejszym natomiast takie zwierciadło, które jest częścią mniejszego cylindra [bądź stożka].

2. Ośią zwierciadła cylindrycznego lub stożkowego nazywamy oś tego cylindra albo stożka, którego częścią jest zwierciadło.

3. Podstawami powyżej wymienionych zwierciadeł nazywamy podstawy ich cylindrów lub stożków.

4. Średnicą widzenia nazywamy linię, poprowadzoną od środka oka, prostopadłą do powierzchni zwierciadła i do osi; i tę samą linię nazywamy prostopadłą odbicia.

5. Prostopadłą padania nazywa się, jak powyżej, linia poprowadzona z punktu rzeczy widzianej, prostopadła do linii, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, np. do linii prostej, która jest linią długości zwierciadła bądź do koła, bądź do przecięcia ostrokątnego w zależności od tego, od której z tych linii zachodzi odbicie.

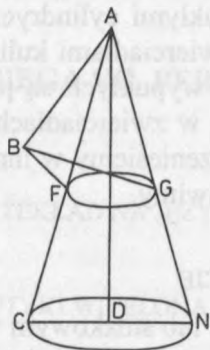
6. Końcem stycznej¹ nazywa się punkt, w którym jedna z prostopadłych² przecina linię styczną do zwierciadła w punkcie odbicia na kole bądź na przecięciu ostrokątnym.

7. Granicą miejsc [obrazów], podobnie jak przy zwierciadłach kulistych, nazywamy punkt albo linię, poza którą nie widać żadnych obrazów.

TWIERDZENIA

1. Jeżeli umieścimy zwierciadło wypukłe cylindryczne albo stożkowe pod kątem prostym do oka w ten sposób, że oko nie znajduje się na powierzchni zwierciadła albo na przedłużeniu tej powierzchni, a linia prosta poprowadzona przez środek oka wraz z ośią zwierciadła utworzy przy wierzchołku kąt ostry, to odbicie do oka zachodzi tylko od

strony powierzchni zwierciadła, znajdującej się między płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi przez środek oka do powierzchni zwierciadła.

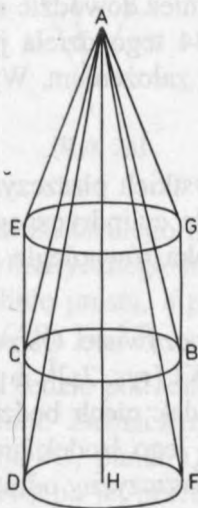


[Rys. 1]

To, co tutaj zakładamy, dotyczy ogólnie zwierciadła cylindrycznego wypukłego, obojętnie czy linia widzialna¹ pada na nie pod kątem prostym, czy ostrym. Zawsze bowiem, jak to wykazaliśmy w twierdzeniu IV,78 tego dzieła, oku ukaże się mniej niż połowa powierzchni cylindrycznej i tylko od niej zachodzi odbicie do oka. Ta powierzchnia zwierciadła cylindrycznego ograniczona jest dwiema płaszczyznami, poprowadzonymi przez środek oka, stycznymi do cylindra wzdłuż linii długości. Ponieważ sposób wyjaśnienia tego zjawiska jest taki sam w przypadku jednego i drugiego z przedstawionych zwierciadeł, jest to trudniejsze w odniesieniu do zwierciadeł stożkowych, dlatego należy, dla przykładu, wyjaśnić założenia w zwierciadłach stożkowych. Weźmy zwierciadło stożkowe wypukłe, którego oś oznaczmy przez AD. Wierzchołek oznaczmy przez A, a średnicę podstawy przez CN, środek podstawy zaś przez D. Niech ten stożek będzie prostopadły do płaszczyzny horyzontu w taki sposób, aby się do niej nie nachylał. Środek oka oznaczmy przez B [rys. 1]². Linia AB, poprowadzona od środka oka do wierzchołka zwierciadła, niech się przetnie z osią danego stożka, tworząc z nią kąt ostry; a jest to kąt DAB. Twierdzę, że odbicie do oka zachodzi tylko od strony powierzchni stożkowej tego stożka, która znajduje się pomiędzy płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi przez środek oka do tej właśnie powierzchni. Wyobraźmy sobie płaszczyznę, wychodzącą od środka oka, która przecina stożek pod kątem prostym do osi. Z twierdzenia I,100 tego dzieła wynika, że wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i powierzchni stożka będzie koło równoległe do podstawy stożka. A to koło oznaczmy jako FG. Od środka oka poprowadźmy, zgodnie z EE III,17, dwie linie BF i BG styczne do tego koła. Jak podano w twierdzeniu I,100 tego dzieła, poprowadźmy z punktów F i G dwie linie długości stożka;

a są to linie CFA i NGA. Jest oczywiste, że płaszczyzna, na której znajdują się linie CFA i BF, jest styczna do stożka. Bo jeśli przyjmiemy, że ją przetnie, a nie jest do niej styczna, to jest oczywiste, że linia BF, która znajduje się na tej płaszczyźnie, przetnie koło FG, ale nie będzie styczna [do niego], chociaż została poprowadzona jako styczna. Nie jest zatem możliwe, aby przecięła [to koło]. Ta płaszczyzna będzie więc styczna do stożka. Podobnie możemy dowodzić w przypadku płaszczyzny, na której znajdują się linie NGA i BG, ponieważ i ta płaszczyzna jest styczna do stożka. Wobec tego powierzchnia stożka, leżąca między dwiema płaszczyznami stycznymi, znajdzie się naprzeciw oka i tylko od tej powierzchni będzie zachodziło odbicie do oka, ponieważ, jak to wykazano w twierdzeniu II,16 tego dzieła, promień dłuższy dochodząc do koła cylindra albo stożka obrotowego okrągłego jest prawie linią styczną. Wynika więc to, co zakładano, ponieważ dowód w podobny sposób można przeprowadzić dla zwierciadła cylindrycznego.

2. Jeśli przez środek oka poprowadzimy dwie płaszczyzny odbicia do linii, które ograniczają powierzchnie zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych widziane przez oko, to obydwie te płaszczyzny muszą być styczne do zwierciadła (Alh. IV,26)¹.



[Rys. 2]

Dla przykładu przyjmijmy, że na zwierciadle wypukłym cylindrycznym, oznaczonym jako DFEG, znajdują się dwie linie długości, a są to linie DE i FG [rys. 2]². Niech te linie będą granicami powierzchni cylindra zwierciadła widzianego przez oko, jak to wynika z poprzedniego

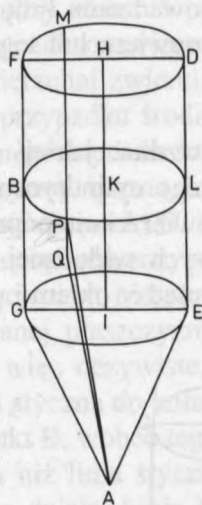
twierdzenia i twierdzenia IV,78 tego dzieła. Środek oka oznaczmy jako A. Po przeprowadzeniu linii AD, AF, AG, AE powstaną płaszczyzny trójkątne ADE i AFG. Twierdzę, że te płaszczyzny są styczne do cylindra. Jeślibyśmy powiedzieli, że jedna z nich przecina cylinder, np. płaszczyzna ADE, to jest oczywiste, że to przecięcie zajdzie wzdłuż linii długości DE, na którą pada ta płaszczyzna. Podobnie należy postąpić, jeżeli płaszczyzna AFG przetnie cylinder. Niech to przecięcie nastąpi wzdłuż linii FG. Niech więc będzie tak, że powierzchnia płaska, przechodząca przez środek oka, przetnie cylinder równolegle do jego podstaw. Zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i powierzchni zwierciadła będzie koło, które oznaczmy jako BC. To koło przejdzie przez dwie linie długości DE i FG. Poprowadźmy zatem linie AB i AC do tego koła. Te więc linie, gdy znajdą się na tych płaszczyznach przecinających powierzchnię cylindra, przetną koło BC. Wobec tego z łuku BC będzie widać mniej niż to, co znajduje się pomiędzy liniami stycznymi do koła BC, poprowadzonymi przez środek oka, tzn. przez punkt A, ale to jest niezgodne z tym, co zostało powiedziane w twierdzeniu IV,51 tego dzieła. Podobnie można mówić o podstawach cylindra. W takiej sytuacji te płaszczyzny nie będą powierzchniami poprowadzonymi do granic powierzchni cylindra widocznej dla oka, ale znajdą się wewnątrz nich. A jest to sprzeczne z założeniem.

W ten sam sposób można również dowodzić w przypadku zwierciadeł stożkowych. Z twierdzenia IV,84 tego dzieła już wynikało, że jest to niemożliwe, bo jest sprzeczne z założeniem. Wynika więc to, co zakładano.

3. Wspólnym przecięciem wszystkich płaszczyzn, poprowadzonych od oka, stycznych do zwierciadła cylindrycznego wypukłego, jest linia przechodząca przez środek oka równolegle do osi tego zwierciadła (Alh. IV,26).

To, co tutaj się zakłada, jest oczywiste. Oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego oznaczmy jako HKI [rys. 2a]¹, a podstawą górną cylindra niech będzie koło FD. Jego środek niech będzie w punkcie H. Dolną podstawą niech będzie koło GE. Jego środek niech będzie w punkcie I. Wspólnym przecięciem jakiejś płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego niech będzie koło BL. Jego środek niech będzie w punkcie K. Ponieważ oś HI, która jest prostopadła do podstaw, jak to wynika z twierdzenia I,92 tego dzieła, jest także prostopadła do koła BL, zgodnie z twierdzeniem I,100 i I,23 tego dzieła, to z tego samego powodu linie długości DE i FG cylindra są prostopadłe do koła BL. Na podstawie EE XI,18 płaszczyzny styczne do cylindra wzdłuż linii DE i FG będą więc prostopadłe do koła BL i będą prostopadłe również do płasz-

czyzny odbicia, przecinającej cylinder wzdłuż tego koła BL. Zgodnie zatem z EE XI,19 wspólne przecięcie tych płaszczyzn, stycznych do cylindra, będzie prostopadłe do tej płaszczyzny odbicia, a zgodnie z EE XI,6 wspólne przecięcie tych płaszczyzn będzie równoległe do osi cylindra, która została poprowadzona prostopadłe do tej samej płaszczyzny². Te płaszczyzny przetną się w środku oka, ponieważ środek oka jest na każdej z nich, jak to wynika z założenia [przyjętego] dla powierzchni płaskich stycznych do danego zwierciadła oraz z twierdzenia V,27 tego dzieła, odnoszącego się do płaszczyzny odbicia. Wynika więc to, co zakładano.



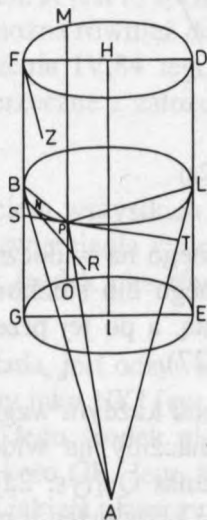
[Rys. 2a]

4. Do każdego punktu zaznaczonego na widocznej powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego można poprowadzić od środka oka linię prostą, a po jej przedłużeniu ta linia musi przeciąć zwierciadło (Alh. IV,27).

Niech układ rysunku będzie pod każdym względem taki sam jak we wcześniejszym twierdzeniu. Zaznaczmy na widocznej dla oka części zwierciadła, którą jest EDFG, punkt Q [rys. 2a]¹. Poprowadźmy linię AQ. Twierdzą, że linia AQ po jej przedłużeniu musi przeciąć zwierciadło. Zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, poprowadźmy przez punkt Q linię długości cylindra i niech to będzie linia QM. Ta linia będzie również równoległą do obydwu linii długości DE i FG, zgodnie z twierdzeniem I,92 tego dzieła oraz EE XI,6 i I,30. Niech będzie tak, aby jakaś płaszczyzna odbicia przecięła cylinder ponad punktem Q wzdłuż koła BL, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła. Linia QM musi zatem przejść przez koło przecięcia, którym jest koło BL, przeci-

nając je w punkcie; a tym punktem niech będzie punkt P. Poprowadźmy linię AP. Jest więc oczywiste, że ta linia przetnie koło, ponieważ pada pomiędzy linie, poprowadzone od środka oka do koła BL, styczne do koła; a są to linie AB i AL. Wobec tego również płaszczyzna rozciągająca się od środka oka do powierzchni zwierciadła, na której znajdują się linie AP i AQ, przetnie zwierciadło, ponieważ ta płaszczyzna przetnie powierzchnię zwierciadła cylindrycznego wzdłuż linii długości, którą jest linia MQ. Jest więc oczywiste, że linia AQ po jej przedłużeniu przetnie zwierciadło. To samo odnosi się do każdego innego danego punktu. Również w ten sam sposób można dowodzić w przypadku zwierciadeł stożkowych wypukłych po przeprowadzeniu linii od wierzchołka stożka do dowolnego danego punktu na powierzchni tego zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano.

5. Każda płaszczyzna styczna wzdłuż jakiejś linii długości do powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego, widocznej dla oka, przecina powierzchnie poprowadzone od oka, które dotykają punktów krańcowych widocznej części, i wszystkie te płaszczyzny rozciągają się pomiędzy okiem i powierzchnią zwierciadła (Alh. IV,27).



[Rys. 3]

Niech pozostanie poprzedni układ, tzn. niech dowolna płaszczyzna będzie styczna do widocznej powierzchni zwierciadła wzdłuż linii długości, którą jest linia MO, zgodnie z twierdzeniem I,95 tego dzieła. Poprowadźmy płaszczyznę odbicia, którą jest płaszczyzna ABL [rys. 3]¹. Na niej poprowadźmy linię styczną do koła BL w punkcie P; niech to będzie

linia SPT. Jest więc oczywiste, że linia SPT przetnie linie AB i AL. Poprowadźmy linię PL. Ponieważ linia SPT przecina kąt APL, to z twierdzenia I,29 tego dzieła wynika, że przetnie również linię AL. Podobnie po przeprowadzeniu linii PB jest jasne, że linia SP przetnie linię AB. Jest więc oczywiste, że linie AL i PT przetną się. Ale linia PT leży na powierzchni stycznej do cylindra wzdłuż linii długości MO, linia AL zaś znajduje się na powierzchni stycznej do cylindra wzdłuż linii długości DE, która jest granicą części widocznej. Wynika więc to, co początkowo zakładano.

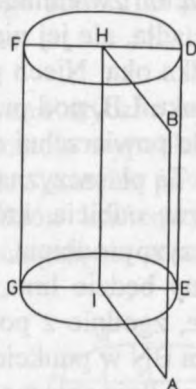
Jednak wszystkie te płaszczyzny podobnie jak i ta, na której jest linia ST, rozciągają się między okiem i powierzchnią zwierciadła. I jest to oczywiste także w przypadku powierzchni zwierciadła, te płaszczyzny są styczne do samej powierzchni zwierciadła, ale jej nie przecinają. To jest oczywiste również w przypadku środka oka. Niech punkt N będzie najbliższym zaznaczonym punktem na łuku LB, pod punktem B. Wyobraźmy sobie jakąś płaszczyznę styczną do powierzchni cylindra na linii długości, na której się znajduje punkt N. Ta płaszczyzna musi więc, jak wynika z EE XI,18, przeciąć płaszczyznę odbicia, którą jest płaszczyzna ABL. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia, którą jest płaszczyzna ABL, i wspomnianej płaszczyzny będzie linia prosta, którą niech będzie linia NR. Jest więc oczywiste, zgodnie z poprzednimi rozważaniami, że linia NR jest styczna do koła BN w punkcie N; ale punkt N jest niżej położony niż punkt B, wobec tego linia styczna, którą jest linia NR, będzie niżej położona niż linia styczna, którą jest linia AB, zgodnie z twierdzeniem I,60 tego dzieła. Linia NR nie dojdzie więc do punktu A, który jest środkiem oka. Ten sam dowód można przeprowadzić dla każdej dowolnej płaszczyzny, która jest w taki sposób styczna do widocznej powierzchni zwierciadła cylindrycznego. Podobnie można również dowodzić dla płaszczyzn stycznych do [powierzchni] dowolnych zwierciadeł stożkowych. Wynika więc to, co zakładano.

6. Każda płaszczyzna odbicia¹, na której znajdują się linia styczna do podstawy zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego oraz linia długości tego zwierciadła, musi być styczna do tego właśnie zwierciadła wzdłuż tej linii długości.

To wynika z twierdzenia 2 tej księgi, ponieważ w tamtym i tym twierdzeniu jest ten sam dowód. Przyjawszy rysunek z tamtego twierdzenia [tj. rys. 3], płaszczyznę odbicia oznaczmy jako GAF^2 , na której linia ZF niech będzie styczna do cylindra bądź stożka w punkcie F, a linią długości cylindra lub stożka niech będzie linia GF. Twierdzą, że ta płaszczyzna odbicia będzie styczna do [powierzchni] cylindra lub stożka. Bo jeśli przyjmiemy, że ta płaszczyzna przetnie cylinder lub stożek

zwierciadła, to wówczas linia ZF przetnie również podstawę tego zwierciadła. A jest to niezgodne z założeniem. Wynika więc to, co zakładano.

7. Jeżeli umieścimy naprzeciw oka zwierciadło wypukłe cylindryczne lub stożkowe w taki sposób, że środek oka nie znajduje się na powierzchni cylindra albo stożka, a punkt rzeczy widzianej jest wraz z okiem na płaszczyźnie przecinającej zwierciadło wzdłuż osi, to wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni widocznej zwierciadła będzie linia długości zwierciadła, a jeśli tym wspólnym przecięciem jest linia długości, to płaszczyzna odbicia przecina zwierciadło wzdłuż osi (Alh. IV,29).

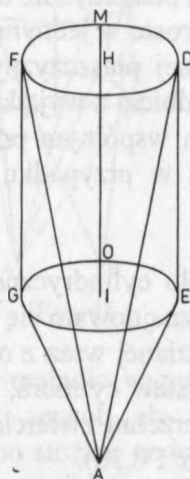


[Rys. 3a]

Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe, którego osią niech będzie HI [rys. 3a]¹. Jego powierzchnią widoczną dla oka niech będzie EDFG. Środkiem oka niech będzie punkt A, a B niech będzie punktem widzianym. Płaszczyzna odbicia (na której, zgodnie z twierdzeniem V,27 tego dzieła, muszą się znajdować punkty A i B) niech przetnie to zwierciadło wzdłuż osi HI. Twierdzę, że wspólnym przecięciem tej płaszczyzny odbicia i powierzchni EDFG jest linia długości zwierciadła. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem I,93 tego dzieła, wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i powierzchni całego cylindra zwierciadła jest prostokąt ograniczony dwiema liniami długości i dwiema średnicami podstaw cylindra, podczas gdy płaszczyzna odbicia przechodzi przez środek oka, naprzeciw którego, zgodnie z twierdzeniem 1 tej księgi, znajduje się [część] powierzchni zwierciadła widoczna dla oka, to jest oczywiste, że wspólnym przecięciem tych dwóch powierzchni będzie jedna linia długości, która jest jednym bokiem tego prostokąta, który jest wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i powierzchni całego cylindra. Zgodnie z twierdzeniem I,90 tego dzieła, to samo dotyczy również zwierciadła

stożkowego, ponieważ wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni stożkowej zwierciadła widocznej dla oka jest jeden bok tego trójkąta, który jest wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i całej powierzchni tego stożka zwierciadła; a ten bok jest jedną z linii długości stożka. Wynika więc to, co zakładano.

8. Spośród wszystkich płaszczyzn stycznych do powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego lub stożkowego tylko jedna jest prostopadła do płaszczyzny odbicia przecinającej zwierciadło wzdłuż osi tak, że ona jest styczna wzdłuż wspólnego przecięcia tej płaszczyzny [odbicia] i [powierzchni] zwierciadła, tzn. wzdłuż linii długości, dzielącej widoczną powierzchnię zwierciadła na równe części.



[Rys. 3b]

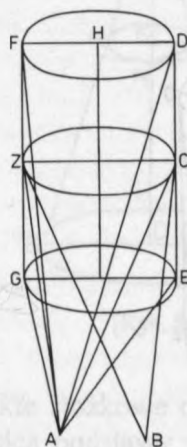
Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe, którego widoczną dla oka powierzchnią niech będzie EDFG. Ośią niech będzie linia HI, a środkiem oka niech będzie punkt A [rys. 3b]¹. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia przecinającej zwierciadło wzdłuż osi oraz [powierzchni] zwierciadła niech będzie linia długości, którą jest linia MO, dzieląca powierzchnię EDFG na równe części. Niech powierzchnie płaskie – ile tylko ich jest – będą styczne do powierzchni zwierciadła. Twierdzę, że ta jedna płaszczyzna, która jest styczna do zwierciadła wzdłuż linii długości MO, jest prostopadła do płaszczyzny odbicia, a wszystkie pozostałe powierzchnie² są do niej ukośne. Jak to wynika z twierdzenia I,92 tego dzieła, linia MO wraz z półśrednicami podstaw cylindra tworzy kąty proste i podobnie jest z półśrednicami wszystkich kół równoległych do tych podstaw przecinających cylinder, jak to wynika z twierdzenia I,100 i I,23 tego dzieła.

Zgodnie z twierdzeniem I,96 tego dzieła jest również oczywiste, że wszystkie prostopadłe, które dadzą się poprowadzić wewnątrz cylindra do tej powierzchni stycznej do zwierciadła, muszą przejść przez oś zwierciadła i wszystkie te prostopadłe leżą na płaszczyźnie przecinającej zwierciadło wzdłuż osi. Wobec tego zgodnie z definicją, ta styczna płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny odbicia. Wszystkie pozostałe więc płaszczyzny styczne do wymienionej powierzchni zwierciadła wzdłuż pozostałych linii długości są ukośne w stosunku do płaszczyzny odbicia. Inaczej bowiem byłoby, gdyby te płaszczyzny styczne musiały się przeciąć; jeśliby bowiem przez jakiś punkt na linii (która, zgodnie z EE XI,3, jest wspólnym przecięciem tych płaszczyzn) zostały poprowadzone do płaszczyzny odbicia dwie linie na tych płaszczyznach stycznych, których punkty skrajne na płaszczyźnie odbicia stykają się z trzecią linią, to powstałyby dwa kąty proste w jednym trójkącie, co jest niemożliwe. Nie ma zatem żadnej innej płaszczyzny stycznej do zwierciadła i prostopadłej do płaszczyzny odbicia z wyjątkiem tej jednej płaszczyzny stycznej do zwierciadła na tym wspólnym przecięciu. Ten sam dowód można przeprowadzić również w przypadku zwierciadeł stożkowych. Wynika więc to, co zakładano.

9. Jeżeli umieścimy zwierciadło cylindryczne wypukłe naprzeciw oka w taki sposób, aby oko nie znajdowało się na samej powierzchni cylindra, ale punkt rzeczy widzianej wraz z okiem znalazł się na płaszczyźnie równoległej do podstaw cylindra, to wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie koło równoległe do podstaw cylindra (Alh. IV,30).

Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe, a jego oś oznaczmy jako HI. Podstawą górną niech będzie koło FD, a podstawą dolną koło GE. Środek oka niech będzie w punkcie A. Punktem rzeczy widzianej niech będzie B [rys. 4]¹. Zwierciadło umieścimy dokładnie naprzeciw oka, jak założyliśmy. Twierdzą, że płaszczyzna odbicia (która jest ABCZ) przecina powierzchnię danego zwierciadła w taki sposób, że wspólnym przecięciem, które oznaczmy jako CZ, będzie koło równoległe do podstaw zwierciadła. Wynika to bowiem z założenia i twierdzenia I,100 tego dzieła. Albo [można dowieść tego] w taki sposób: poprowadźmy od oka dwie linie styczne do [powierzchni] zwierciadła i niech będą to linie AZ i AC. Punkty Z i C niech będą punktami styczności [tych linii] położonymi naprzeciw siebie na tej samej płaszczyźnie. Od jednego i drugiego punktu poprowadźmy linie wzdłuż długości cylindra i niech to będą linie DCE i FZG. Ponieważ linia DC jest równa linii FZ, a linia CE równa linii ZG z założenia i zgodnie z twierdzeniem I,25 tego dzieła (dlatego że podstawy zwierciadła i płaszczyzna odbicia są równoległe), to jest

oczywiste, że linia ZC (która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła) będzie równoległa do łuków podstaw, a są to łuki DF i GE . Poprowadźmy linie DF , CZ i GE ; linie te będą, zgodnie z *EE I,33*, proste i równoległe, a te krzywe, które znajdują się na tych samych płaszczyznach, będą również równoległe, chociaż są koliste, ponieważ są równoległe na tej samej powierzchni cylindrycznej. Wynika więc to, co zakładano.

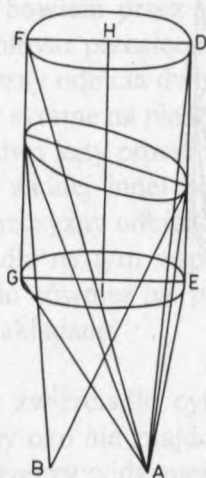


[Rys. 4]

10. Jeżeli umieścimy zwierciadło wypukłe cylindryczne albo stożkowe naprzeciw oka w taki sposób, aby oko nie znajdowało się na powierzchni cylindra albo stożka, podczas gdy płaszczyzna odbicia pada ukośnie na oś zwierciadła, to wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie przecięcie ostrokątne¹ (*Alh. IV,31*).

Weźmy, jak w poprzednich twierdzeniach, zwierciadło wypukłe cylindryczne albo stożkowe, którego osią niech będzie linia HI . Jego powierzchnię widoczną dla oka oznaczmy jako $EDFG$. Środkiem oka niech będzie punkt A , zaś punkt rzeczy widzianej oznaczmy jako B . Płaszczyzna odbicia niech przetnie zwierciadło ukośnie poza osią, tzn. nie równoległe do podstaw cylindra [rys. 4a]². Twierdzę, że wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła widocznej dla oka jest część przecięcia ostrokątnego. Ponieważ z twierdzenia *I,103* tego dzieła wynika, że nie jest możliwe, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny, przecinającej cylinder lub stożek poprzez oś w sposób nierównoległy do podstaw i powierzchni [bocznej] całego stożka lub cylindra, było koło bądź linia długości, zgodnie z twierdzeniem 7 tej księgi³, i ponieważ taka płaszczyzna nie przetnie stożka bądź cylindra wzdłuż

długości osi, to jest oczywiste, że wspólnym przecięciem powierzchni odbicia (która jest płaszczyzną) i części powierzchni zwierciadła stożkowego bądź cylindrycznego, położonej naprzeciw oka, nie będzie mógł być łuk koła ani linia długości. Będzie to więc część przecięcia ostrokątnego, gdyż całe takie przecięcie całej powierzchni stożkowej bądź cylindrycznej oraz płaszczyzny przecinającej stożek bądź cylinder nazwalibyśmy w twierdzeniu I,98 tego dzieła przecięciem ostrokątnym. Wynika więc to, co zakładano.

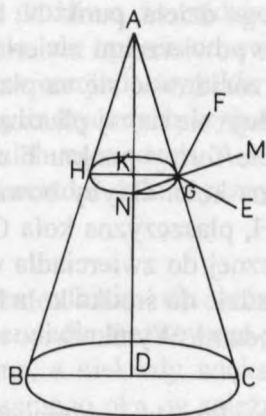


[Rys. 4a]

11. Gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego jest koło, to wszystkie płaszczyzny styczne do zwierciadła są prostopadłe do płaszczyzny odbicia.

Niech pozostanie układ taki, jaki występuje w twierdzeniu 9 tej książki. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem I,95 tego dzieła, wszystkie płaszczyzny styczne do cylindra są styczne wzdłuż linii długości, to z twierdzenia I,92 tego dzieła wynika, że, skoro wszystkie linie długości wraz z półśrednicami podstaw tworzą kąty proste, zatem wszystkie te płaszczyzny są prostopadłe do tych podstaw. Wobec tego na podstawie twierdzenia I,100 i I,23 tego dzieła wszystkie te linie są prostopadłe do koła, równoległego do podstaw cylindra. A to koło, zgodnie z twierdzeniem 9 tej książki, jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła. A zatem, zgodnie z definicją powierzchni prostopadłych do powierzchni, wszystkie te płaszczyzny styczne do cylindra są poprowadzone prostopadłe do wspomnianej płaszczyzny odbicia. A to jest przedmiotem twierdzenia.

12. Jest niemożliwe, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego było koło (Alh. IV,41, również V,50).



[Rys. 5]

Zwierciadło wypukłe stożkowe oznaczmy jako ABC, a jego wierzchołek jako A. Średnicą podstawy niech będzie BC. Oś zwierciadła niech będzie linia AD [rys. 5]¹. Jak wynika z twierdzenia I,89 tego dzieła punkt D jest środkiem podstawy. Punkt E niech będzie środkiem oka, a punkt rzeczy widzianej oznaczmy jako F. Twierzę, że forma punktu F nie może odbić się do oka E od jakiegoś punktu danego zwierciadła w taki sposób, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła było koło. Bo jeśli by to było możliwe, to przyjmijmy, że forma punktu F odbiła się do oka E od punktu G zwierciadła. Niech koło GH będzie wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, niech K będzie środkiem koła. Zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, koło GH będzie równoległe do podstawy BC. Poprowadźmy zatem, jak podano w EE XI,12, z punktu G poza zwierciadło linię GM prostopadłą do płaszczyzny stycznej do stożka w punkcie G. Ponieważ powierzchnia podstawy nie jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do stożka w punkcie G (dlatego, że każda powierzchnia styczna do stożka jest styczna wzdłuż linii długości, jak to wynika z twierdzenia I,95 tego dzieła, a linia długości jest położona ukośnie do powierzchni podstawy), to jest oczywiste, że powierzchnia koła HG równoległego do podstawy nie jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie G. Po przeprowadzeniu zatem linii prostopadłej wewnątrz stożka, którą jest linia GM, stanie się rzeczą oczywistą, że ona sama nie dochodzi do środka koła, który jest w punkcie K, ale znajduje

się pod nim w innym punkcie na osi, który jest punktem N. Linia MGN utworzy z osią kąt ostry w kierunku punktu na wierzchołku, tzn. kąt GNA, który zgodnie z EE I,32, musi być ostry, dlatego że kąt GKN, na podstawie EE I,29, jest prosty, skoro kąt ADC jest prosty. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia V,27 tego dzieła, punkt N, który jest punktem granicznym linii prostopadłej do powierzchni zwierciadła (a tą linią prostopadłą jest linia NGM), musi znajdować się na płaszczyźnie odbicia, wobec tego linia HKG nie znajduje się na tej płaszczyźnie. Jest więc oczywiste, że nie zachodzi odbicie formy punktu F do oka E od punktu G zwierciadła, tzn. od punktu na kole. Gdyby bowiem zachodziło odbicie od punktu G, np. na kole GH, płaszczyzna koła GH musiałaby być prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie G, a prostopadłą MG można by poprowadzić do środka koła K. A to jest niemożliwe zgodnie z poprzednimi wywodami. Wynika więc to, co zakładano.

13. Jeżeli umieścimy naprzeciw oka zwierciadło stożkowe wypukłe w taki sposób, aby oko nie znalazło się na powierzchni stożka albo na powierzchni do niej stycznej, a punkt rzeczy widzianej i środek oka były na tej samej płaszczyźnie, równoległej do podstawy stożka, to wtedy nie jest możliwe, aby odbicie zachodziło do oka.

Gdy zachodzi takie położenie środka oka i punktu rzeczy widzianej względem zwierciadła stożkowego wypukłego, jak zakładamy, to jest oczywiste, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, że wspólnym przecięciem powierzchni odbicia i powierzchni stożkowej zwierciadła jest koło, ponieważ powierzchnia odbicia jest płaszczyzną. Wynika więc to, co zakładano w poprzednim twierdzeniu. Wykazano w nim bowiem, że jest niemożliwe, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego było koło. Ponieważ, gdyby tym wspólnym przecięciem było koło, to ono, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, byłoby równoległe do podstawy zwierciadła, a powierzchnia tego koła znalazłaby się na płaszczyźnie odbicia. Skoro jednak, zgodnie z twierdzeniem I,23 tego dzieła, oś AD^1 jest prostopadła do tego koła, to linie długości stożka będą nachylone do tego koła tworząc ze średnicami podstawy kąty ostre i w ten sposób te linie byłyby ukośne do płaszczyzny odbicia. Wobec tego na tej płaszczyźnie nie można by poprowadzić prostopadłej do linii długości, ale, zgodnie z twierdzeniem V,27 tego dzieła, prostopadła poprowadzona do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie odbicia znajduje się na płaszczyźnie odbicia i jest [wobec tego] prostopadłą do linii długości, podczas gdy dowolna powierzchnia styczna do stożka jest styczna do niego wzdłuż linii długości. Nigdy zatem nie będzie zachodziło odbicie do oka formy dowolnego

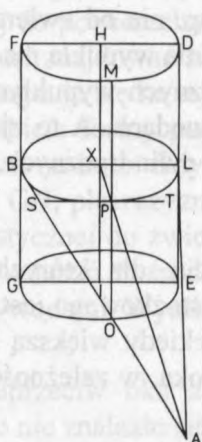
z punktów rzeczy widzianej w takim położeniu, gdy powierzchnia odbicia jest styczna do zwierciadła stożkowego jako stożkowego². Jeśliby natomiast powierzchnia, na której znajduje się linia styczna do koła zwierciadła w dowolnym punkcie tego koła, przecięła powierzchnię zwierciadła, wtedy jest możliwe, że znajdzie odbicie od tych zwierciadeł i od tego punktu na kole, ale np. nie od zwierciadeł stożkowych, chyba tylko wtedy, gdy ich powierzchnia wypukła ma cechy podobne do zwierciadeł kulistych albo cylindrycznych wypukłych. O zjawiskach na nich mówiliśmy w poprzednich wywodach. A to zjawisko tutaj nie jest charakterystyczne dla zwierciadeł cylindrycznych. Wynika więc to, co zakładano.

14. Spośród płaszczyzn odbicia, dla których wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła stożkowego jest linia prosta, niekiedy tylko jedną płaszczyznę, a niekiedy większą ich liczbę możemy przeprowadzić do tego samego oka, w zależności od różnego jego usytuowania.

Jeżeli umieścimy oko tak, aby widać było mniej niż połowę powierzchni stożkowej stożka, co zostało opisane w twierdzeniu IV,84 tego dzieła¹, to wówczas tylko jedna płaszczyzna odbicia, której wspólnym przecięciem z powierzchnią stożka jest linia długości dojdzie do oka, ponieważ tylko ona jedna przejdzie przez oś stożka. W twierdzeniu 7 tej książki wykazaliśmy bowiem, że na każdej płaszczyźnie odbicia musi być oś zwierciadła, gdy odbicie zachodzi od zwierciadeł stożkowych i wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła jest linia długości zwierciadła.

Jeżeli natomiast umieścimy oko w ten sposób, że będzie widoczny cały stożek, co zostało opisane w twierdzeniu IV,92², do oka może dojść nie tylko większa liczba płaszczyzn odbicia, dla których wspólnym przecięciem jest linia długości, ale nieskończona ich liczba, jak to zakładamy, bo wtedy środek oka jest wspólny dla wszystkich linii długości całego zwierciadła³ i wszystkie one układają się względem oka w taki sam sposób. Kiedy bowiem promień widzenia będzie przedłużeniem osi stożka, będzie widoczny cały stożek, jak to wykazano w twierdzeniu IV,92 tego dzieła⁴. Wobec tego na dowolnej płaszczyźnie odbicia znajduje się cała oś i linia prostopadła do powierzchni zwierciadła dochodząca do osi z punktu odbicia. W tym położeniu przecięciem dowolnej płaszczyzny odbicia i powierzchni stożkowej zwierciadła będzie linia długości, ponieważ dowolna płaszczyzna, na której jest cała oś, posiada wspólną linię długości tego stożka razem z powierzchnią stożka, zgodnie z twierdzeniem I,90 tego dzieła. Wynika więc to, co zakładano.

15. Każda płaszczyzna odbicia, dla której wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego jest linia długości zwierciadła, dzieli widoczną powierzchnię zwierciadła na równe części.

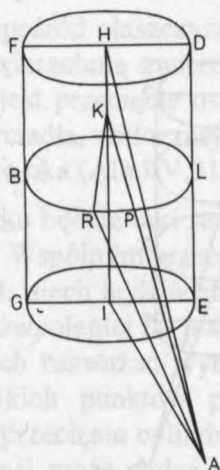


[Rys. 6]

Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe, a jego widoczną dla oka powierzchnię oznaczmy jako EDFG, a oś jako HI. Niech środkiem oka będzie punkt A, jak w poprzednich twierdzeniach [rys. 6]¹. Z twierdzenia 7 tej książki wynika, że płaszczyzna odbicia przecinająca w taki sposób zwierciadło cylindryczne bądź stożkowe, przecina je na [całej] długości osi HI. Linia długości, wzdłuż której ta płaszczyzna odbicia przecina zwierciadło, niech będzie linia MO. Twierdzę, że linia MO dzieli na równe części powierzchnię zwierciadła EDFG, widoczną dla oka. Z twierdzenia V,25 tego dzieła wynika bowiem, że ta płaszczyzna odbicia jest prostopadła do powierzchni stycznej do cylindra wzdłuż linii MO. Jeśli zatem na linii MO zaznamy punkt P i poprowadzimy linię AP, a z punktu P poprowadzimy linię PS na płaszczyźnie stycznej do zwierciadła w taki sposób, że linia SP będzie styczna do dowolnego koła cylindra, równoległego do podstaw, i koło to oznaczmy jako BL to linia AP będzie prostopadła do linii PS, ponieważ została ona poprowadzona na płaszczyźnie prostopadłej do tej płaszczyzny; wobec tego, zgodnie z EE III,19, poprowadzona linia AP przejdzie przez środek koła BL, który oznaczmy jako X. Poprowadźmy linie AB i AL, które, zgodnie z twierdzeniem I,58 tego dzieła, są równe; poprowadźmy również półśrednice XB i XL. Powstaną więc, zgodnie z EE I,8, trójkąty równokątne ABX i ALX. Kąt PAL będzie równy kątowi PAB. Wobec tego, jak wynika z twierdzenia I,58 tego dzieła, linia AP dzieli łuk LPB na równe

części w punkcie P, a łuk LPB jest równoległy do podstaw cylindra. Również linie proste, ograniczające widoczną dla oka powierzchnię zwierciadła, są równoległe do linii MO, co wynika z twierdzenia I,92 tego dzieła i EE I,28. Linia MO podzieli podstawy cylindra na równe części. Ponieważ linia MO znajduje się na płaszczyźnie odbicia, jest oczywiste, że płaszczyzna odbicia dzieli widoczną dla oka powierzchnię zwierciadła na równe części. Obojętnie, czy na zwierciadle stożkowym znajduje się jedna powierzchnia odbicia, czy jest ich bardzo dużo, zawsze, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia, stosuje się ten sam dowód. Wynika więc to, co zakładano.

16. Spośród wszystkich płaszczyzn odbicia, poprowadzonych od tego samego zwierciadła cylindrycznego wypukłego do tego samego oka, istnieje tylko jedna płaszczyzna, dla której wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła jest linia długości tego zwierciadła (Alh. IV,29).

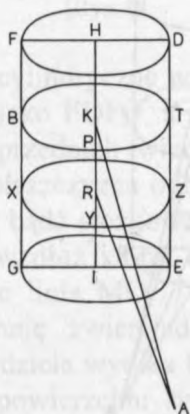


[Rys. 6a]

Niech będzie taki sam układ rysunku jak w poprzednim twierdzeniu [rys. 6a]¹. Ponieważ nigdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni danego zwierciadła nie jest linia długości zwierciadła, z wyjątkiem takiej sytuacji, kiedy płaszczyzna odbicia przecina cylinder wzdłuż osi, jak to wynika z twierdzeniem 7 tej książki, bo w tym położeniu płaszczyzna odbicia (a jest nią płaszczyzna AHI) przecina powierzchnię EDFG, widoczną dla oka, i [dzieli] ją na dwie równe części, jak to wynika z poprzedniego twierdzenia tej książki, i jest to jedyna płaszczyzna przechodząca przez oś HI, to jest oczywiste, że wspólnym przecięciem tej jednej jedynej płaszczyzny i powierzchni zwierciadła jest

linia długości zwierciadła. Jeżeli natomiast przyjmujemy, że jest również inna płaszczyzna odbicia, dla której wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła jest linia długości zwierciadła, to w rezultacie, zgodnie z twierdzeniem 7 tej księgi, ta płaszczyzna musiałaby przeciąć zwierciadło wzdłuż osi HI. Poprowadźmy zatem na tej płaszczyźnie linię od środka oka do osi HI; a jest nią linia APK. Poprowadźmy również na danej płaszczyźnie odbicia, przecinającej widoczną powierzchnię zwierciadła na równe części, linię APK. Jest więc oczywiste, że te dwie linie proste ograniczałyby płaszczyznę²; a to jest niemożliwe. Wynika zatem to, co zakładano. Można bowiem sobie wyobrazić tylko jedną płaszczyznę, na której znalazłyby się oś cylindra, środek oka oraz punkt rzeczy widzianej; i nie ma ich więcej.

17. Spośród wszystkich płaszczyzn odbicia, poprowadzonych od tego samego zwierciadła cylindrycznego wypukłego do tego samego oka, istnieje tylko jedna płaszczyzna, dla której wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła jest koło równoległe do podstaw cylindra (Alh. IV,30).



[Rys. 7]

Przyjmijmy – jak powyżej – taki układ, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego było koło. Ponieważ na każdej tego rodzaju płaszczyźnie odbicia linia poprowadzona prostopadłe do powierzchni, stycznej do zwierciadła, w punkcie odbicia jest średnicą¹ koła równoległego do podstaw cylindra, a na powierzchni cylindra może być tylko jedno koło równoległe do podstaw cylindra, które wraz ze środkiem oka znajduje się na tej samej płaszczyźnie, to jest oczywiste, że spośród wszystkich płaszczyzn odbicia, poprowadzonych od jednego zwierciadła cylindrycznego wypukłego do tego samego oka, istnieje tylko jedna płaszczyzna, dla której wspól-

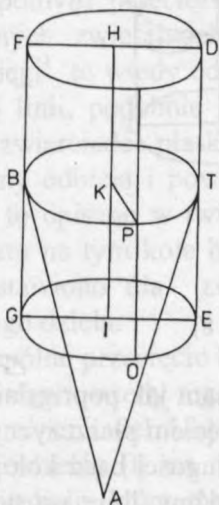
nym przecięciem z powierzchnią zwierciadła jest koło równoległe do podstaw cylindra. Jeśli bowiem powiemy, że jest ich więcej, to wspólnym przecięciem jednej z tych płaszczyzn i powierzchni zwierciadła niech będzie linia kolista, którą jest linia BPT [rys. 7]², a przecięcia drugą płaszczyzną niech będzie linia XYZ. Punkty, w które padają na osi cylindra środki tych kół, oznaczmy jako K i R. Poprowadźmy od środka oka do tych punktów linie AK i AR. Jest więc oczywiste, że z powodu tego, że podstawy są równoległe do tych linii, (ponieważ w trójkącie AKR dwa kąty przy podstawie KR są proste, bo linia KR, skoro jest częścią linii HI, osi cylindra, jest również prostopadła do podstaw cylindra, zgodnie z twierdzeniem I,92 tego dzieła), to również, zgodnie z twierdzeniem I,23 tego dzieła, linia [KR] jest prostopadła do powierzchni kół równoległych do tych podstaw. Wobec tego jest ona prostopadła również do średnic tych kół, zaś te średnice pokrywają się z liniami AK i AR. Linia KR jest więc prostopadła do obydwu linii, AK i AR; a to jest niemożliwe. Wynika więc to, co zakładano.

18. Jest możliwe, że spośród płaszczyzn odbicia, dla których wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego jest przecięcie ostrokątne, poprowadzonych od tej samej części zwierciadła, widocznej [dla oka], większa ich liczba dotrze do tego samego oka (Alh. IV,31).

Niech układ rysunku będzie taki sam, jak powyżej w twierdzeniu 15 tej księgi [por. rys. 6]. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia, przechodzącej przez oś HI, niech będzie linia MO, a wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia równoległej do podstaw cylindra¹ niech będzie koło PBL. Z wcześniejszych rozważań wynika, że odbicie do oka A może zachodzić od wszystkich punktów powierzchni cylindrycznej MPB i MPL wzdłuż części przecięcia cylindra². Ponieważ [forma] dowolnego punktu rzeczy widzianej może padać na dowolny z tych punktów, jest oczywiste, że od dowolnego z tych punktów może zachodzić również odbicie do oka, zgodnie z twierdzeniem 1 tej księgi. Zostało więc udowodnione, że części tych przecięć cylindrycznych bądź stożkowych mogą być nieograniczone i nieskończone, z których każda przecina cylinder bądź stożek zwierciadła wzdłuż tej samej linii prostopadłej do osi, jak to wynika z twierdzenia I,104 tego dzieła. Wynika więc to, co zakładano.

19. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego albo stożkowego jest linia długości, to niezależnie od jakiego punktu na tej linii zachodzi odbicie do oka, zawsze zachodzi ono na tej samej płaszczyźnie (Alh. IV,32 i IV,42).

20. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego jest koło, to niezależnie od tego, od jakiego punktu na tym kole zachodzi odbicie, zachodzi ono zawsze na tej samej płaszczyźnie (Alh. IV,32).



[Rys. 7b]

Rysunek niech będzie taki sam jak w twierdzeniu 17 tej księgi [rys. 7b]¹. Oznaczmy na kole BPT taki punkt, jaki będzie się nam podobał. Jest oczywiste, że zawsze półśrednica tego koła poprowadzona przez punkt K, środek tego koła BPT, będzie prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w danym punkcie odbicia. A zatem dowolna z tych prostopadłych, poprowadzona na zewnątrz do płaszczyzny stycznej do cylindra, znajduje się, zgodnie z EE XI,1, w całości na tej samej płaszczyźnie, natomiast ta płaszczyzna, poprowadzona poza cylinder, jest płaszczyzną odbicia. Wobec tego każda z tych prostopadłych znajduje się na płaszczyźnie tego koła, jak również i środek oka², którym jest punkt A, leży na tej samej płaszczyźnie. Na tej więc tylko płaszczyźnie będzie zachodziło odbicie [formy] każdego punktu rzeczy widzianej od dowolnego punktu tego całego koła bądź jego widzianej części. A to jest przedmiotem twierdzenia.

21. Każda prostopadła do wypukłej powierzchni zwierciadła cylindrycznego, poprowadzona w punkcie odbicia, przedłużona wewnątrz zwierciadła, jest średnicą koła równoległego do podstaw cylindra, i odwrotnie¹ (Alh. IV,34).

22. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego jest dowolna linia, to odbicie formy danego punktu rzeczy widzianej do jednego oka zachodzi tylko od jednego punktu z tego przecięcia (Alh. IV,33).

Jeżeli bowiem wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i [powierzchni] wspomnianych zwierciadeł jest linia prosta, jak opisano w twierdzeniu 7 tej księgi¹, to wtedy odbicie będzie zachodziło tylko od jednego punktu na tej linii, podobnie jak to wykazano w twierdzeniu V,45 tego dzieła dla zwierciadeł płaskich. Jeżeli natomiast wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego będzie koło, jak to opisano w twierdzeniu 9 tej księgi², to wtedy tylko od jednego punktu na tym kole będzie zachodziło odbicie w taki sposób, jak to przedstawiono dla zwierciadeł kulistych wypukłych w twierdzeniu VI,16 tego dzieła.

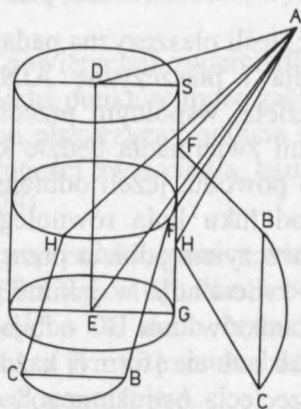
Jeżeli natomiast wspólne przecięcie będzie ostrokątne, jak to opisano w twierdzeniu 10 tej księgi³, wtedy tego założenia trzeba specjalnie dowieść dla omawianych zwierciadeł. Układ rysunku niech będzie taki sam jak w poprzednim twierdzeniu [tj. na rys. 8]. Częścią przecięcia cylindrycznego niech będzie linia, którą oznaczmy jako PU. Twierdzę, że odbicie do oka na tej płaszczyźnie [odbicia] będzie możliwe tylko od jednego punktu na linii PU. Przyjąwszy bowiem dowolny inny punkt, okaże się, że prostopadła poprowadzona prostopadłe od tego punktu odbicia do powierzchni cylindra jest prostopadła do linii długości cylindra, przechodzącej przez ten punkt. Dlatego, zgodnie z EE I,29, będzie również prostopadła do osi i będzie ta prostopadła średnicą koła równoległego do podstaw zwierciadła, zgodnie z poprzednim twierdzeniem. Płaszczyzna odbicia i to koło przecinają się, a linia im wspólna jest średnicą tego koła, zgodnie z twierdzeniem I,104 tego dzieła, a ta średnica jest prostopadła do powierzchni stycznej do zwierciadła w tym punkcie. Płaszczyzna odbicia natomiast przecina tę linię długości cylindra, na której jest [punkt] styczności, i jest ona nachylona do tej linii, wobec tego ta płaszczyzna odbicia jest również nachylona do osi. Jednak na płaszczyźnie nachylonej do jakiejś linii (jest to szczególnie widoczne w przypadku przecięcia ostrokątnego, zgodnie z twierdzeniem I,112 tego dzieła) można sobie wyobrazić tylko jedną linię, która pada prostopadłe na tę linię [długości] bądź na samą oś, ponieważ linia ograniczająca tę powierzchnię tylko w jednym punkcie przecina tę linię, do której nachyla się płaszczyzna; w rezultacie tylko od jednego punktu na tym przecięciu będzie zachodziło odbicie. Jeśli przyjmie się, że odbicie do tego samego oka, zachodziłoby od dwóch punktów na tym przecięciu, to zdarzyłoby się, że na tej samej płaszczyźnie tego odbicia byłyby dwie linie prostopadłe do

osi cylindra [leżące] na tej płaszczyźnie. To zaś nie może się zdarzyć, ponieważ ta płaszczyzna jest nachylona do tej osi. Bowiem linia prostopadła poprowadzona przez punkt odbicia pada na punkt na osi, który znajduje się na kole równoległym do podstaw cylindra i jest wspólnym przecięciem powierzchni koła i płaszczyzny odbicia, zgodnie z twierdzeniem I,104 tego dzieła. Jeśliby zatem zachodziło odbicie także od innego punktu, wówczas prostopadła, poprowadzona przez ten punkt odbicia, byłaby, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, średnicą drugiego koła równoległego do tego pierwszego koła i padłaby w punkt na osi, w którym nie przecina osi płaszczyzna odbicia. Wobec tego na tych wszystkich płaszczyznach odbicia tylko od jednego punktu na linii wspólnej zachodzi odbicie na danej [jednej] płaszczyźnie do tego jednego oka, chociaż w przypadku dwojga oczu odbicie może zachodzić od dwóch punktów powierzchni zwierciadła, np. od dwóch krańców średnicy koła, która jest prostopadła do tego przecięcia. Jednak jeśli średnica owa jest równa odległości między oczyma bądź mniejsza, nie będzie inaczej; nie może natomiast to odbicie zachodzić do jednego oka, ponieważ, zgodnie z twierdzeniem IV,78 tego dzieła, widzi ono zawsze mniej niż połowę cylindra zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano. A to dopiero później zbadamy szczegółowo, wykazując, że na tych zwierciadłach, jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła jest dowolna linia, odbicie do oka będzie zachodziło tylko od jednego punktu na całym zwierciadle.

23. Jeżeli linia widziana nie znajduje się na tej samej płaszczyźnie, na której leży środek oka i oś zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego, i jeżeli linia widziana w stosunku do podstawy zwierciadła będzie wyżej albo niżej niż środek oka – obojętnie czy odbicie będzie zachodziło od linii długości zwierciadła, czy od koła – zawsze będzie ono zachodziło wzdłuż przecięć ostrokątnych przecinających powierzchnię zwierciadła w punktach leżących na tych liniach¹.

Niech linią widzianą będzie linia prosta bądź krzywa, którą oznaczymy jako BC [rys. 9]². Środkiem oka niech będzie punkt A. Osią zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego niech będzie linia DE. Poprowadźmy linie AD i AE, tworzące wraz z osią DE trójkąt ADE, na płaszczyźnie którego niech nie będzie linii BC, ale ta linia niech znajduje się poza tą płaszczyzną i niech [płaszczyzna padania³ linii BC] przetnie trójkąt ADE albo niech go nie przecina. Niech go przetnie: niech zachodzi odbicie [formy] linii BC do oka A od powierzchni danego zwierciadła. Jest oczywiste, że, zgodnie z twierdzeniem V,29 tego dzieła,

forma całej linii BC nie może się odbić od jednego punktu zwierciadła do oka A.



[Rys. 9]

Twierdzą że, jeśli [forma] linii BC odbije się do oka A od linii długości zwierciadła, którą jest linia SG, i jeśli linia BC będzie równoległa do osi DE, a płaszczyzna, na której jest linia BC, przetnie zwierciadło [przechodząc] przez oś prostopadłe do podstawy zwierciadła i przetnie płaszczyznę, na której znajdują się środek oka i oś zwierciadła, którą jest linia DE, w taki sposób, że wspólnym przecięciem tych płaszczyzn jest oś DE, to, chociaż [odbicie] zajdzie od linii długości zwierciadła, którą jest linia SG, jednak dojdzie do oka wzdłuż przecięć ostrokątnych⁴. Jest bowiem oczywiste, zgodnie z twierdzeniem V,27 tego dzieła, że na każdej płaszczyźnie odbicia powinien być środek oka i punkt, którego forma odbija się do oka, oraz punkt zwierciadła, który jest punktem odbicia. Niech więc będzie tak, aby punkt B odbił się do oka A od punktu zwierciadła F, a punkt C od punktu H. Poprowadźmy linie AF, BF, AH, CH. Ponieważ punkt B linii BC nie znajduje się, zgodnie z założeniem, na płaszczyźnie ADE, to jest oczywiste, że płaszczyzna jego odbicia, która jest płaszczyzną AFB, przetnie płaszczyznę ADE w punkcie A i w punkcie F zwierciadła. Przetnie ją więc wzdłuż linii AF, a zwierciadło przetnie [przechodząc] przez oś DE. Z założenia zaś płaszczyzna ta nie jest równoległa do podstawy, ponieważ linia widziana, którą jest linia BC, nie leży na płaszczyźnie ADE, ale poza nią. A zatem płaszczyzna BFA, która jest płaszczyzną odbicia, przetnie oś DE poprzecznie, ponieważ linia widziana leży wyżej bądź niżej od środka oka, zgodnie z założeniem. Wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie więc, jak to przedstawiono w twierdzeniu 10 tej księgi, przecięcie ostrokątne. Podobnie jest w przypadku punktu C i dowolnego punktu leżącego na

linii między punktami BC. Chociaż [formy] wszystkich punktów linii BC odbijają się do środka oka A od linii długości zwierciadła, to jednak odbicie [formy] każdego punktu do oka będzie zachodziło wzdłuż przecięcia ostrokątnego⁵.

Podobnie należy dowodzić, jeśli płaszczyzna padania linii BC przecina prostopadłe oś zwierciadła i płaszczyznę ADE; wtedy, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, wspólnym przecięciem płaszczyzny padania linii BC i powierzchni zwierciadła będzie koło równoległe do podstawy zwierciadła. Z tego powodu, jeżeli odbicie będzie zachodziło do oka, będzie zachodziło od łuku koła równoległego do podstawy zwierciadła. Jednak każda płaszczyzna odbicia przechodząca przez środek oka przetnie ukośnie oś zwierciadła w jakimś punkcie tego łuku. Chociaż [formy] wszystkich punktów linii BC odbijają się do oka A od łuku koła zwierciadła, to jednak odbicie [formy] każdego punktu tej linii będzie zachodziło wzdłuż przecięcia ostrokątnego⁶. Jeżeli jednak jakiś punkt linii BC znajdzie się wraz ze środkiem oka na tej samej płaszczyźnie, przecinającej zwierciadło równoległe do podstawy, to odbicie [formy] tylko tego jednego punktu będzie zachodziło wzdłuż koła, odbicie zaś [formy] każdego innego punktu będzie zachodziło wzdłuż przecięcia ostrokątnego⁷. W ten sposób punkty tej linii ukazują oku różne zjawiska. Wynika więc to, co zakładano.

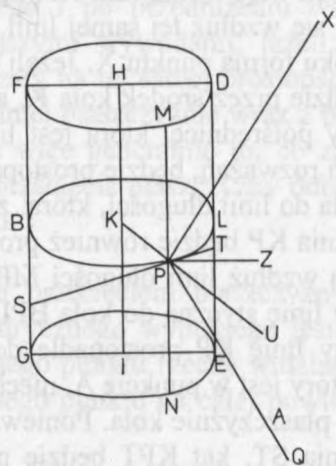
24. Na każdej płaszczyźnie odbicia od zwierciadeł wypukłych cylindrycznych bądź stożkowych muszą się znajdować: środek oka, punkt widziany, punkt odbicia i punkt osi, w który pada prostopadła, poprowadzona od punktu odbicia do powierzchni zwierciadła (Alh. IV,23 i IV,34).

Z twierdzenia V,27 tego dzieła wynika, że na płaszczyźnie odbicia znajdują się: środek oka, punkt odbicia i punkt odbity¹. Na każdej bowiem płaszczyźnie odbicia muszą się znajdować linia padania i odbicia, które obejmują trzy wyżej wspomniane punkty. Jeśli płaszczyzna odbicia przetnie zwierciadło wzdłuż jego linii długości, to z twierdzenia 7 tej książki wynika, że cała oś i punkt, na który pada prostopadła, poprowadzona od punktu odbicia, znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Jeśli natomiast wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie koło, to jest oczywiste, że środek tego koła (który jest punktem osi, w którym, zgodnie z twierdzeniem 21 tej książki, przecinają się wszystkie prostopadłe, poprowadzone z punktów odbicia [znajdujących się] na całym kole) znajduje się na płaszczyźnie odbicia, gdyż wtedy całe koło znajduje się na płaszczyźnie odbicia. Jeśli zaś wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie przecięcie ostrokątne, to z twierdzenia 10 tej książki wynika, że to przecięcie

jest nachylone w kierunku osi cylindra, przecinając oś w punkcie, na który pada prostopadła, poprowadzona z punktu odbicia do powierzchni stycznej do cylindra w tym punkcie przecięcia. Wynika więc to, co zakładano, zgodnie z całą różnorodnością wymienionych przecięć.

25. Na widocznej powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego, na której od jakichś punktów może zachodzić odbicie do oka, wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła jest bądź to linia długości zwierciadła, bądź koło, bądź przecięcie ostrokątne (Alh. IV,28).

Oznaczmy, jak poprzednio, granice widocznej części cylindra i niech to będzie część DEFG [rys. 10]¹. Niech będzie dany punkt P na tej widocznej powierzchni, a X niech będzie punktem rzeczy widzianej. Twierdzą, że z punktu P może zachodzić odbicie formy punktu X do środka oka, który jest w punkcie A.



[Rys. 10]

Najpierw przyjmijmy, że płaszczyzna odbicia (na której znajdują się: punkt widziany, oznaczony jako X, i środek oka A oraz punkt P, od którego zachodzi odbicie) przecina cylinder zwierciadła wzdłuż osi HKI. Zgodnie z twierdzeniem 7 tej książki, wspólnym przecięciem tej płaszczyzny i powierzchni zwierciadła będzie linia długości cylindra; niech to będzie linia MPN. Poprowadźmy linię XP. Z punktu P poprowadźmy, jak podano w EE I,11, linię prostopadłą do linii MN, niech to będzie linia PZ. W punkcie P, który jest granicą linii ZP, niech powstanie kąt równy kątowi XPZ; niech to będzie kąt ZPQ. Jeśli środek oka, który jest w punkcie A, znajdzie się na linii PQ, to jest oczywiste na podstawie twierdzenia V,20 tego dzieła, że z punktu P zachodzi odbicie formy

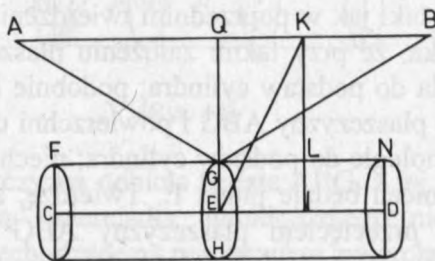
punktu X do oka A znajdującego się na linii PQ, ponieważ kąt padania jest równy kątowi odbicia².

Jeśli płaszczyzna padania przetnie cylinder zwierciadła równoległe do podstaw, to jest oczywiste na podstawie twierdzenia 9 tej książki, że wspólnym przecięciem będzie koło i ponownie z punktu P zajdzie odbicie do oka. Narysujmy, zgodnie z twierdzeniem I,102 tego dzieła, koło równoległe do podstaw cylindra, przechodzące przez punkt P; niech to będzie koło BPL, a jego środek niech będzie w punkcie K. Jeśli na jego płaszczyźnie rozciągającej się poza zwierciadło będzie punkt widziany, to poprowadźmy linię XP, a jeżeli ją przedłużymy i przejdzie ona przez środek koła K, to stanie się rzeczą oczywistą, że oś HKI cylindra jest prostopadłą do płaszczyzny tego koła jak również do podstaw cylindra, jak to wynika z twierdzenia I,100 i I,23 tego dzieła, ponieważ sama oś HKI będzie również prostopadłą do linii XP. Wobec tego, jak wynika z EE I,29, również linia długości cylindra (a jest to linia MP) będzie prostopadła do linii XP. Niech więc forma linii XP, zgodnie z twierdzeniem V,21 tego dzieła, odbije się wzdłuż tej samej linii, a skoro na niej znajduje się oko, ukaże się oku forma punktu X. Jeżeli natomiast po przedłużeniu linia XP nie przejdzie przez środek koła K, ale odchyli się od niego, to wtedy wykreślimy półśrednicę, którą jest linia KP, która, jak to wynika z wcześniejszych rozważań, będzie prostopadła do osi HI; będzie więc linia KP prostopadła do linii długości, którą, zgodnie z EE I,29, jest linia MP i wobec tego linia KP będzie również prostopadła do płaszczyzny stycznej do cylindra wzdłuż linii długości MP. Na tej płaszczyźnie [stycznej] poprowadźmy linię styczną do koła BPL w punkcie P; jest to linia SPT. Poprowadźmy linię KP prostopadłą do tej płaszczyzny, do punktu U. Środek oka, który jest w punkcie A, niech będzie, jak powyżej, na linii QP, na tej samej płaszczyźnie koła. Ponieważ na tej płaszczyźnie stycznej do koła jest linia ST, kąt KPT będzie prosty, a wobec tego, zgodnie z EE I,15, i kąt SPU jest prosty. Jest więc oczywiste, że kąt APS jest mniejszy od kąta prostego: a zatem jest ostry. Wobec tego, jak wynika z EE I,13, kąt APT jest rozwarty. Odetnijmy zatem, jak podano w twierdzeniu I,27 tego dzieła, od kąta prostego UPT kąt równy kątowi APU. Jeśli linia XP utworzy ten kąt, to, z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że od punktu P odbije się forma punktu X do punktu A, który jest środkiem oka. Jeśli natomiast linia XP nie utworzy tego kąta, to wtedy, jak poprzednio, w punkcie P, końcu linii UP, wykreślimy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi XPU. To, co wcześniej zakładano, wynika również wtedy, gdy na linii tworzącej ten kąt umieścimy środek oka A. Ponieważ prostopadła KPU wraz z punktem A znajduje się na tej samej płaszczyźnie, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, to i linia AP będzie na tej samej płaszczyźnie wraz z linią XP. Będzie ta powierzchnia płasz-

czyzną odbicia i będzie prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii MN, ponieważ prostopadła PU (która leży na płaszczyźnie odbicia) jest prostopadła do [płaszczyzny] stycznej do zwierciadła wzdłuż linii MN. I na tej [płaszczyźnie odbicia] znajduje się również koło BPL równoległe do podstaw cylindra. I w sposób podobny można dowodzić w stosunku do pozostałych punktów danych na wspomnianej powierzchni zwierciadła.

To samo wynika również, jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego będzie przecięcie ostrokątne, zgodnie z twierdzeniem 10 tej księgi, ponieważ, jak to wykazaliśmy w twierdzeniu 21 tej księgi, jest oczywiste, że zawsze prostopadła poprowadzona z punktu odbicia pada na dowolny punkt na osi i jest półśrednicą jakiegoś koła, przecinającego powierzchnię zwierciadła równoległe do podstaw cylindra. Natomiast odbicie nastąpi do oka po przeprowadzeniu linii stycznej w danym punkcie do zwierciadła wzdłuż przecięcia ostrokątnego i po przedłużeniu wspomnianej prostopadłej, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, jeżeli punkt rzeczy widzianej i środek oka będą leżały na tej samej prostopadłej bądź na liniach znajdujących się na tej samej płaszczyźnie wraz z prostopadłą, tworząc z nią kąty równe. Wynika więc generalnie to, co zakładano w stosunku do każdego wspólnego przecięcia płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego.

26. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego jest linia długości zwierciadła, to forma jednego punktu rzeczy widzianej odbija się do jednego oka tylko od jednego punktu na całej powierzchni zwierciadła (Alh. V,46).



[Rys. 11]

Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe, którego oś oznaczmy jako CD, a płaszczyznę odbicia jako ABG tak, aby forma punktu B odbiła się do punktu A, środka oka¹, od punktu G powierzchni zwierciadła [rys. 11]². Wspólnym przecięciem tych powierzchni niech będzie linia FGN,

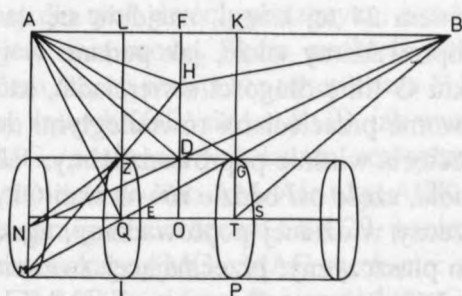
która jest linią długości zwierciadła. Twierdzę, że forma punktu B nie może się odbić do środka oka A od dowolnego punktu zwierciadła, ale tylko od punktu G. Poprowadźmy bowiem, jak podano w EE XI,12, z punktu G prostopadłą do płaszczyzny stycznej do [powierzchni] cylindra wzdłuż linii FGN. Niech to będzie linia GQ, przecinająca linię AB, poprowadzoną między punktem widzianym i środkiem oka w punkcie Q. Z twierdzenia 21 tej księgi wynika, że ta linia GQ, poprowadzona do wewnątrz zwierciadła, przecina oś CD: niech więc ją przetnie w punkcie E. Ponieważ linia długości, a jest nią linia FN, znajduje się na płaszczyźnie odbicia, jest oczywiste, że i oś CD, zgodnie z twierdzeniem 7 tej księgi, będzie na tej właśnie płaszczyźnie, a więc i punkt E będzie na tej płaszczyźnie. Skoro jednak można pomyśleć tylko o jednej takiej płaszczyźnie, na której znajdują się równocześnie wszystkie punkty: A, B, G i E oraz linie FN i CD, to jest oczywiste, że od powierzchni całego zwierciadła może się odbić forma punktu B do środka [oka] A wyłącznie od linii długości FN. Ale w twierdzeniu V,45 tego dzieła wykazano, że na płaskich zwierciadłach odbicie [formy] jednego punktu do oka zachodzi tylko od jednego punktu [zwierciadła]. Wobec tego i na tych wypukłych zwierciadłach odbicie nie może zachodzić od żadnego innego punktu z wyjątkiem tego jednego punktu, leżącego na linii FN. Forma punktu B odbija się więc do oka A tylko od jednego punktu z całej powierzchni zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

27. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego jest koło równoległe do podstaw zwierciadła, to odbicie do oka formy jednego punktu rzeczy widzianej zachodzi tylko od jednego punktu na całej powierzchni zwierciadła (Alh. V,46).

Niech układ będzie taki jak w poprzednim twierdzeniu¹. Z twierdzenia 17 tej księgi wynika, że przy takim założeniu płaszczyzna odbicia ABG będzie równoległa do podstaw cylindra; podobnie koło, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny ABG i powierzchni cylindra (a jego osią jest CD), jest równoległe do podstaw cylindra; niech to będzie koło GH, a jego środkiem niech będzie punkt E. Twierdzę, że od koła GH (które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny ABG i powierzchni zwierciadła) odbicie formy [punktu] B do oka A może zachodzić tylko od jednego punktu G. Z twierdzenia VI,16 tego dzieła wynikało, że na zwierciadłach kulistych wypukłych od koła, na którym zachodzi odbicie, odbicie to może zachodzić tylko od jednego punktu. Wobec tego na tych zwierciadłach cylindrycznych odbicie do oka formy jednego punktu rzeczy widzianej będzie zachodziło tylko od jednego punktu, a jest nim punkt G. Jeżeli natomiast przyjmiemy, że w podobny sposób jak to jest

w przypadku punktu G odbicie będzie mogło zachodzić od innego punktu, np. od punktu L^2 , to poprowadźmy, jak podano w EE XI,12, z danego punktu L linię LK, prostopadłą do powierzchni cylindra. Linia ta po przedłużeniu, zgodnie z twierdzeniem 21 tej księgi, padnie prostopadle na oś CD; niech więc padnie w punkt na osi i niech to będzie punkt I^3 . Jak wynika z poprzednich rozważań, linia LK przetnie również linię AB, poprowadzoną między punktem rzeczy widzianej i środkiem oka; niech ją przetnie w punkcie K, ponieważ obojętnie czy to będzie ten sam punkt co punkt Q, czy inny punkt niż punkt Q, poprowadźmy zawsze linię KE do środka koła GH, i będzie ta linia KE prostopadła do osi CD, ponieważ znajduje się ona na płaszczyźnie odbicia, przecinającej prostopadle oś CD. Wobec tego dwie linie KE oraz KI wraz z linią EI, będącą częścią osi, utworzyłyby trójkąt, którego dwa kąty byłyby proste: a to jest niemożliwe. Jest więc oczywiste, że w takim układzie forma punktu B nie odbije się do oka A od żadnego innego punktu na całej powierzchni zwierciadła z wyjątkiem punktu G. A to jest przedmiotem twierdzenia.

28. Jeżeli wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego jest ostrokątne, to forma jednego punktu rzeczy widzianej odbija się do oka tylko od jednego punktu na całej powierzchni zwierciadła (Alh. V,47).



[Rys. 12]

Niech płaszczyzną odbicia będzie ABG, a jej wspólnym przecięciem z powierzchnią zwierciadła cylindrycznego niech będzie przecięcie ostrokątne, przechodzące na powierzchni zwierciadła przez punkt G [rys. 12]¹. Niech B będzie punktem rzeczy widzianej, zaś A środkiem oka, a G punktem odbicia. Twierdzę, że forma punktu B nie odbija się do środka oka A od dowolnego punktu na całej powierzchni zwierciadła, a tylko od punktu G.

Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę równoległą do podstaw cylindra, przecinającą zwierciadło wzdłuż koła, które jest EZI. A to niech

się stanie w taki sposób: po przeprowadzeniu, jak podano w EE I,12, z punktu A linii prostopadłej do osi cylindra, linia ta, zgodnie z EE I,29, będzie poprowadzona prostopadle do powierzchni cylindra, ponieważ będzie prostopadła do linii długości cylindra, na który ona pada. Poprowadźmy również z tego samego punktu osi, którym jest punkt Q, inną linię, którą jest linia QE, tworzącą z osią kąt prosty. Z EE XI,18 wynika więc, że wyobrażona płaska powierzchnia przechodzi przez linie AQ i QE oraz będzie poprowadzona prostopadle do powierzchni zwierciadła. Ponieważ, zgodnie z EE XI,4, oś zwierciadła jest prostopadła do tej płaszczyzny, to z EE XI,14 i twierdzenia I,92 tego dzieła wynika, że ta płaszczyzna jest równoległa do podstaw zwierciadła. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, gdy ta płaszczyzna przecina powierzchnię cylindra równolegle do podstaw, jest oczywiste, że przecina ona wzdłuż koła, którym jest EZI, a jego środkiem jest punkt Q. W ten sam sposób przez punkt G poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstaw zwierciadła, która przetnie zwierciadło wzdłuż koła SGP, którego środkiem niech będzie punkt T. W tym kole poprowadźmy od osi do punktu G linię, i niech to będzie linia TG. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem 21 tej księgi, będzie prostopadła do powierzchni stycznej do cylindra wzdłuż linii długości, na której jest punkt G. Linia TG po jej przedłużeniu niech się przetnie z linią AB w punkcie K; przetnie się zaś na mocy twierdzenia I,2 tego dzieła, dlatego że dzieli kąt AGB, a punkty A, G, B, zgodnie z twierdzeniem 24 tej księgi, znajdują się na tej samej płaszczyźnie odbicia. Poprowadźmy także, jak podano w twierdzeniu I,101 tego dzieła, z punktu G linię długości zwierciadła, którą jest linia GZ, leżąca pomiędzy dwoma przecięciami równoległymi do podstaw zwierciadła, które to przecięcia właśnie poprowadziliśmy. Jak wynika z twierdzenia I,25 tego dzieła, część osi będzie równa linii GZ, a będzie to linia TQ. Z punktu B rzeczy widzianej poprowadźmy, zgodnie z EE XI,11, linię prostopadłą do płaszczyzny, przecinającej zwierciadło wzdłuż koła EZI; będzie to linia BH. Poprowadźmy dwie linie AZ i HZ. Poprowadźmy z punktu Z na tej płaszczyźnie linię ZQ do osi zwierciadła. Ta linia ZQ będzie prostopadła do osi QT, zgodnie z twierdzeniem 21 tej księgi, podobnie jak płaszczyzna EZI, na której ta linia się znajduje. Zgodnie z tym samym twierdzeniem 21 tej księgi, linia ZQ będzie prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie Z. Zatem linia QZ poprowadzona poza powierzchnię zwierciadła musi podzielić kąt HZA, dlatego że od przecięcia linii HZ i AZ zostaje poprowadzona prostopadle do powierzchni stycznej, na którą padają ukośnie linie AZ i HZ. To wynika z twierdzenia I,29 tego dzieła, ponieważ poprowadzona linia ZQ przecina się z linią AH², która leży naprzeciw wierzchołka kąta AZH; niech się więc przetnie w punkcie L. Twierdzę, że forma punktu H linii

BH odbija się do oka A z punktu Z na zwierciadle. Poprowadźmy bowiem z punktu A linię równoległą do linii KG, którą jest linia AM. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie się z linią BG, z którą przecina się każda linia do niej [tzn. do linii KG] równoległa³, bo wszystkie linie AB, BG i KG znajdują się na tej samej płaszczyźnie odbicia. Punktem przecięcia linii BG i AM niech więc będzie punkt M. Z EE XI,6 wynika również, że linia GZ jest równoległa do linii BH, ponieważ obydwie są prostopadłe do płaszczyzny EZI, równoległej do podstaw cylindra. Zgodnie z EE XI,7, linia BGM znajduje się zatem na tej samej płaszczyźnie [co linie KG i AM], skoro przecina ona te dwie linie równoległe. Na płaszczyźnie odbicia (a jest to płaszczyzna ABG⁴) znajdują się zatem trzy punkty M, Z, H. Ponieważ z założenia i zgodnie z EE I,33, linia AM jest równoległa do linii KG, i linia ZL jest równoległa do linii KG, (bo linie GZ i TQ są równe i równoległe, jak to wynika z poprzednich rozważań), zaś linia TG została poprowadzona do punktu K, a linia QZ do punktu L, to, wobec tego, zgodnie z EE I,30, linia LZ będzie równoległa do linii AM. Na podstawie twierdzenia I,2 tego dzieła, linie LZ i AM znajdują się na jednej płaszczyźnie i na tej samej płaszczyźnie, zgodnie z EE XI,7, jest też linia HA. Trzy punkty M, Z, H leżą więc na tej samej płaszczyźnie, na której są linie LZ, AM, HA, a tą płaszczyzną jest płaszczyzna HLZM. Ale już wcześniej okazało się, że znajdują się one [tzn. punkty M, Z, H] na płaszczyźnie MBH; wobec tego są na linii wspólnej dla tych dwóch płaszczyzn, a zatem, zgodnie z EE XI,3, linia HZM jest linią prostą. Skoro punkt G jest punktem odbicia zgodnie z założeniem, to, na podstawie twierdzenia V,20 tego dzieła, kąt AGK będzie równy kątowi KGB, ale kąt KGB, jak wynika z EE I,29, jest równy kątowi AMG, ponieważ jest kątem zewnętrznym do tamtego, a linia KG jest równoległa do linii AM. Ale i kąt AGK jest równy kątowi MAG według tego samego twierdzenia EE I,29, ponieważ jest z nim naprzemianległy; a zatem kąty AMG i MAG są równe: stąd, zgodnie z EE I,6, i dwie linie AG i MG są równe. Ponieważ linia GZ jest prostopadła do płaszczyzny AHZ, jak to wynika z wcześniejszych rozważań, to linia GZ będzie również prostopadła do każdej linii na płaszczyźnie AHZ, poprowadzonej z punktu Z: wobec tego będzie prostopadła i do linii ZM. Kąt MZG będzie więc kątem prostym. Na podstawie EE I,47 kwadrat linii MG jest równy sumie kwadratów linii MZ⁵ i GZ i podobnie kwadrat linii AG jest równy kwadratowi linii AZ i GZ, ale kwadrat linii MG jest równy kwadratowi linii AG, ponieważ linie MG i AG są równe. Odjąwszy zatem z jednej i z drugiej strony wspólny kwadrat, a jest to kwadrat linii GZ, pozostanie kwadrat linii MZ równy kwadratowi linii AZ: linia MZ jest więc równa linii AZ. Zgodnie z EE I,5 kąt AMZ jest zatem równy kątowi ZAM, ale, zgodnie z EE I,29, kąt zewnętrzny LZH jest równy

kątowi wewnętrznemu AMZ , a kąt ZAM jest równy kątowi LZA , zgodnie z tym samym twierdzeniem EE I,29 , ponieważ te kąty są naprzemianległe; kąt AZL jest więc równy kątowi LZH . Forma punktu H padając zatem na zwierciadło w punkcie Z odbija się do środka oka A z punktu zwierciadła, którym jest punkt Z , jak to wynika z twierdzenia V,20 tego dzieła.

Jeśli natomiast będziemy twierdzili, że forma punktu B może się odbić do oka A również od innego punktu niż punkt G , to ten inny punkt będzie się znajdował albo na linii długości, którą jest linia GZ , albo na innej linii. Jeśli się znajduje na linii GZ , to poprowadźmy od danego punktu na linii GZ – niech to będzie punkt D – linię prostopadłą do linii GZ , która przedłużona w jedną i drugą stronę będzie linią ODF^6 . Poprowadźmy linie AD i BD . I tak linia ODF , zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, będzie musiała przeciąć linię AB i będzie równoległa do linii AM , zgodnie z EE I,28 , a linia poprowadzona z punktu B do punktu D będzie się musiała przeciąć z linią AM , zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła. Punkt D i punkt M będą na tej samej płaszczyźnie, ponieważ linie DF i AM , zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła, znajdują się na tej samej płaszczyźnie, skoro są równoległe. Linia BD padnie więc w punkt M albo w inny punkt na linii AM . Jeśliby padła w punkt M , można by poprowadzić z punktu B do punktu M dwie linie proste, np. linię BGM i linię BDM . A to jest niemożliwe, ponieważ wtedy dwie linie proste ograniczyłyby płaszczyznę. Jeśli natomiast w inny punkt na linii AM niż punkt M padnie linia BD – niech to będzie punkt N – to poprowadźmy z punktu N do punktu Z linię NZ . Można dowieść, że ta linia NZ wraz z linią HZ utworzy linię prostą, podobnie jak to wcześniej zostało dowiedzione w stosunku do linii MZ . Bo skoro punkty M , Z , H znajdują się na dwóch płaszczyznach, znajdują się również na ich wspólnym przecięciu. Wobec tego, zgodnie z EE XI,3 , linia HZN będzie linią prostą. Z tego powodu z punktu H będzie można poprowadzić dwie linie proste przechodzące przez punkt Z , padające w różne punkty na linii AM , co, zgodnie z EE XI,1 , jest niemożliwe. Jest więc oczywiste, że z żadnego innego punktu na linii GZ nie może się odbić forma punktu B do oka A jak tylko od punktu G . Jeśli twierdzimy, że poza tą linią, przyjąwszy jakiś punkt na powierzchni zwierciadła, może się odbić forma punktu B od innego punktu do oka A , to poprowadźmy, zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, do tego punktu na zwierciadle linię długości zwierciadła. Dowiedzimy natomiast, zgodnie z wcześniej przeprowadzonym dowodem, że forma punktu H odbija się do oka A z punktu na kole EZI , na które pada ta linia. Ale już zostało dowiedzione, że forma punktu H odbije się do oka A z punktu Z na zwierciadle. W ten sposób zaszłoby odbicie formy tego samego punktu H do tego samego oka A z dwóch punktów na jed-

nym kole, co jest wbrew twierdzeniu VI,16 tego dzieła i jest niemożliwe. Wynika zatem, że forma punktu B odbija się do oka A tylko z jednego punktu danego zwierciadła. Jest bowiem oczywiste, że jeśli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego będzie przecięcie ostrokątne, to wtedy nie będzie odbicia, chyba że tylko od jednego punktu, ponieważ, jak wynika z twierdzenia 24 tej księgi, na każdej płaszczyźnie odbicia, zachodzącego od tych zwierciadeł, musi się znaleźć punkt na osi, na który pada prostopadła, poprowadzona od punktu odbicia, która jest prostopadłą do linii długości zwierciadła, przechodzącej przez ten punkt; wobec tego jest ona prostopadłą również do osi zwierciadła, zgodnie z EE I,28, ponieważ linia długości cylindra i oś zawsze są równoległe, jak to wynika z twierdzenia I,92 tego dzieła. Jest zaś ona prostopadła do wspólnego przecięcia ostrokątnego w punkcie, w którym będzie zachodziło odbicie, i do jakiegoś koła równoległego do podstaw zwierciadła, zgodnie z twierdzeniem I,104 tego dzieła; jest więc ona półśrednicą tego koła. Płaszczyzna odbicia i to koło, zgodnie z twierdzeniem 21 tej księgi, przecinają się na tej półśrednicy koła, prostopadłej do obwodu. Płaszczyzna odbicia natomiast, na której znajduje się ostrokątne przecięcie, jest nachylona do powierzchni koła i do tej półśrednicy, która jest prostopadłą poprowadzoną przez punkt odbicia. Nie można jednak zrozumieć, do jakiej powierzchni jest nachylone [to ostrokątne przecięcie] wzdłuż osi cylindra, skoro nie istnieje tylko jedna linia, która pada prostopadle na oś, zgodnie z twierdzeniem I,112 tego dzieła. Jeśliby natomiast od tego ostrokątnego przecięcia zachodziło odbicie z dwóch punktów, to doszłoby do tego, że na tej powierzchni przecięcia mogłyby zostać poprowadzone dwie prostopadłe do osi zwierciadła, co jest niemożliwe, ponieważ jedno oko zawsze widzi mniej niż połowę cylindra. Podobny wniosek wynika z twierdzenia IV,79 tego dzieła, że dwoje oczu widzi mniej niż połowę cylindra, kiedy średnica podstawy cylindra jest większa niż odległość między oczami. To dokładniej zostało wyjaśnione w twierdzeniu 22 tej księgi. Wynika więc to, co zakładano.

29. Jeśli wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego jest ostrokątne, to można znaleźć punkt odbicia [formy] danego punktu widzianego do środka oka (Alh. V,48).

Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni danego zwierciadła jest linia długości zwierciadła, można łatwo odnaleźć punkt odbicia, jak to wykazano dla zwierciadeł płaskich w twierdzeniu V,46 tego dzieła, podobnie jeżeli wspólnym przecięciem będzie koło, wtedy punkt odbicia równie łatwo można znaleźć, jak to wykazano

w twierdzeniu 20 albo 22 księgi VI tego dzieła dla zwierciadeł kulistych wypukłych. Jeśli natomiast tym przecięciem będzie przecięcie ostrokątne, jak zakładamy, to niech będzie dany punkt B rzeczy widzianej, którego [forma] odbija się od jakiegoś punktu przecięcia ostrokątnego do środka oka A.

Twierdząc, że jest możliwe znalezienie punktu odbicia. Poprowadźmy z punktu A, jak w poprzednim twierdzeniu, płaszczyznę równoległą do podstaw cylindra, która przetnie cylinder na kole, oznaczonym EZI¹. Z punktu B poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, prostopadłą do tej [poprowadzonej] płaszczyzny, a tą prostopadłą niech będzie linia BH, i znajdziemy na tej powierzchni punkt, sposobem podanym w twierdzeniu VI,20 bądź VI,22 tego dzieła dla zwierciadeł kulistych wypukłych, od którego odbija się forma punktu H do oka A, i niech to będzie punkt Z. Od punktu Z, zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, poprowadźmy linię długości ZG. Poprowadźmy linię HA. Z punktu Z poprowadźmy, jak podano w EE I,12, prostopadłą do linii HA; niech to będzie linia ZL. Z punktu A, zgodnie z EE I,31, poprowadźmy do niej [tzn. linii ZL] linię równoległą i niech to będzie linia AM. Linię HZ przedłużmy tak, aby przecięła się ona z linią AM, a to przecięcie niech nastąpi w punkcie M. Z punktu M poprowadźmy linię do punktu B, która będzie musiała przeciąć linię ZG, skoro znajduje się na tej samej płaszczyźnie co tamta linia. Ponieważ, skoro, na podstawie EE XI,6, linia BH jest równoległa do linii GZ, to dzięki temu, że obydwie linie BH i GZ są prostopadłe do tej samej płaszczyzny EZI, równoległej do podstaw cylindra, linia HM, zgodnie z EE XI,7, będzie się znajdowała na ich płaszczyźnie. Z tego powodu również linia MB będzie na tej samej płaszczyźnie. A ta linia, jeśliby przecięła linię ZG w punkcie G, to z tego, co zostało dowiedzione w poprzednim twierdzeniu, wynika, że punkt G będzie punktem odbicia formy punktu B do oka A. To wszystkie wywody i jeszcze wiele innych są oczywiste dzięki temu, co zostało powiedziane w poprzednim dowodzie. A to jest to, co zakładano, ponieważ zgodnie z tym sposobem można znaleźć punkt odbicia [formy] dowolnego punktu do danego oka.

30. Odbicie [formy] linii prostej równoległej do osi zwierciadła cylindrycznego wypukłego zachodzi do oka od linii długości zwierciadła, jeżeli oko nie znajduje się na tej samej płaszczyźnie [co linia i oś] (Alh. VI,26).

Niech linia ZK będzie osią zwierciadła cylindrycznego wypukłego, a linią widzianą równoległą do osi niech będzie linia TH. Środek oka E niech się znajduje poza płaszczyzną THZK¹ [rys. 13]². Twierdząc, że forma linii TH odbija się do oka E od linii długości zwierciadła, która jest

wewnętrzny jest równy wewnętrznemu. Jednak również kąt MBE jest równy kątowi BEO, ponieważ jest kątem naprzemianległym. Wobec tego kąt BOE jest równy kątowi BEO, a zatem, zgodnie z EE I,6, w trójkącie BEO bok BE jest równy bokowi BO.

Weźmy również inny punkt na linii TH i niech to będzie punkt T. Poprowadźmy linię TO. Ponieważ Linia TH jest równoległa do linii długości zwierciadła, którą jest linia AG, dlatego że, zgodnie z EE I,30, jedna i druga linia są równoległe do osi ZK, to jest oczywiste, zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła, że linie TH i AG leżą na tej samej płaszczyźnie, skoro również linia TH i oś ZK znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Wobec tego, zgodnie z EE XI,7, linia QBO przecinająca te równoległe linie, a są to linie TH i AG, znajduje się wraz z nimi na tej samej płaszczyźnie. Podobnie wraz z nimi i linia TO znajduje się na tej samej płaszczyźnie, jak to wynika z EE XI,1, ponieważ punkty T i O znajdują się na tej wspomnianej płaszczyźnie. Linia TO przetnie więc linię AG, a punktem przecięcia niech będzie punkt G. Poprowadźmy linie EG i ET. Ponieważ linia AG, która jest linią długości zwierciadła, jest prostopadła do płaszczyzny koła BF, to, zgodnie z EE XI,8, oś ZK, do której linia AG jest równoległa, jest prostopadła do powierzchni tego samego koła, zaś z twierdzenia I,23 i I,92 tego dzieła wynika, że [linia AG] jest prostopadła do podstawy cylindra. Powierzchnia koła BF jest zaś częścią płaszczyzny EOB^F. Ta płaszczyzna bowiem przecina cylinder równoległe do podstawy, jak to wynika z wcześniejszych wywodów. Zatem, zgodnie z definicją linii prostopadłej do powierzchni, kąt GBO jest prosty i kąt GBE też jest prosty. Wobec tego, zgodnie z EE I,47⁵, kwadrat linii GO ma wartość kwadratów obydwu linii GB i BO⁶, a kwadrat linii GE ma wartość kwadratów obydwu linii GB i BE⁷. Ponieważ wykazano, że linie BE i BO są równe, to również ich kwadraty będą równe, a kwadrat BG jest wspólny dla jednego i drugiego trójkąta, a zatem kwadrat linii GE będzie równy kwadratowi linii GO⁸. Jak wynika więc z EE I,6, w trójkącie EGO linia GE będzie równa linii GO, a zatem, zgodnie z EE I,5, kąt GEO będzie równy kątowi GOE. Z punktu G, zgodnie z EE I,12, poprowadźmy prostopadłą do osi zwierciadła, którą jest linia ZK. Tą prostopadłą niech będzie linia GZ, a po jej przedłużeniu poza punkt G do linii TE, niech będzie linią ZGN. Jak wynika z EE I,28, linia ZN będzie równoległa do linii LM, ponieważ obydwie linie NZ i ML są prostopadłe do osi ZK. Ale również, jak wynika z wcześniejszych wywodów, linia EO jest równoległa do linii ML. Linia ZN będzie więc, zgodnie z EE I,30, równoległa do linii EO. Na podstawie EE I,29, kąt TGN, będący kątem zewnętrznym, będzie równy kątowi GOE, który jest kątem wewnętrznym, a kąt NGE będzie równy kątowi GEO, ponieważ są to kąty naprzemianległe. Ale wykazaliśmy, że kąt GEO jest rów-

ny kątowni GOE; a zatem kąt TGN jest równy kątowni NGE. Kiedy zatem linia TGO i linia NGZ są na tej samej płaszczyźnie, na której znajduje się punkt G, to wtedy także punkty O, G, T będą na tej samej płaszczyźnie. W rezultacie, zgodnie z EE XI,1, na tej samej płaszczyźnie znajdują się linie EG, OG, TG. Forma punktu T, jak wynika z twierdzenia V,20 tego dzieła, odbija się więc do oka E z punktu G na zwierciadle z tego powodu, że kąty TGN i NGE są równe.

Jeżeli weźmiemy na linii TH punkt H, który znajdzie się w tej samej odległości od punktu Q i od środka oka E co punkt T, a poprowadzona linia HO przetnie linię długości zwierciadła, którą jest linią AG (punktem przecięcia niech będzie A), i jeżeli poprowadzimy z punktu A linię prostopadłą do osi ZK (którą jest linia AD) i po jej przedłużeniu do linii HE stanie się ona linią DR, to po przeprowadzeniu linii EA okaże się, jak poprzednio, że dwa kąty ABE i ABO są proste, a boki AE i AO są równe. Dwa kąty HAR i EAR stają się równe, jak poprzednio. Forma punktu H, podobnie jak to było powyżej, odbija się więc do oka E z punktu A na zwierciadle. Podobnie również, jeżeli przyjmiemy dowolny [inny] punkt na linii TH, będzie można dowieść, że [forma] tego punktu odbija się do [oka] E od jakiegoś punktu [linii] długości zwierciadła, którą jest AG. Cała linia TH odbija się więc do oka E od jednej linii długości zwierciadła, która jest linią AG. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Należy jednak zaznaczyć, że na naszym rysunku punkt Q linii TH jest punktem środkowym tej linii i znajduje się na tej samej płaszczyźnie co środek oka E. Z tego powodu punkty T i H są równo oddalone od oka. Podobnie jest z punktami odbicia, którymi są punkty G i A. Z tego powodu jest oczywiste, że linie GB i BA są równe i cały układ rysunku jest zgodny z tymi założeniami. Ponieważ, jeśli oko znajduje się poniżej całej linii TH, to trzeba zaznaczyć, że odbicie zachodzi od linii AG w zależności od tego, ile przecięć ostrokątnych powoduje to odbicie, jak to wynika z twierdzenia 23 tej książki. W innym przypadku natomiast musi zachodzić niekiedy odbicie od jakiegoś punktu koła.

31. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego jest linia długości, to odbicie do oka może zachodzić od jakiegoś punktu powierzchni zwierciadła, widocznej dla oka (Alh. IV,40).

Weźmy zwierciadło stożkowe wypukłe BXP, którego wierzchołkiem jest B, średnicą podstawy XP, zaś środkiem podstawy niech będzie [punkt] Q [rys. 14]¹. Linia BQ będzie więc osią tego zwierciadła. Przyjmijmy również dowolny punkt na widocznej powierzchni zwierciadła; jest to punkt G. Środkiem oka niech będzie [punkt] A, zaś punktem rzeczy widzianej niech będzie punkt N. Twierdząc, że forma punktu N może

zgodnie z EE XI,8, linia styczna do koła GC, którą jest linia SGL, jest prostopadła do płaszczyzny, na której znajduje się średnica GC i oś BQ. Zgodnie z definicją linii prostopadłej, kąt LGR jest więc prosty. Jeśli zatem wyobrazimy sobie płaszczyznę styczną do stożka, na której leży linia LGS, styczna do koła BC, to jest oczywiste, że linia RG jest prostopadła do tej płaszczyzny. Jeśli zatem linia odbicia, którą jest linia AG, przechodząca przez stożek, stanie się jedną linią z linią GR, to ona sama będzie prostopadła do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie G i, zgodnie z twierdzeniem V,21 tego dzieła, odbicie formy zajdzie po tej linii, po której pada ona na powierzchnię zwierciadła. Jeśli na tej linii znajdzie się punkt N, jego forma może się odbić do oka A od punktu G na zwierciadle wzdłuż linii AG. Jeśli natomiast linia AG z linią GR nie będzie stanowiła jednej linii, to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia EE I,14 wynika, że kąt AGL jest mniejszy od kąta prostego bądź większy, bo jeśli będzie prosty, to wtedy, zgodnie z tym samym twierdzeniem EE I,14, obydwie linie AG i GR się połączą w jedną linię. Niech więc kąt AGL będzie ostry: przedłużmy linię RG w sposób ciągły i bezpośredni aż do punktu U. Powstanie linia UG, prostopadła do powierzchni stycznej do zwierciadła w punkcie G, a, zgodnie z EE I,15, kąt UGL będzie prosty, zaś kąt UGA będzie ostry. Poprowadźmy zatem, jak podano w EE I,23, na tej samej płaszczyźnie linię GH tworzącą wraz z linią UG kąt równy kątowi UGA. Jeśli więc punkt rzeczy widzianej, który może się znajdować w punkcie N, będzie na linii HG, to z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że jest możliwe, aby z punktu G zachodziło odbicie do oka A. Linia padania, którą jest linia NG, wraz z linią odbicia, którą jest linia GA, znajdują się na tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny stycznej do stożka w punkcie odbicia, którym jest punkt G. Forma punktu N rzeczy widzianej odbija się do oka, które jest w punkcie A, z punktu G na zwierciadle. W ten sam sposób można dowodzić dla każdego innego dowolnego punktu powierzchni zwierciadła. Wynika więc to, co zakładano.

32. Jeżeli dany jest punkt na zwierciadle stożkowym wypukłym (od którego może zajść odbicie [formy] punktu rzeczy widzianej do środka oka), leżący na przecięciu ostrokątnym bądź też na linii długości zwierciadła, to wtedy można znaleźć miejsca, w których, gdy umieścimy środek oka i punkt rzeczy widzianej, zajdzie odbicie do oka od tego właśnie danego punktu zwierciadła, podobnie¹ jak to jest z punktem [odbicia leżącym] na kole równoległym do podstawy (Alh. V,52).

Niech A będzie środkiem oka, a B punktem rzeczy widzianej. Niech G będzie punktem odbicia na powierzchni zwierciadła stożkowego wy-

że linie AN i BM są wzajemnie równoległe do siebie. Z punktu N poprowadźmy zatem, jak podano w EE I,31, linię równoległą do półśrednicy koła, którą jest linia GT, i niech ta linia równoległa będzie linią NF. Poprowadźmy linie NG, MG i NM. Z twierdzenia I,29 tego dzieła wynika również, że po przedłużeniu linii TG przetnie ona linię NM, dlatego że przecina ona kąt MGN, i została przeprowadzona ukośnie na tej samej płaszczyźnie. Również linie NF i GT są równoległe. Skoro linia NM przecina linię NF, to przetnie i linię GT, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła; niech więc ją przetnie w punkcie Q. Z twierdzenia I,2 tego dzieła wynika również, że linia MG po jej przedłużeniu przetnie linię NF, skoro przecina linię GT, równoległą do linii NF; niech punktem przecięcia będzie punkt F. Z punktu A poprowadźmy linię równoległą do linii, prostopadłej do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie G, którą jest linia HZ, i niech tą linią równoległą będzie linia AL. Z twierdzenia I,2 tego dzieła wynika więc, że linia BG przecina się z linią AL, ponieważ przecina linię HZ, która jest równoległa do linii AL. Punktem przecięcia niech więc będzie punkt L. Poprowadźmy również linię, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie G i płaszczyzny koła PG; niech to będzie linia GO. Jest oczywiste, zgodnie z EE III,18, że linia GO będzie prostopadła do półśrednicy koła, którą jest linia GT, dlatego że linia GO jest styczna do koła PG, ponieważ została ona poprowadzona na płaszczyźnie stycznej do zwierciadła w punkcie G. Ponieważ linie NF i GT są równoległe, zgodnie z EE I,29, to linia GO będzie prostopadła do linii NF, równoległej do linii GT. Weźmy linię, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i płaszczyzny stycznej do zwierciadła w punkcie G, i niech to będzie linia GD. Ta linia, skoro przecina linię GH w punkcie G, to, jak wynika z twierdzenia I,2 tego dzieła, przetnie również linię równoległą do linii GH; niech punktem przecięcia będzie punkt D. Linia GD będzie prostopadła do linii AL na podstawie EE I,29, ponieważ linia GD jest prostopadła do linii GH. Skoro linia GH jest prostopadła na płaszczyznę styczną do koła w punkcie G, to musi być prostopadła do linii GD, przedłużonej przez ten sam punkt na tej płaszczyźnie, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny. Z wcześniejszych wywodów wynika natomiast, że linia NF jest równoległa do półśrednicy koła PG, którą jest linia GT. Podobnie i linia AL jest równoległa do linii GH. A zatem, zgodnie z EE XI,15, płaszczyzna, na której znajdują się linie OF i AL (które przedłużone poza punkty L i F będą musiały się przeciąć, jak to wynika z EE I,14, ponieważ kąty FNA i LAF, co jest oczywiste, są mniejsze od dwóch kątów prostych), jest równoległa do płaszczyzny GTH. Ale również linia EG jest równoległa do linii BM, jak to wynika z wcześniejszych wywodów. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła,

znajdują się one na tej samej płaszczyźnie, przecinającej dwie wspomniane płaszczyzny równoległe: jedną wzdłuż linii EG, a drugą wzdłuż linii FL. Wobec tego, zgodnie z EE XI,16, ich wspólne przecięcia będą równoległe, a zatem linia FL będzie równoległa do linii EG. Skoro również linia AN jest równoległa do linii EG, jak wynika z wcześniejszych wywodów, to linia FL, jak wynika z EE I,30, będzie równoległa do linii AN. Jednak płaszczyzna, styczna do zwierciadła w punkcie G, przecina te same płaszczyzny równoległe, a są to płaszczyzny GTH i NFAL; jedną z nich wzdłuż linii EG, wzdłuż której jest styczna do zwierciadła, a drugą z nich wzdłuż linii OD; a zatem, zgodnie z EE XI,16, linia OD jest równoległa do linii EG. Wobec tego, jak wynika z EE I,30, linia OD będzie równoległa do linii AN i LF, równoległych do linii EG. Ponieważ linie NF i AL, między którymi są poprowadzone linie NA, OD, FL, znajdują się na tej samej płaszczyźnie, to, zgodnie z EE XI,2, jest oczywiste, że linie AN, OD, FL znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Poprowadźmy zatem, jak podano w EE I,31, z punktu F linię równoległą do linii LA, która przecina linię OD w punkcie K, a linię AN w punkcie I. Linia FI będzie równa linii LA, jak to wynika z EE I,34. Podobnie linia FK będzie równa linii LD, a KI równa linii DA. Zgodnie z EE VI,2, stosunek IK do KF jest taki jak NO do OF, a zatem, jak wynika z EE V,7, stosunek linii AD do linii DL będzie taki jak linii NO do linii OF. Z wcześniejszych wywodów wynika, że kąt BGZ jest równy kątowi AGZ, ponieważ linia GZ dzieli kąt AGB na równe części, zgodnie z twierdzeniem V,26 tego dzieła. Ale z EE I,29 wynika, że kąt BGZ jest równy kątowi GLA, bo kąt zewnętrzny jest równy wewnętrznemu, a linie HZ i AL są równoległe. Podobnie kąt ZGA, na podstawie tego samego twierdzenia Euklidesa I,29, jest równy kątowi GAL, bo są to kąty naprzemianległe. Kąt GLA jest więc równy kątowi GAL. Wobec tego, jak wynika z EE I,6, linie GA i GL są równe, a linia GD jest prostopadła do linii AL, jak to wynika z wcześniejszych wywodów. Trójkąt AGL został zatem podzielony na dwa trójkąty równokątne i podobne, zgodnie z twierdzeniem I,31 tego dzieła. Stosunek linii AD do linii DL jest więc taki jak linii GA do linii GL, ale linia AG, jak wynika z wcześniejszych wywodów, jest równa linii GL. Linia AD jest zatem równa linii DL, wobec tego i linia NO jest równa linii OF, a linia GO, zgodnie z EE I,29, jest prostopadła do linii NF, ponieważ linia GO jest prostopadła do linii GT, jak wynika z wcześniejszych wywodów i EE III,18, a linie GT i NF są równoległe, co wcześniej wykazano. Ponieważ kąt GOF jest równy kątowi GON, a linia OF równa linii ON, zaś linia GO jest wspólna, zatem, zgodnie z EE I,4, kąt OFG będzie równy kątowi ONG. Podobnie kąt QGM, zgodnie z EE I,29, jest równy kątowi OFG, bo jest zewnętrzny względem kąta OFG, a kąt QGN jest równy kątowi ONG, ponieważ jest z nim na-

przemianległy. Linie TQ i NF są równoległe, jak wynika z wcześniejszych wywodów. Kąt QGM będzie więc równy kątowi QGN. Wobec tego, jak wynika z twierdzenia V,20 tego dzieła, z punktu G na kole PG może się odbić forma punktu M do oka znajdującego się w punkcie N, jednak nie dlatego, że odbicie od tych zwierciadeł stożkowych wypukłych zachodzi wzdłuż koła, ale dzieje się tak, ponieważ punkt G leży na kole, które jest przecięciem kuli i przyjętego w wyobraźni cylindra wewnątrz zwierciadła stożkowego, gdyż płaszczyzna styczna do koła PG jest prostopadła do płaszczyzny odbicia. Z tego powodu musi ona przeciąć stożek zwierciadła po jego szerszej stronie, np. po tej, znajdującej się u podstawy, wzdłuż [linii] równoległej do osi stożka zwierciadła. W ten sposób płaszczyzna odbicia, na której znajdują się środek oka, punkt rzeczy i koło PG, jest prostopadła do tej płaszczyzny stycznej, a punkty N i M odpowiadają sobie na płaszczyźnie tego koła po kątach równych, utworzonych przez średnicę tego koła. Wobec tego, skoro umieścimy środek oka w punkcie N, a punkt rzeczy widzianej w punkcie M, bądź zrobimy to odwrotnie, zawsze forma odbije się do środka oka, o ile bryła zwierciadła stożkowego nie wywołuje przeszkody, np. jeśliby przypadkiem linie AN i BM leżały na samym kole podstawy, a z powodu bryły zwierciadła stożka nie mogło zachodzić odbicie z punktu G do jakiegось oka. A to jest przedmiotem twierdzenia.

33. Gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego jest linia długości zwierciadła, odbicie do oka formy jednego punktu rzeczy widzianej zachodzi tylko od jednego punktu na powierzchni zwierciadła (Alh. V,53).

Układ rysunku w zasadzie niech będzie taki jak w poprzednim twierdzeniu: niech forma punktu B odbije się od punktu G zwierciadła stożkowego wypukłego do oka, znajdującego się w punkcie A, w taki sposób, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła była linia długości zwierciadła EG [rys. 16]¹. Twierdzą, że forma punktu B odbija się do oka A tylko od jednego punktu na powierzchni zwierciadła i jest to punkt G. Jeżeli natomiast będziemy twierdzili, że może się odbić od innego punktu powierzchni zwierciadła, wówczas ten inny punkt albo będzie na linii długości zwierciadła, którą jest linia EG, albo na niej nie będzie.

Jeśli znajdzie się on na linii długości zwierciadła, którą jest linia EG, to niech to będzie punkt X. Poprowadźmy, jak podano w EE XI,12, od tego punktu prostopadłą do płaszczyzny stycznej do zwierciadła w tym punkcie. Tą więc prostopadłą niech będzie linia XZ. Linia XZ, jak wynika z EE XI,6, będzie równoległa do linii ZG, która wcześniej została poprowadzona prostopadle do tej samej płaszczyzny stycznej, ponieważ

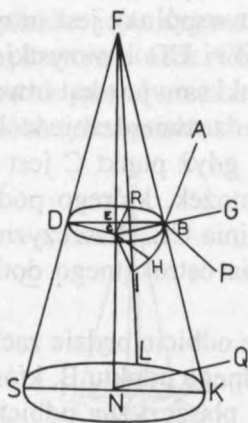
Jeżeli natomiast jest możliwe, aby forma punktu B odbiła się do środka oka A od dowolnego punktu na zwierciadle poza linią długości GE, to niech to będzie punkt U^3 . Zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, poprowadźmy linię długości zwierciadła, którą niech będzie linia EUC, która w punkcie C^4 niech przetnie obwód koła GP. Poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy, przechodzącą przez punkt U. Z EE XI,8 wynika więc, że linia AN przetnie tę płaszczyznę, dlatego że linia EG, do której równoległa jest linia AN, przetnie tę samą płaszczyznę. Zgodnie natomiast z twierdzeniem I,1 tego dzieła, linie AN i EG leżą na tej samej płaszczyźnie, ponieważ są równoległe. Niech więc będzie tak, aby linia AN przecięła tę płaszczyznę w punkcie Y. Podobnie również linia BM, będąc równoległą do linii EG, przetnie tę samą płaszczyznę: punktem przecięcia niech będzie K. Poprowadźmy linie KU, YU, AK. Ponieważ ta płaszczyzna, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, przetnie stożek wzdłuż koła, przechodzącego przez punkt U, poprowadźmy przez punkt U linię do środka tego koła, którą niech będzie linia RU, i przedłużmy ją poza zwierciadło i niech to będzie również linia UR. Z wierzchołka stożka zwierciadła, tzn. z punktu E, poprowadźmy linie EK i EY, które będą musiały przeciąć płaszczyznę koła PG; punktami przecięcia niech będą I oraz S. Poprowadźmy linie IC oraz SC. Wobec tego, jak zostało dowiedzione w poprzednim twierdzeniu dla formy punktu M, która może odbić się do oka znajdującego się w punkcie N z punktu zwierciadła G, gdy stożek nie stoi na przeszkodzie, w ten sam sposób można przeprowadzić dowód również dla punktu K, którego [forma] z punktu U zwierciadła odbija się do oka, znajdującego się w punkcie Y. Kąt RUY będzie więc równy kątowi RUK. Ponieważ linia BK^5 jest równoległa do linii EG, a linią wspólną dla płaszczyzny BGEK i płaszczyzny koła PG jest linia MG, zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła, gdyż linia MG znajduje się na jednej i drugiej płaszczyźnie, jest oczywiste, że linia EK, skoro znajduje się na tej płaszczyźnie BGEK i przecina płaszczyznę koła PG, pada na linię wspólną, którą jest MG, pada zaś w punkt tej płaszczyzny, którym jest punkt S, jak to powyżej pokazano. Ponieważ linia EKS jest jedną linią, linia SMG będzie więc linią prostą. W ten sam sposób, ponieważ płaszczyzna NYEG przetnie płaszczyznę koła PG na linii NG, również linia EY przetnie się z linią NG w punkcie I, jak wcześniej przedstawiono; linia ING jest więc jedną linią prostą. Jest także oczywiste, że płaszczyzna ICE przetnie płaszczyznę koła PG na linii IC, jak również przecina płaszczyznę równoległą do tej płaszczyzny, która przechodzi przez punkt U na linii YU. Zgodnie z EE XI,16, linia IC jest więc równoległa do linii YU. Podobnie płaszczyzna SCE przecina te płaszczyzny równoległe, tzn. płaszczyzny GP i UY, na dwóch liniach SC i KU, a zatem, zgodnie z tym samym twierdzeniem Euklidesa XI,16, linie SC i KU są

równoległe. Tak samo jest, jeśli przyjmiemy płaszczyznę przecinającą zwierciadło na linii długości, którą jest EC (na której to płaszczyźnie znajdują się punkty R i U , bo punkty R , U , C , M^6 znajdują się na tej samej płaszczyźnie, ponieważ punkty R , U , T i jakiś punkt linii SG są na tej samej płaszczyźnie, dlatego ten sam dowód odnosi się do każdego innego punktu danego na linii CM), bo zawsze płaszczyzna przecinająca w ten sposób zwierciadło wzdłuż linii EC , przetnie tamte równoległe płaszczyzny po dwóch liniach MC i RU , a zatem, jak powyżej, zgodnie z $EE\ XI,16$, te dwie linie MC i RU są równoległe. Skutkiem tego, jak wynika z $EE\ XI,10$, kąt SCM jest równy kątowi KUR , a kąt MCI równy kątowi RUY . Ale już wcześniej się okazało, że kąt KUR jest równy kątowi RUY , a zatem kąt SCM jest równy kątowi MCI . Dlatego forma punktu S może się odbić od punktu C na zwierciadle do oka znajdującego się w punkcie I , o ile bryła stożka zwierciadła temu nie przeszkadza. Jednak już wcześniej zostało udowodnione, że forma punktu M może się odbić od punktu G koła PG do oka znajdującego się w punkcie I , ponieważ może się odbić do punktu N , a punkty N oraz I znajdują się na tej samej linii prostej, jak wcześniej wykazaliśmy. Forma punktu M może więc odbić się od punktu G zwierciadła do oka znajdującego się w punkcie I . W ten sam sposób [forma] punktu S , który znajduje się na linii SMG , może odbić się od punktu G do oka znajdującego się w punkcie I . Wobec tego forma punktu S odbije się od dwóch punktów koła PG do oka znajdującego się w punkcie I , a to jest niemożliwe i sprzeczne z twierdzeniem $VI,16$ tego dzieła i wbrew twierdzeniu 27 tej książki. Wynika więc przede wszystkim to, że jest niemożliwe, aby forma punktu B mogła odbić się od jakiegoś innego punktu zwierciadła niż z punktu G do oka znajdującego się w punkcie A . Odbicie formy jednego punktu może więc zachodzić tylko od tego jednego punktu, gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego jest linia długości zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

34. Jeżeli wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego jest przecięcie ostrokątne, to odbicie do oka może zachodzić od jakiegoś punktu powierzchni zwierciadła widocznej dla oka, ale jest to jeden punkt albo są to dwa punkty ($Alh. IV,43$).

Zwierciadło stożkowe wypukłe oznaczmy FKS , a jego wierzchołek przez F , średnicą podstawy niech będzie linia KS , a środkiem podstawy punkt N . Linia FN będzie więc osią zwierciadła. Środkiem oka niech będzie punkt A [rys. 17]¹. Twierdzę, że, gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła jest przecięcie ostrokątne,

które oznaczmy jako BI, to jest możliwe, że od jakiegoś punktu² wspomnianego zwierciadła zachodzi odbicie [formy] jakiegoś widzianego punktu do punktu A, który jest środkiem oka. Niech będzie dany punkt B na powierzchni zwierciadła, co do którego nie ma pewności, czy od niego może zachodzić odbicie formy jakiegoś punktu rzeczy widzianej do środka oka, którym jest punkt A.



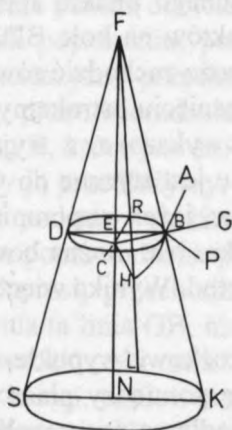
[Rys. 17]

Poprowadźmy zatem, zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, z punktu B linię długości stożka zwierciadła, którą niech będzie linia BF. Poprowadźmy z punktu B prostopadłą do tej linii długości poza zwierciadło i niech to będzie linia BG. W punkcie B, na końcu linii BG, wykreślmy, zgodnie z EE I,23, kąt równy kątowi ABG i niech to będzie kąt GBP, gdy przeprowadzimy linię BP na tej samej płaszczyźnie odbicia. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że [forma] każdego punktu rzeczy widzianej znajdującego się na linii BP będzie się odbijała do oka, będącego w punkcie A. Ale odbicie do oka, będącego w punkcie A, będzie zachodziło od jednego punktu B bądź tylko od dwóch punktów. Z twierdzenia I,96 tego dzieła wynika, że, jeżeli prostopadłą GB przedłużymy do wnętrza stożka, to przetnie się ona z osią FN; punktem przecięcia niech będzie C. Jest więc jasne, że kąt GCF, skoro znajduje się na powierzchni przecięcia, zwrócony w stronę wierzchołka stożka, jest ostry, zgodnie z EE I,32, ponieważ w trójkącie BCF kąt CBF jest prosty. Zgodnie z twierdzeniem I,102 tego dzieła, poprowadźmy zatem z punktu odbicia, którym jest B, koło wokół zwierciadła stożkowego, przecinające oś FN w punkcie E. Średnicą tego koła będzie linia BD, a jego środkiem punkt E. Ponieważ to koło, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, jest równoległe do podstawy zwierciadła, jest oczywiste, że prostopadła GC,

tworząc kąt ostry z osią FN, odchyli się do płaszczyzny tego koła. Dlatego jest jasne, że jeśli poprowadzimy z punktu N, środka podstawy zwierciadła, linię równoległą do linii GC, to odchyli się ona od podstawy stożka; np. niech to będzie linia NQ. Po przeprowadzeniu zatem linii CD z punktu C na osi do obwodu koła, gdy kąt BEC jest równy kątowi DEC (a jeden i drugi kąt jest prosty, dlatego że wszystkie kąty utworzone z półśrednic koła i osi FE są równe, jak również i linie od środka do obwodu są równe, zaś linia EC jest wspólna), jest oczywiste, zgodnie z EE I,4, że bok BC jest równy bokowi CD i wszystkie kąty w powstałych trójkątach są równe, ponieważ taki sam jest kąt utworzony ze wszystkich linii poprowadzonych, zgodnie z twierdzeniem I,65 tego dzieła, od punktu C do obwodu koła BD, gdyż punkt C jest biegunem³ koła BD. W rezultacie powstanie nowy stożek, którego podstawą jest koło BD, wierzchołkiem punkt C, a osią linia CE. Płaszczyzna odbicia przecinająca zwierciadło wzdłuż przecięcia ostrokątnego dotknie więc ten stożek CBD albo go przetnie.

Jeśli go dotknie, twierdzę, że odbicie będzie zachodziło tylko wzdłuż tej jednej płaszczyzny i to od jednego punktu B, który jest punktem odbicia. Jest bowiem oczywiste, że płaszczyzna odbicia dotknie ten stożek wzdłuż linii długości tego stożka, zgodnie z twierdzeniem I,95 tego dzieła, a tą linią będzie linia BC, na której jest punkt B, przez który poprowadzimy linię BC, prostopadłą do powierzchni zwierciadła, i linię odbicia BA. Również przez punkt F, który jest wierzchołkiem stożka zwierciadła, poprowadźmy wiele linii do przecięcia ostrokątnego, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni stożka zwierciadła, którą oznaczmy jako FKS. Wszystkie linie wcześniej padną na powierzchnię koła BD, która jest podstawą wyobrazonego stożka. Te zatem linie niech padną na to przecięcie, z wyjątkiem jednej, która niech padnie w punkcie odbicia B, a jest to linia FB. Odbicie do oka wystąpi tylko od tego jednego punktu B. Bo jeśli założymy, że odbicie do oka A będzie zachodziło od innego punktu wspomnianego przecięcia ostrokątnego, np. od punktu I, to wtedy linia poprowadzona od punktu I do punktu C, który jest wierzchołkiem wyobrazonego stożka (niech to będzie linia IC), będzie prostopadłą, jak poprzednio, do powierzchni zwierciadła, zgodnie z twierdzeniem I,96 tego dzieła. Skoro bowiem ta prostopadła z konieczności będzie na płaszczyźnie odbicia, na której jest przecięcie, to trzeba, aby ona padła w punkt C. Wobec tego będzie ona prostopadłą do linii długości stożka zwierciadła, przechodzącej przez punkt I; niech to będzie linia FIL. Punktem zaś, w którym linia FI przecina koło DB, niech będzie punkt R. Z wcześniejszych wywodów i twierdzenia I,96 tego dzieła wynika, że linia RC poprowadzona przez wierzchołek wyobrazonego stożka do tej linii długości musi być do niej prostopadłą,

podobnie jak linia CB jest prostopadła do linii długości zwierciadła, która jest linią FB, ponieważ, jak wynika z twierdzenia I,89 tego dzieła, kąty utworzone przez wszystkie linie długości z półśrednicami podstawy są równe i kąty utworzone z osią przy wierzchołku także są równe. W trójkącie CIR będą więc dwa kąty proste: a to jest niemożliwe i niezgodne z EE I,32. Odbicie zatem będzie zachodziło tylko od jednego punktu przecięcia ostrokątnego, które jest oznaczone jako BI, tzn. od punktu B, skoro płaszczyzna odbicia jest styczna do stożka CBD. Dlatego jeśli płaszczyzna odbicia przetnie stożek CBD, to z twierdzenia I,104 tego dzieła wynika, że przetnie ona również koło BD, które jest podstawą tego samego stożka, w dwóch tylko punktach [rys. 17a]⁴.

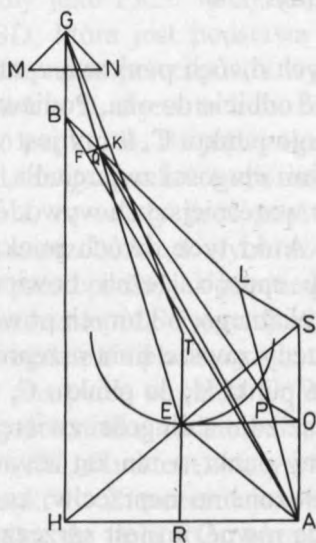


[Rys. 17a]

Twierdzę, że tylko w tych dwóch punktach z całego danego przecięcia ostrokątnego może zająć odbicie do oka. Ponieważ linia poprowadzona od jednego i drugiego tego punktu C, który jest wierzchołkiem stożka CBD, jest prostopadła do linii długości zwierciadła, przechodzącej przez ten punkt, jak to wynika w wcześniejszych wywodów, wobec tego może zachodzić odbicie do oka A od tych dwóch punktów, jak można tego dowiedzieć w przedstawiony sposób. Jeżeli bowiem przyjmiemy inne punkty tego przecięcia ostrokątnego, o których powiemy, że od nich może zachodzić odbicie, to wtedy zawsze linia przeprowadzona przez dany punkt, którym niech będzie punkt H, do punktu C, wierzchołka wyobrażonego stożka, utworzy wraz z linią długości zwierciadła kąt prosty przechodzący przez wspomniany punkt, a ten kąt zewnętrzny będzie równy kątowi wewnętrznemu, położonemu naprzeciw, co jest sprzeczne z EE I,16, albo dwa trójkąty będą równe, co jest sprzeczne z EE I,32, jak poprzednio, bo linia poprowadzona przez punkt C do wspólnego przecięcia

tej samej linii długości i koła BD wraz z linią długości utworzy kąt prosty. Jeżeli natomiast kąt FHC będzie ostry, dlatego że kąt CRH jest prosty, to z EE I,13 wynika, że kąt CHL jest rozwarty. Wszystkie bowiem linie poprowadzone przez punkt C, który jest wierzchołkiem wyobrażonego stożka, oznaczonego CBD, do punktów przecięcia, które znajdują się między wierzchołkiem zwierciadła i obwodem koła BD, utworzą przy wierzchołku stożka, który jest w punkcie F, wraz z liniami długości kąty rozwarte. Wszystkie linie, które są poprowadzone przez punkt C do punktów, znajdujących się między kołem BD i podstawą zwierciadła KS, utworzą z liniami długości kąty ostre zwrócone w kierunku wierzchołka zwierciadła, który jest w punkcie F, a kąty rozwarte od strony podstawy. Odbicie nie zajdzie więc od żadnego punktu spośród tych wszystkich punktów, lecz wyłącznie od punktów na kole BD. Zgodnie z twierdzeniem 25 tej książki, odbicie nie może zachodzić również od innych punktów, o ile nie znajdują się na przecięciu ostrokątnym. To jednak nie jest możliwe, jak wcześniej zostało wykazane, z wyjątkiem tylko jednego punktu, gdy przecięcie ostrokątne jest styczne do wyobrażonego stożka, bądź najwyżej od dwóch punktów, jeżeli wspomniane przecięcie przecina podstawę wyobrażonego stożka. Nie można bowiem wyznaczyć tych punktów przy pomocy innych metod. Wynika więc to, co zakładano.

35. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a środek oka i punkt rzeczy widzianej znajdują się pomiędzy płaszczyzną równoległą do podstawy, styczną do zwierciadła na wierzchołku, oraz samą podstawą, to wtedy jest możliwe znalezienie punktu odbicia (Alh. V, 54).



[Rys. 18]

Niech będzie dane zwierciadło stożkowe, którego wierzchołek niech będzie w punkcie G, a na tym wierzchołku niech się znajduje płaszczyzna, którą oznaczmy jako MNG, równoległa do podstawy stożka. A to się stanie, jeżeli poprowadzimy, jak podano w EE I,11, przez punkt G, wierzchołek stożka, trzy linie prostopadłe do osi zwierciadła, a wyobrażona płaszczyzna będzie się rozciągała między tymi liniami. Niech A będzie punktem rzeczy widzianej, a B środkiem oka [rys. 18]¹. Obydwa te punkty niech się znajdują pod tą płaszczyzną MNG, tzn. między tą płaszczyzną i podstawą zwierciadła. Dla przykładu, niech punkt B będzie bliżej wierzchołka zwierciadła G niż punkt A: a jeżeli zostanie umieszczony odwrotnie, to zawsze będzie i tak ten sam dowód. Twierdząc, że jest możliwe znalezienie punktu odbicia.

Poprowadźmy, jak poprzednio, przez punkt A, który jest punktem rzeczy widzianej, płaszczyznę przecinającą stożek równolegle do podstawy. Poprowadźmy przez wierzchołek zwierciadła, który jest w punkcie G, linię do punktu B, który jest środkiem oka, i niech to będzie linia GB. Ta linia GB, gdy ją przedłużymy, padnie na płaszczyznę, poprowadzoną równolegle do podstawy stożka przez punkt A rzeczy widzianej, ponieważ została ona poprowadzona pomiędzy płaszczyznami równoległymi od wierzchołka osi, przechodzącej przez te dwie płaszczyzny. Punktem, na który pada ta linia GB, niech będzie punkt H. A zatem możemy tutaj przeprowadzić taki sam dowód, jakim posłużyliśmy się w twierdzeniu 32 tej książki, ponieważ forma punktu A odbija się do oka znajdującego się w punkcie H od jakiegoś punktu koła, które tworzy płaszczyzna przecinająca stożek, poprowadzona przez punkty A i H. Środkiem tego koła jest punkt na osi zwierciadła, który oznaczmy jako T; znalezionym punktem odbicia na tym kole niech będzie punkt E. Poprowadźmy linię AB pomiędzy punktem rzeczy widzianej A i środkiem oka B oraz linię długości zwierciadła, którą niech będzie linia GE. Oś stożka zwierciadła niech będzie [linią] GT. Poprowadźmy przez punkt E do środka tego koła linię, którą niech będzie linia ET. Zgodnie z twierdzeniem I,100 i I,89 tego dzieła bądź twierdzeniem 21 tej książki, linia ta padnie prostopadłe na oś GT. Jest tak dlatego, ponieważ oś GT, skoro jest prostopadła do podstawy stożka zwierciadła, jest także prostopadła do płaszczyzny koła, równoległego do tej podstawy, jak to wynika z twierdzenia I,23 tego dzieła. W rezultacie oś GT, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny, jest prostopadła do półśrednicy ET. Linia ET, jak wynika z EE III,18, będzie prostopadła do linii stycznej do tego koła w punkcie E. Ta linia TE, przedłużona poza koło, po przeprowadzeniu linii HE i AE, podzieli, zgodnie z twierdzeniem V,26 tego dzieła, kąt HEA utworzony przez te linie, na dwie równe części. A zatem, jak wynika z twierdzenia I,29 tego dzieła, ta sama linia TE po prze-

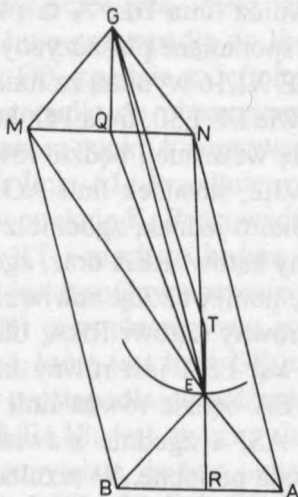
dłużeniu przetnie poprowadzoną linię HA, ponieważ ta linia znajduje się na tej samej płaszczyźnie odbicia, jak to wynika z twierdzenia 24 tej księgi. Niech punkt R będzie punktem przecięcia linii TE i HA. Ponieważ linie GE i ET wyznaczają płaszczyznę przecinającą linię AB, to F niech będzie punktem przecięcia. Przez ten punkt F poprowadźmy, jak podano w EE I,12, linię prostopadłą do linii długości GE i niech to będzie linia FQ. Linia FQ, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny, będzie prostopadła do płaszczyzny stycznej do stożka wzdłuż linii GE. Następnie przez punkt A poprowadźmy linię równoległą do linii FQ i niech to będzie linia AL. Przedłużmy linię FQ tak daleko, aż przetnie się z osią GT w punkcie K. Poprowadźmy również z punktu A linię równoległą do linii RT i niech to będzie linia AS. Z punktu E poprowadźmy linię, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia (jest to płaszczyzna AEH) oraz płaszczyzny stycznej do stożka zwierciadła wzdłuż linii długości, którą jest linia GE; niech to będzie linia EO. A ta linia EO, skoro jest prostopadła do półśrednicy koła, którą jest linia ET, jak to wynika z EE III,18, jest styczna do koła, którego środkiem jest punkt T. Jest więc oczywiste, że ona sama jest prostopadła do linii ER. Wobec tego, zgodnie z EE I,29, linia EO będzie prostopadła do linii AS, ponieważ, jak wynika z wcześniejszych rozważań, linia AS jest równoległa do linii TR. Poprowadźmy również linię BQ, która po jej przedłużeniu będzie się musiała przeciąć z linią AL, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, ponieważ przecina się z linią do niej równoległą, tzn. linią FQ; niech L będzie punktem przecięcia. Poprowadźmy przez punkt Q linię, która jest wspólnym przecięciem płaszczyzny stycznej do [powierzchni] zwierciadła wzdłuż linii długości GE oraz płaszczyzny ABL, i niech to będzie linia QP. A ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie linię AL, ponieważ przecina linię do niej równoległą, którą jest linia FK; niech P będzie punktem przecięcia. Przedłużmy linię HE tak daleko, aż przetnie się z linią AS. Przetnie się zaś na podstawie twierdzenia I,2 tego dzieła. Niech S będzie punktem przecięcia. Poprowadźmy dwie linie LS i PO. Ponieważ linia RT jest prostopadła do osi GT, a linia FK wraz z osią GT tworzy kąt ostry (bo kąt FKG, zgodnie z EE I,32, jest ostry, dlatego że kąt FQG, jak wynika z wcześniejszych rozważań, jest prosty), wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie RT i FK przetną się w jakimś punkcie poza osią GT. Ale linie do nich równoległe, a są to linie AL i AS, przecinają się w punkcie A i, zgodnie z EE XI,1, znajdują się na innej płaszczyźnie niż linie RT i FK, które leżą na płaszczyźnie GEK. Jest więc oczywiste, że, zgodnie z EE XI,15, płaszczyzna ALS jest równoległa do płaszczyzny GEK. Również linie QE i PO znajdują się na płaszczyźnie, stycznej do powierzchni zwierciadła na linii długości GE i przecinającej te dwie płasz-

czyzny równoległe do dwóch linii, którymi są linie QE i PO. Wobec tego, zgodnie z EE XI,16, linia QE jest równoległa do linii PO. Ponieważ linia HE po jej przedłużeniu przecina się z linią AS w punkcie S, linia ES znajdzie się więc, zgodnie z EE XI,1, na płaszczyźnie HEG. Na tej samej płaszczyźnie znajduje się również linia BL. A ta płaszczyzna przecina wzdłuż dwóch linii EQ i LS wspomniane płaszczyzny równoległe, a są to płaszczyzny ALG i GEK. Z EE XI,16 wynika, że linia EQ jest więc równoległa do linii LS. Na podstawie EE I,30, linia PO, która jest równoległa do linii QE², jak to okazało się wcześniej, będzie równoległa do tej linii LS. A zatem, zgodnie z EE VI,2, stosunek linii AO do linii OS będzie taki jak linii AP do linii PL. Skoro jednak, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, kąt HER jest równy kątowi REA oraz, zgodnie z EE I,29, kąt HER jest równy kątowi ESA, ponieważ kąt zewnętrzny jest równy wewnętrznemu, a kąt EAS jest równy kątowi REA, dlatego że są naprzemianległe, jest oczywiste, że kąt ESA jest równy kątowi EAS. Wobec tego, zgodnie z EE I,6, linia EA będzie równa linii ES, ponieważ linia EO jest prostopadła do linii AS, a zgodnie z twierdzeniem I,31 tego dzieła, trójkąty AEO i SEO będą podobne. W rezultacie, zgodnie z definicją 1 księgi VI Elementów Euklidesa, ich boki odpowiadające kątom równym są proporcjonalne. Jednak z wcześniejszych rozważań wynika, że bok AE jest równy bokowi ES, a zatem i bok AO będzie równy bokowi OS, a linia AP jest równa linii PL, zaś linia PQ, zgodnie z EE I,29, jest prostopadła do linii AL, ponieważ jest ona prostopadła do linii FK, równoległej do linii AL. W trójkątach QPA i QPL kąty [o wierzchołkach] w punkcie P są więc równe, ponieważ są proste, a bok LP jest równy bokowi PA, zaś bok PQ jest wspólny dla obydwu trójkątów QPL i QPA. Wobec tego, zgodnie z EE I,4, linia AQ będzie równa linii QL, a kąt QLA jest równy kątowi QAL. Ale kąt QLA jest równy kątowi BQF, zgodnie z EE I,29, ponieważ jest zewnętrzny do tamtego, a kąt QAL jest równy kątowi AQF, ponieważ jest z nim naprzemianległy. Wobec tego kąt BQF będzie równy kątowi AQF. Zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, forma punktu A odbija się do oka B z punktu Q na zwierciadle. A to jest przedmiotem twierdzenia.

36. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a środek oka i punkt rzeczy widzianej znajdują się na płaszczyźnie równoległej do podstawy, stycznej do zwierciadła na wierzchołku, to wtedy możliwe jest znalezienie punktu odbicia (Alh. V,55).

Układ [rysunku] niech będzie taki jak w poprzednim twierdzeniu. Wierzchołkiem zwierciadła stożkowego niech będzie punkt G, w którym do zwierciadła jest styczna płaszczyzna, równoległa do podstawy stożka,

którą oznaczmy jako MNG. Środek oka i punkt rzeczy widzianej niech się znajdują na płaszczyźnie MNG tak, żeby środek oka był w punkcie M, a rzecz widziana w punkcie N [rys. 19]¹. Twierdzę, że jest możliwe znalezienie punktu odbicia.



[Rys. 19]

Poprowadźmy bowiem linie MG, NG i MN. Podzielmy za pomocą [linii] QG kąt MGN na równe części. Jest więc oczywiste na podstawie twierdzenia V,20 tego dzieła, że forma punktu N odbija się do oka M od punktu G na zwierciadle. Jest także oczywiste, że linia MG i oś stożka zwierciadła, którą jest linia GT, znajdują się na płaszczyźnie przecinającej stożek wzdłuż linii długości, którą niech będzie linia GE. Z punktu Q poprowadźmy, jak podano w EE I,12, prostą do tej linii długości, którą jest linia GE, a tę prostą oznaczmy jako QE. Przez punkt E poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy zwierciadła. Płaszczyzna ta, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, przetnie stożek wzdłuż koła. Linia zaś wspólną dla tej płaszczyzny QEG i [płaszczyzny] tego koła niech będzie linia ET. Jest więc oczywiste, że ta linia ET padnie na oś zwierciadła w środku koła, który jest punktem T. Następnie przez punkt M, środek oka, poprowadźmy, jak podano w EE I,31, linię równoległą do linii długości zwierciadła. A ta linia poprowadzona do płaszczyzny, [na której leży] to koło niech padnie w punkt B. Podobnie z punktu N, który jest punktem rzeczy widzianej, poprowadźmy linię równoległą do linii GE, która, gdy poprowadzimy ją do wspomnianej płaszczyzny, niech padnie w punkt A. Poprowadźmy linię BA na płaszczyźnie, przecinającej zwierciadło wzdłuż wspomnianego koła. Poprowadźmy linię TE poza zwierciadło tak, aby przecięła ona linię BA, zgod-

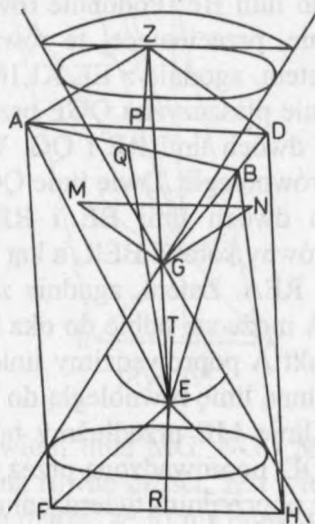
nie z twierdzeniem I,29 tego dzieła; ponieważ obie te linie leżą na tej samej płaszczyźnie co koło; niech więc linia TE przetnie linię BA w punkcie R. Skoro linia MB jest równoległa do linii EG, to z twierdzenia I,11 tego dzieła wynika, że jedna i druga linia leży na tej samej płaszczyźnie, która przecina płaszczyznę MNG i płaszczyznę BEA wzdłuż dwóch linii MG i BE. Płaszczyzny MGN i BEA są ponadto równoległe, zgodnie z twierdzeniem I,24 tego dzieła, ponieważ obydwie są równoległe do podstawy zwierciadła. Wobec tego, zgodnie z EE XI,16, linia MG jest równoległa do linii BE. Podobnie również linie AN i GE znajdują się na płaszczyźnie, przecinającej te równoległe płaszczyzny wzdłuż linii NG i EA. A zatem, zgodnie z EE XI,16, linia NG jest równoległa do linii AE. Podobnie płaszczyzna QGE przecina te same płaszczyzny równoległe wzdłuż dwóch linii RE i QG. Wobec tego, jak poprzednio, linie RE i QG są równoległe. Dwie linie QG i MG są więc [odpowiednio] równoległe do dwóch linii BE i RE. Dlatego, zgodnie z EE XI,10, kąt MGQ jest równy kątowi BER, a kąt QGN z tego samego powodu jest równy kątowi REA. Zatem, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, forma punktu A może się odbić do oka B z punktu E zwierciadła. Jeśli więc przez punkt A poprowadzimy linię równoległą do poprowadzonej linii QE oraz inną linię równoległą do linii RE, i poprowadzimy linie ME i NE, a linię ME przedłużmy tak, aby przecięła się z linią równoległą do linii QE, poprowadzoną przez punkt A, i poprowadzimy linie wspólne, jak w poprzednim twierdzeniu, to zostanie powtórzony dowód taki sam, jak w poprzednim twierdzeniu². Okaże się, że forma punktu N może się odbić do oka M z punktu E zwierciadła. A zatem punkt E będzie punktem odbicia. A to jest przedmiotem twierdzenia.

37. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a środek oka i punkt rzeczy widzianej znajdują się powyżej płaszczyzny równoległej do podstawy, stycznej do zwierciadła na wierzchołku, to możliwe jest znalezienie punktu odbicia (Alh. V,56).

Niech układ [rysunku] będzie taki sam jak poprzednio. Niech B będzie środkiem oka. Niech A będzie punktem rzeczy widzianej [leżącym] ponad płaszczyzną MGN, styczną do zwierciadła w punkcie G, wierzchołku stożka [rys. 20]¹. Twierdzą, że jest możliwe znalezienie punktu odbicia.

Utwórzmy [nowy] stożek położony naprzeciw tamtego stożka². A jest to możliwe na podstawie twierdzenia I,91 tego dzieła, jeżeli wszystkie wyobrażone linie długości stożka zwierciadła przedłużymy ponad ich wspólne przecięcie, które znajduje się na wierzchołku G. Podstawa tego [nowego] stożka będzie równoległa do podstawy poprzedniego stożka. Poprowadźmy również przez punkt A (który jest punktem rzeczy widzia-

nej) płaszczyznę przecinającą tamten nowy stożek równolegle do podstawy jednego i drugiego stożka. Ponieważ te podstawy są względem siebie równoległe, to z twierdzenia I,23 i I,24 tego dzieła wynika, że ta płaszczyzna jest równoległa do obydwu podstaw stożków, natomiast z twierdzenia I,100 tego dzieła wynika, że ta płaszczyzna przetnie ten [nowy] stożek wzdłuż koła, które oznaczmy jako YZ. Środek zaś oka (którym jest punkt B) znajdzie się na tej płaszczyźnie przecinającej [nowy] stożek albo na niej go nie będzie.



[Rys. 20]

Jeśli znajdzie się na tej płaszczyźnie, to poprowadźmy linie przez ten punkt B i zastosujmy dowód z twierdzenia 35 tej księgi, na ile ma on związek z odbiciem formy punktu A do środka oka B od jakiegoś punktu drugiego stożka; i jest to punkt Z. Po otrzymaniu tego punktu zostanie przeprowadzony dowód, który przedstawimy poniżej.

Jeśli natomiast punktu B (który jest środkiem oka) nie będzie na tej płaszczyźnie, to poprowadźmy linię GB przez punkt G, wierzchołek tego zwierciadła, do środka oka (którym jest punkt B), którą przedłużmy tak, aby się przecięła z płaszczyzną, [na której leży] koło YZ; przecięcie to niech nastąpi w punkcie D. Jest oczywiste, że forma punktu A odbija się do oka, znajdującego się w punkcie D, od jakiegoś punktu koła YZ, od jego wewnętrznego łuku³, jak to wynikało z twierdzenia 32 tej książki. Niech to więc będzie punkt Z. Poprowadźmy linie AZ, DZ, AD. Linia PZ niech podzieli kąt AZD na równe części. Punkt P będzie leżał na linii AD. Poprowadźmy linię AB. Od punktu Z, zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, poprowadźmy linię ZG, która jest linią długości drugiego stożka. Z twierdzenia I,91 tego dzieła wynika również, że ta sama linia

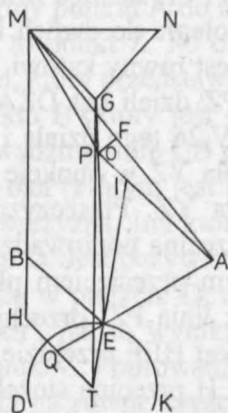
przedłużona poza wierzchołek [nowego] stożka zwierciadła będzie linią długości pierwszego stożka zwierciadła; i niech to będzie linia ZGE. Jest więc oczywiste, że płaszczyzna PZE przetnie linię AB; niech więc ją przetnie w punkcie Q. Poprowadźmy, jak podano w EE I,12, przez punkt Q linię prostopadłą do linii GE i niech ona padnie w punkt E. Linia QE będzie prostopadłą do płaszczyzny stycznej do stożka wzdłuż linii GE, ponieważ, co jest oczywiste, linia QE jest prostopadłą do zakrzywionej powierzchni stożka. Przez punkt E, zgodnie z twierdzeniem I,102 tego dzieła, poprowadźmy również płaszczyznę równoległą do podstawy i niech to będzie płaszczyzna FEH. Poprowadźmy przez punkt B, środek oka, linię równoległą do linii długości zwierciadła ZE, i niech to będzie linia BH, przecinająca się z tą płaszczyzną FEH w punkcie H. Poprowadźmy przez punkt A rzeczy widzianej linię równoległą do tej samej linii ZE, którą jest linia AF, przecinająca płaszczyznę FEH w punkcie, którym jest punkt F. Z twierdzenia I,1 tego dzieła wynika ponadto, że, skoro linia BH jest równoległa do linii ZE, to te linie znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Również punkty B i D są na jednej linii, ponieważ, zgodnie z EE XI,1, linie DZ i HE znajdują się na tej samej płaszczyźnie, która przecina te równoległe płaszczyzny, tzn. płaszczyzny YZ i FEH, wzdłuż dwóch linii DZ i HE. A zatem, zgodnie z EE XI,16, te dwie linie DZ i HE są równoległe. I podobnie, ponieważ płaszczyzna poprowadzona przez punkt A przecina drugi stożek równoległe do obydwu podstaw wspomnianych stożków, tzn. stożka zwierciadła oraz wyobrażonego stożka, wzdłuż koła YZ, a płaszczyzna poprowadzona przez linię FE, którą jest płaszczyzna FEH, przecina stożek zwierciadła wzdłuż koła równoległego do podstawy zwierciadła, jest oczywiste, że płaszczyzny, na których znajdują się linie AZ i FE, są równoległe, zgodnie z twierdzeniem I,24 tego dzieła. Linie AZ i FE są więc równoległe. Wynika więc, że dwie linie DZ i AZ są równoległe do dwóch linii HE i FE, a zatem, zgodnie z EE XI,10, kąt DZA jest równy kątowi HEF. Wykreślmy również linię HF. Ponieważ linia PZ dzieli kąt DZA na równe części, ona sama, zgodnie z twierdzeniem V,26 tego dzieła i EE III,19, będzie prostopadłą do linii stycznej do koła YZ w punkcie Z, a przedłużona linia PZ przejdzie przez środek koła YZ. Płaszczyzna PZE przecina więc zwierciadło i oś, wobec tego przecina poprowadzone koło przechodzące przez punkt E. Zatem wspólnym przecięciem płaszczyzny PZE i tego koła niech będzie linia RE. Jak linia PZ⁴ przechodzi przez środek koła YZ, tak samo linia RE dzieląc kąt HEF przejdzie przez środek drugiego koła, na którym płaszczyzna FEH przecina stożek zwierciadła równoległe do podstawy. Ponieważ płaszczyzna, na której są dwie linie PZ i ER, przecina te dwie płaszczyzny równoległe, na których leżą dwie linie PZ i ER, zatem, zgodnie z EE XI,16, linie PZ i RE są równoległe. Dwie linie

AZ i ZP są więc równoległe do dwóch linii FE i ER, a zatem, zgodnie z EE XI,10, kąt AZP jest równy kątowi FER. Podobnie kąt DZP jest równy kątowi REH⁵, ponieważ, jak cały kąt DZA jest równy całemu kątowi HEF, tak połowa jest równa połowie. Stąd kąt FER jest równy kątowi HER. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika więc, że forma punktu F odbija się do oka, znajdującego się w punkcie H, od punktu E zwierciadła. Wobec tego, jeśli z punktu F poprowadzimy linię równoległą do linii QE i inną linię równoległą do linii RE oraz inne wspólne linie, jak w twierdzeniu 35 tej książki, to, powtarzając dowód z tamtego twierdzenia, okaże się, że forma punktu A odbija się do oka B z punktu E zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Ponieważ, jeśli przez punkt Q nie będzie można przeprowadzić prostopadłej do linii GE, nie zajdzie żadne odbicie formy punktu A do oka B, umieszczonego w takim położeniu, ale w innych przypadkach zawsze zajdzie odbicie, jak to wcześniej wykazaliśmy. To wynika z twierdzenia 14 tej księgi i twierdzenia IV,90 tego dzieła.

38. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a punkt rzeczy widzianej znajduje się pod płaszczyzną styczną do zwierciadła na wierzchołku, równoległą do podstawy, zaś środek oka znajduje się na tej właśnie płaszczyźnie, to jest możliwe znalezienie punktu odbicia (Alh. V,57).

Niech pozostanie wcześniejszy układ [rysunku] z poprzednich twierdzeń. Niech A będzie punktem rzeczy widzianej, który znajduje się pod płaszczyzną MNG, styczną do stożka zwierciadła na wierzchołku G , równoległą do podstawy. Niech środek oka znajduje się na tej płaszczyźnie [rys. 21]¹. Twierdzę, że jest tutaj możliwe znalezienie punktu odbicia.



[Rys. 21]

Niech środek oka znajdzie się w punkcie M na płaszczyźnie MGN, która jest płaszczyzną styczną do zwierciadła w punkcie G, wierzchołku [stożka], i jest równoległa do podstawy zwierciadła. Poprowadźmy przez punkt A rzeczy widzianej płaszczyznę równoległą do podstawy stożka, która, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, przetnie stożek wzdłuż koła, którym niech będzie koło DEK; jego środkiem niech będzie punkt T. Poprowadźmy oś zwierciadła, którą niech będzie linia GT, a przez punkt M, środek oka, poprowadźmy do punktu rzeczy widzianej A linię MA i linię prostopadłą do wspomnianej płaszczyzny koła, którą niech będzie linia MH. Z punktu H poprowadźmy do środka koła linię HT, a z punktu rzeczy widzianej (który jest A) poprowadźmy do wnętrza koła, do linii HT linię AEQ, przecinającą obwód koła w punkcie E, i poprowadźmy ją w taki sposób, aby część EQ linii poprowadzonej wewnątrz koła, była równa linii QT, tzn. części średnicy, leżącej między punktem przecięcia i środkiem [koła]; to można zrobić w sposób, jaki podano w twierdzeniu I,136 tego dzieła. Poprowadźmy linię TEI. Z punktu H poprowadźmy na tej samej płaszczyźnie, przecinającej zwierciadło wzdłuż koła DEK, linię równoległą do linii TE i jej równą, którą niech będzie HB. Poprowadźmy linie MB, BE, GE. Linia GE będzie linią długości zwierciadła. Jest oczywiste, że powierzchnia GTE, przecinająca zwierciadło wzdłuż osi, przecina także linię AM. Niech F będzie punktem przecięcia. Poprowadźmy przez punkt F prostopadłą do linii długości GE zwierciadła, padającą w punkt O. Przedłużmy ją do osi GT. Niech linia FOP przetnie oś w punkcie P. Poprowadźmy linie MO i AO.

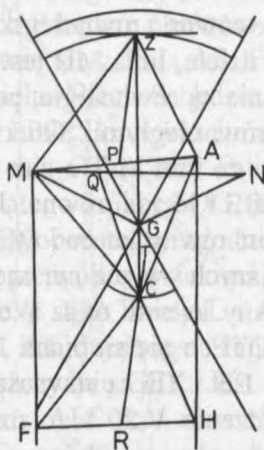
Twierdzę, że punkt O, który jest punktem powierzchni zwierciadła, chociaż znajduje się na jego linii długości GE, jest punktem odbicia formy punktu A do punktu M, środka oka. Z poprzednich rozważań wynika bowiem, że linia HB jest równa i równoległa do linii TE. A zatem, zgodnie z EE I,33, linia HT będzie równa i równoległa do linii BE. Ale, zgodnie z twierdzeniem I,25 tego dzieła, linia MH jest równa i równoległa do osi GT, dzięki temu, że te linie są równoległe, ponieważ poprowadzone są pomiędzy płaszczyznami równoległymi. Skutkiem tego, zgodnie z EE I,33, linia HT jest równoległa do linii MG, a, jak wynika z EE I,30, linia MG jest równoległa do linii BE i jest jej równa. Jest także oczywiste, na mocy EE I,5, że kąt QTE jest równy kątowi QET, dlatego że linie EQ i QT, jak wynika z wcześniejszych wywodów, są równe. Ale, jak wynika z EE I,15, kąt QET jest równy kątowi AEI. Wobec tego kąt QTE jest równy kątowi AEI, ale kąt QTE, zgodnie z EE I,29, jest równy kątowi IEB z tego powodu, że linie EB i TH są równoległe. Kąt IEB jest więc równy kątowi IEA. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika zatem, że forma punktu A odbija się do oka, znajdującego się w punkcie B, od punktu E zwierciadła. Skoro linia BM jest równoległa do linii GE, to,

jeśli z punktu A poprowadzimy linię równoległą do linii FOP, ta linia będzie równoległa również do linii IT. Powtórzmy rysunek z twierdzenia 35 i tamto dowodzenie. Okaże się, że forma punktu A odbija się do środka oka, znajdującego się w punkcie M, z punktu O zwierciadła. A to jest przedmiotem twierdzenia.

W jakikolwiek sposób tego dowiodłem w ostatnim twierdzeniu, nie ma żadnego znaczenia, [bo jest obojętne], czy punkt rzeczy widzianej czy też środek oka znajduje się na płaszczyźnie MGN, ponieważ jest ten sam sposób i powód odbicia w jednym i drugim przypadku.

39. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a punkt rzeczy widzianej jest ponad płaszczyznę styczną do zwierciadła na wierzchołku, równoległą do podstawy, zaś środek oka znajduje się na tej właśnie płaszczyźnie, to jest możliwe znalezienie punktu odbicia (Alh. V, 58).

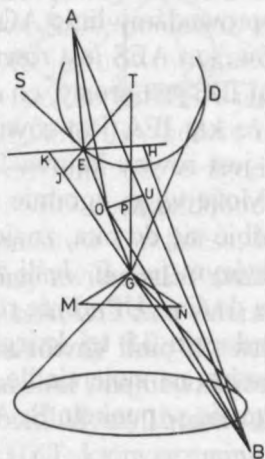
Pozostawmy układ poprzedniego rysunku: niech środkiem oka będzie punkt M na płaszczyźnie MGN [rys. 21a]¹. Niech A będzie punktem rzeczy widzianej ponad tą płaszczyznę. Niech będzie inny stożek położony naprzeciw tego stożka². Przez punkt A niech przechodzi płaszczyzna równoległa do podstawy tego stożka. Na kole, które powstało z przecięcia stożka tą płaszczyzną, znajdziemy punkt odbicia pośród punktów wewnętrznych, zgodnie z poprzednim twierdzeniem. Z tego punktu poprowadźmy linię do punktu G. Poprowadźmy ją w taki sposób na tej płaszczyźnie, aby była ona linią długości stożka tego zwierciadła. Punkt odbicia znajdziemy zgodnie z tym, co wyłożyliśmy w twierdzeniu 37 tej książki. Sposób dowodzenia jest dokładnie taki sam co w twierdzeniu 37. A to jest przedmiotem twierdzenia.



[Rys. 21a]

40. Gdy dane jest zwierciadło stożkowe wypukłe, a punkt rzeczy widzianej jest pod płaszczyzną, styczną do stożka na wierzchołku, równoległą do podstawy, a środek oka jest ponad tą płaszczyzną albo odwrotnie, to jest możliwe znalezienie punktu odbicia (Alh. V,59).

Niech pozostanie poprzedni układ: punkt A rzeczy widzianej niech będzie pod płaszczyzną MNG, a punkt B, środek oka, niech będzie ponad tą płaszczyzną, styczną do zwierciadła na wierzchołku [tj. w punkcie] G, bądź odwrotnie, tzn. niech punkt A rzeczy widzianej znajdzie się ponad płaszczyzną MNG, a środek oka B niech będzie pod płaszczyzną MNG [rys. 22]¹. Twierdzę, że w tych przypadkach można znaleźć punkt odbicia.



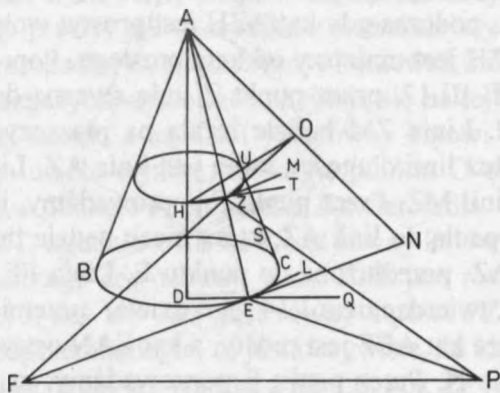
[Rys. 22]

Dla przykładu, niech punkt A będzie pod płaszczyzną MNG, a punkt B ponad nią. Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę równoległą do podstawy zwierciadła, przecinającą, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, stożek zwierciadła wzdłuż koła, którym jest DE. Jego środkiem niech będzie punkt T. Poprowadźmy oś zwierciadła, którą jest GT. Poprowadźmy linię BG z punktu wyższego, w którym jest środek oka, do wierzchołka stożka. Ta linia przedłużona będzie musiała się przeciąć z płaszczyzną AED, ponieważ przecina się z osią do niej prostopadłą. Niech K będzie punktem przecięcia. Na kole DE znajdziemy, zgodnie z twierdzeniem I,135 tego dzieła, punkt, którym niech będzie E, w taki sposób, aby linia styczna do koła, poprowadzona przez punkt E, a jest to linia ES, dzieliła na równe części kąt, który tworzą linie KE i AE. Wykreślmy linie długości, którymi niech będą linie GE i GD. Przez punkt B poprowadźmy linię równoległą do linii GE, która, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, będzie musiała się przeciąć z linią KE, przecinającą

się z linią GE, równoległą do linii poprowadzonej. Niech H będzie punktem przecięcia. Z EE XI,1 wynika również, że punkt B jest na płaszczyźnie GEK, ponieważ znajduje się na linii KGB, która została poprowadzona na tej płaszczyźnie, i na tej samej płaszczyźnie jest linia BH, zgodnie z twierdzeniem I,1 tego dzieła, ponieważ ta linia BH jest równoległa do linii GE. Poprowadźmy linię TEI od środka koła T przez punkt przecięcia E. Jest oczywiste, że płaszczyzna GTE, przecinająca zwierciadło wzdłuż osi GT, przetnie także linię BA. Niech więc ją przetnie w punkcie U. Z punktu U poprowadźmy prostopadłą do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii długości, którą jest linia GE. Ta płaszczyzna bowiem będzie styczna do koła DE w punkcie E, a tą linią niech będzie linia OPU, przecinająca powierzchnię zwierciadła w punkcie O i oś GT w punkcie P. Poprowadźmy linie AO i BO. Ponieważ, jak wynika z poprzednich wywodów, kąt AES jest równy kątowi SEK, i ponieważ, zgodnie z EE III,18, kąt IES jest prosty, co oznacza, że i kąt SET jest prosty, to jest oczywiste, że kąt IEA jest równy kątowi TEK. Ale, zgodnie z EE I,15, i kąt TEK jest równy kątowi IEH. Wobec tego kąt AEI jest równy kątowi IEH². Może więc, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, forma punktu A odbić się do oka, znajdującego się w punkcie H, z punktu zwierciadła, którym jest E. Jeśli zatem przez punkt A poprowadzimy linię równoległą do linii UP i linię równoległą do linii IT, to powtórzymy dowód z twierdzenia 35 tej księgi. Jest oczywiste, że forma punktu A odbija się z punktu na zwierciadle, którym jest punkt O na linii GE, do oka znajdującego się w punkcie B. A to jest przedmiotem twierdzenia.

Ponieważ zawsze można dowodzić w ten sam sposób, obojętnie czy to będzie punkt A, czy B z dowolnej strony płaszczyzny MNG, wynika to, co zakładano. Należy to sobie wyobrazić w ten sposób, że na bryle punkt B pada na linię EG, czego nie możemy w taki sposób narysować na płaskim rysunku³. Z poprzednich sześciu twierdzeń wynika także, że nie jest możliwe, aby [forma] punktu rzeczy widzianej zachowywała się w inny sposób w miejscu odbicia od zwierciadeł stożkowych wypukłych do środka oka, jak tylko według sposobów powyżej przedstawionych, ponieważ obydwa będą albo pod powierzchnią MNG, albo będą ponad nią, albo na niej, albo jeden będzie na niej, a drugi pod nią bądź ponad nią albo też jeden będzie pod nią, a drugi ponad nią. We wszystkich tych przypadkach został znaleziony punkt odbicia. Uogólniając zatem, na całej powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego, niezależnie od tego, w jaki sposób układa się punkt rzeczy widzianej względem środka oka, możliwe jest znalezienie punktu odbicia. A tego w zasadzie poszukiwano.

41. Gdy zwierciadło stożkowe wypukłe jest prostopadłe do swojej podstawy, to jest możliwe, że linia prosta rzeczy widzianej¹ i środek oka tak się ustawia, że od jednej linii długości zwierciadła zachodzi odbicie form wszystkich punktów tej linii do oka (Alh. VI,31).



[Rys. 23]

Niech będzie [dane] zwierciadło stożkowe wypukłe, którego wierzchołkiem niech będzie A, zaś osią AH, a linią długości AZ [rys. 23]². Przez punkt Z poprowadźmy linię prostopadłą do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii długości, która, zgodnie z twierdzeniem I,96 tego dzieła, gdy ją przedłużymy, będzie się musiała przeciąć z osią AH. Niech to będzie linia HZT, która przecina oś AH w punkcie H. Jej punkt T niech się znajduje poza powierzchnią zwierciadła. Kąt AZH będzie prosty, a zatem, jak wynika z EE I,32, kąt AHZ jest ostry. Poprowadźmy również przez punkt A, wierzchołek zwierciadła, linię poza stożkiem, ponad płaszczyznę styczną do stożka wzdłuż linii AZ, tworzącą kąt ostry z osią zwierciadła, którą jest AH, oraz z linią długości AZ; i niech to będzie linia AN. Linie AH, AZ, AN niech nie leżą na tej samej płaszczyźnie, ale na różnych płaszczyznach. Na płaszczyźnie HAN przez punkt H, poprowadźmy linię, która tworzy z osią kąt równy kątowi AHZ. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, przetnie się z linią AN. Ponieważ kąty HAN i AHZ są ostre, jak wynika z wcześniejszych wywodów, wobec tego linie te niech się przetną w punkcie O. Niech będzie linia HO. Wykreślmy, jak podano w twierdzeniu I,102 tego dzieła, koło, równoległe do podstawy i przechodzące przez punkt Z. Jest oczywiste, że linia HO przejdzie przez płaszczyznę tego koła, podobnie jak linia HZ przechodzi również przez płaszczyznę tego samego koła. Niech punkt H będzie biegunem tego koła z tego powodu, że półśrednica tego koła wraz z osią AH tworzy kąt prosty, a kąty AHZ i AHO są ostre, jak to wynika

w wcześniejszych wywodów. Niech linia HZT przetnie płaszczyznę tego koła w punkcie Z, a linia HO w punkcie U. Poprowadźmy linię długości zwierciadła, którą niech będzie linia AUS. Poprowadźmy również linię OZ, którą przedłużymy aż do punktu F. Ponieważ linia OZ jest ponad płaszczyzną styczną do stożka wzdłuż linii AZ, gdyż linia HZ jest prostopadła do tej płaszczyzny, jest oczywiste, że kąt OZH będzie większy od kąta prostego, podczas gdy kąt AZH jest prosty; wobec tego, zgodnie z EE I,13, kąt FZH jest mniejszy od kąta prostego. Poprowadźmy zatem, jak podano w EE III,17, przez punkt Z linię styczną do koła i niech to będzie linia ZM. Linia ZM będzie leżała na płaszczyźnie stycznej do zwierciadła wzdłuż linii długości, którą jest linia AZ. Linia HZ jest więc prostopadła do linii MZ. Przez punkt F poprowadźmy, jak podano w EE I,12, linię prostopadłą do linii AZ, którą niech będzie linia FE, przecinająca się z linią AZ, przedłużoną do punktu E. Linia FE, gdy ją przedłużymy, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, przetnie się z linią AN. Z tego powodu, że kąt AEF jest prosty, a kąt EAN ostry, to linie te przetną się w punkcie N. Przez punkt E poprowadźmy, zgodnie z EE I,31, linię równoległą do linii TH; i niech to będzie linia EQ. Również przez ten sam punkt E poprowadźmy linię równoległą do linii MZ; niech to będzie linia EL. Jest oczywiste, że zgodnie z twierdzeniem I,22 tego dzieła, linia MZ jest prostopadła do linii AE, ponieważ jest ona prostopadła do linii TH jak też do średnicy koła, do którego [linia TH] jest styczna w punkcie Z. Zatem linia LE, skoro sama jest równoległa do linii MZ, to, zgodnie z EE I,29, jest prostopadła do linii AE. Również linie MZ i LE, ponieważ są równoległe, to, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, znajdują się na tej samej płaszczyźnie. Przedłużmy linię QE poza punkt E. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie oś AH, ponieważ leży ona na tej samej płaszczyźnie co linia HT, jak wynika z twierdzenia I,1 tego dzieła: niech więc przetnie oś w punkcie D. Kąt HDQ będzie ostry, zgodnie z EE I,29, i równy kątowi AHT. Stożek niech przetnie również płaszczyzna LEDQ. Zgodnie z twierdzeniem I,103 tego dzieła, wspólne przecięcie tej płaszczyzny i powierzchni stożka będzie więc ostrokątne. Skoro linia AE jest prostopadła do linii FN i do linii DQ, i do linii LE, to z definicji linii prostopadłej do płaszczyzny wynika, że linia długości stożka, którą jest linia AE, jest prostopadła do płaszczyzny tego przecięcia ostrokątnego, które jest LEDQ. Ponieważ linia AE jest prostopadła do linii FEN, to linia FN będzie na tej płaszczyźnie, która przecina stożek wzdłuż tego przecięcia [ostrokątnego]. Niech więc będzie tak, żeby przez punkt F na tej płaszczyźnie przecięcia [ostrokątnego], jak podano w EE I,31, została poprowadzona linia FP, równoległa do linii EQ. Jak wynika z EE XI,9, linia FP będzie więc równoległa do linii ZT. Lecz skoro kąt OZT jest ostry, dlatego że kąt OZH jest rozwar-

ty, to, zgodnie z EE I,13, kąt TZF będzie także rozwarty. Poprowadźmy również przez punkt Z linię, która wraz z linią TZ tworzy kąt równy kątowni OZT. Ta linia po jej przedłużeniu będzie musiała przeciąć linię FP, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, ponieważ linia FP jest równoległa do linii ZT. Niech więc ją przetnie w punkcie P. Poprowadźmy linię PE, która, zgodnie z EE XI,1, znajdzie się na płaszczyźnie LEDQ. Kąt AEP będzie więc prosty, jak to wynika z wcześniejszych wywodów i z definicji linii prostopadłej do płaszczyzny. Ponieważ linie PZ i OZ, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, znajdują się na tej samej płaszczyźnie, przecinającej stożek, a kąt OZT jest równy kątowni TZP, to, z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że forma punktu O odbija się do oka, znajdującego się w punkcie P, od punktu Z zwierciadła.

Skoro kąt OZT, zgodnie z EE I,29, jest równy kątowni ZFP, dlatego że jest względem tamtego zewnętrzny, a kąt HZF jest równy kątowni OZT, zgodnie z EE I,15, zaś kąt ZPF jest równy kątowni PZT, zgodnie z EE I,29, bo są one naprzemianległe, to jest oczywiste, że kąt ZFP jest równy kątowni ZPF. Wobec tego, jak wynika z EE I,6, bok ZF jest równy bokowi ZP. Ponieważ kąt FEZ jest prosty, z tego powodu, że linia AE jest prostopadła do linii FN, z EE I,47 wynika, że kwadrat linii FZ ma wartość sumy kwadratu linii EF i EZ. Również z tego samego powodu kwadrat linii ZP ma wartość sumy kwadratów linii EZ i EP, ponieważ, jak wynika z wcześniejszych wywodów, kąt PEZ jest prosty, natomiast kwadrat linii PZ jest równy kwadratowi linii ZF, dlatego że, jak wynika z wcześniejszych wywodów, linie ZF i ZP są równe. W rezultacie obydwa kwadraty w jednym i drugim przypadku są równe. Jeżeli zatem odejmiemy wspólny kwadrat linii ZE, pozostaje kwadrat linii EP równy kwadratowi linii EF, a bok FE jest równy bokowi PE³. Zgodnie z EE I,5, kąt EPF jest więc równy kątowni EFP. Również kąt NEQ jest równy kątowni EFP, zgodnie z EE I,29, ponieważ jest względem tamtego zewnętrzny, a kąt QEP jest równy kątowni EPF, dlatego że są one naprzemianległe. A zatem kąt NEQ i kąt QEP są równe, ponieważ leżą na tej samej płaszczyźnie, którą jest PEN. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że forma punktu N odbija się do oka, znajdującego się w punkcie P, z punktu zwierciadła, którym jest punkt E.

Podobnie, jeśli poprowadzimy przez punkt F dowolną linię do jakiegoś punktu na linii ZE i przedłużymy ją aż do linii ON, zawsze można dowodzić dla punktu na linii ON, w który pada przedłużona linia, że [forma] tego punktu odbija się do punktu P od jakiegoś punktu na linii ZE, który przecina tę linię⁴. Taki dowód, podobny dla wszystkich pozostałych linii tego rodzaju trzeba rozpocząć od linii prostopadłej, którą jest FE, i od części linii EZ, która jest wspólna dla tych wszystkich trójkątów. W ten sposób [forma] jakiegoś punktu linii AON odbija się do oka, znaj-

dującego się w punkcie P, od jakiegoś punktu linii ZE, ponieważ ten sam dowód odnosi się do wszystkich punktów. To także wynika z twierdzenia V,34 tego dzieła. Jeśli zatem dowolną linię prostą dowolnej rzeczy widzianej⁵ umieścimy na miejscu linii AON, a środek oka znajdzie się w punkcie P, to zawsze zajdzie odbicie do oka od punktu linii AZE, która jest linią długości zwierciadła. Przyjęto, że to należy zrobić. Wynika więc to, co zakładano.

42. Gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego będzie linia długości, to miejsca obrazów i ich odległości od oczu będą takie, jak w zwierciadłach płaskich (Alh. V,43 i 49).

Skoro jedną nazwą określa się przyczyny zjawisk na różnych przedmiotach, również samo zjawisko będzie określone jedną nazwą. Dlatego nie powtarzamy tutaj tego, co o zwierciadłach płaskich zostało powiedziane w księdze V tego naukowego dzieła. Ponieważ w jednym i drugim przypadku, tzn. w przypadku zwierciadeł płaskich i tych tutaj wymienionych zwierciadeł, [formy rozprzestrzeniające się po] liniach padania i odbicia, padają i odbijają się od linii prostych, to w obydwu przypadkach miejsce obrazu będzie na prostopadłej do powierzchni zwierciadła, poprowadzonej przez punkt widziany, w takiej odległości od powierzchni zwierciadła, w jakiej punkt rzeczy widzianej znajduje się od samej powierzchni zwierciadła, dlatego że zawsze obraz rzeczy widzianej jest widoczny na przecięciu linii odbicia z prostopadłą padania na wszystkich tych zwierciadłach, jak to wynika z twierdzenia V,37 tego dzieła. Wynika więc to, co zakładano.

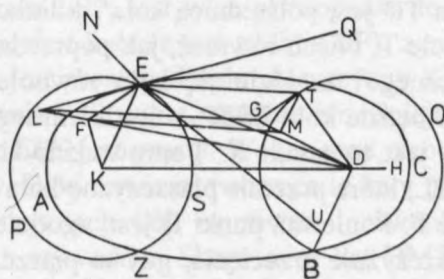
43. Gdy wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego będzie koło, to miejsca obrazów i punkty odbicia będą takie jak w zwierciadłach kulistych wypukłych (Alh. V,43).

Niekiedy miejsce obrazu znajdzie się wewnątrz zwierciadła cylindrycznego wypukłego, a niekiedy na powierzchni zwierciadła, niekiedy znów poza zwierciadłem, stosownie do tego, jak w różnych punktach prostopadła padania i linia odbicia przecinają się. Kto poszukiwałby przyczyny tego zjawiska i dowodu, niech powróci do tego, co zostało udowodnione w księdze VI tego naukowego dzieła na temat zwierciadeł kulistych wypukłych, bo dokładnie ten sam dowód jest w jednym i drugim przypadku, ponieważ na tych zwierciadłach i tamtych są te same granice styczności oraz granice i miejsca obrazów i te same stosunki

między liniami. Z tego wynika zatem to, co zakładano, i nie wydaje się nam, aby warto było dłużej nad tym się zatrzymywać.

44. Jeżeli przez punkt przecięcia cylindrycznego, na który pada prostopadła padania, poprowadzimy prostopadłą do osi tworzącą z prostopadłą do powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego, poprowadzoną przez punkt odbicia, kąt ostry, to przecięcie prostopadłej padania z tą prostopadłą nastąpi poza osią¹. (Alh. VI,24).

To, co tutaj zamierzamy udowodnić, wynika z twierdzenia I,114 tego dzieła. Abyśmy do tego naszego twierdzenia mogli rozsądnie zastosować matematyczny wniosek, uważam, że powinniśmy powtórzyć ten sam dowód. Niech więc AEBC będzie przecięciem cylindrycznym [rys. 24]². Niech będzie dany punkt E, na który pada prostopadła padania formy punktu N, i niech on będzie punktem rzeczy widzianej. Niech B będzie punktem odbicia, przez który została poprowadzona linia BD prostopadła do osi zwierciadła, którą niech będzie linia HK. Prostopadła padania, poprowadzona przez punkt N, który jest punktem rzeczy widzianej, niech przetnie to zwierciadło w punkcie zakładanego przecięcia, który jest punktem E. Twierdzą, że prawdziwe jest to, co się zakłada.



[Rys. 24]

Poprowadźmy bowiem linię ED. Niech będzie tak, aby kąt EDB stał się kątem ostrym. Niech QEL będzie linią styczną do przecięcia [cylindrycznego] w punkcie E. W punkcie przecięcia B niech powstanie koło równoległe do podstaw zwierciadła, zgodnie z twierdzeniem I,102 tego dzieła, które niech będzie oznaczone BTO. Jego środkiem niech będzie punkt D. Poprowadźmy, zgodnie z twierdzeniem I,101 tego dzieła, przez punkt E linię długości zwierciadła, która niech będzie linią ET. Również przez punkt D, zgodnie z EE I,11, poprowadźmy na płaszczyźnie tego koła linię DG, prostopadłą do linii BD. Jest więc oczywiste, że płaszczy-

zna HDG, skoro przechodzi przez oś HK, która, zgodnie z twierdzeniem I,92 tego dzieła, jest prostopadła do powierzchni koła, jest prostopadła do tej płaszczyzny koła, jak wynika z EE XI,18, natomiast płaszczyzna styczna do zwierciadła w punkcie B będzie równoległa do płaszczyzny HDG, przecinającej zwierciadło. Z tego bowiem powodu, że linia długości zwierciadła, poprowadzona przez punkt B, jest równoległa do osi HK, zaś, zgodnie z EE I,29, linia styczna do koła BTO w punkcie B jest równoległa do linii GD, bo kąt GDB jest prosty, jak wynika z wcześniejszych wywodów, oraz kąt zawarty pomiędzy linią BD i linią styczną do koła w punkcie B jest także prosty, zgodnie z EE III,18. Te płaszczyzny są wobec tego równoległe, zgodnie z EE XI,14. A zatem płaszczyzna, na której znajdują się linie LE i ET, nie jest równoległa do płaszczyzny HDG. A to wynika z twierdzenia I,24 tego dzieła, ponieważ płaszczyzna styczna do przecięcia ostrokątnego w punkcie B nie jest równoległa do płaszczyzny stycznej do tego samego przecięcia w punkcie E, przez który przechodzi linia LEQ, styczna do tego przecięcia, i linia długości, którą jest ET. Bo kąt EBD, jak wynika z założenia, jest ostry. Płaszczyzna HDG nie jest więc równoległa do płaszczyzny LET, dlatego z nią się przetnie. Niech się więc przetnie wzdłuż linii LG. Poprowadźmy linię GT, która będzie musiała być styczna do koła BTO, ponieważ płaszczyzna, na której jest poprowadzona linia GT jest styczna do tego zwierciadła. Po przeprowadzeniu linii TD, kąt GTD będzie prosty, zgodnie z EE III,18, ponieważ linia TD jest półśrednicą koła³, a linia GT jest styczna do tego koła w punkcie T. Niech również, jak poprzednio, w punkcie E przecięcia [cyldrycznego] znajdzie się koło równoległe do podstaw zwierciadła i niech to będzie koło ESZP, a środkiem tego koła niech będzie punkt na osi, a jest to punkt K. Poprowadźmy linię KE. Poprowadźmy także linię DL, która przetnie płaszczyznę koła ESP; niech więc ją przetnie w punkcie F. Ponieważ punkt D jest, zgodnie z twierdzeniem 24 tej księgi, na płaszczyźnie przecięcia, gdy ta płaszczyzna przecięcia jest płaszczyzną odbicia, a punkt L, który jest punktem linii stycznej do przecięcia, leży na tej samej płaszczyźnie przecięcia, wobec tego, zgodnie z EE XI,1, cała linia DL leży na płaszczyźnie przecięcia [cyldrycznego] i punkt F jest na płaszczyźnie przecięcia, ale on sam jest [również] na płaszczyźnie koła EZP. Znajduje się zatem na wspólnym przecięciu tych płaszczyzn, tzn. koła i przecięcia [cyldrycznego]. Ale i punkt E jest na obydwu tych płaszczyznach. Wobec tego również linia EF, zgodnie z EE XI,1, została poprowadzona na obydwu tych płaszczyznach. Jak wynika z twierdzenia I,19 tego dzieła, płaszczyzna przecięcia i [płaszczyzna] koła EZP przecinają się więc wzdłuż linii EF. Poprowadźmy również linię KF, a z punktu F poprowadźmy, jak podano w EE XI,11, prostopadłą do płaszczyzny koła BTO; niech to będzie linia FM. Jest

oczywiste, że punkt M będzie leżał na linii DG. Poprowadźmy linię TM. Zgodnie z twierdzeniem I,25 tego dzieła, jest oczywiste, że linia KD jest równoległa do linii FM i jej równa. Obydwie linie KD i FM są bowiem prostopadłe do płaszczyzny koła BTO, ponieważ te koła są równoległe, zgodnie z twierdzeniem I,24 tego dzieła, dlatego że jedna i druga z tych płaszczyzn, zgodnie z twierdzeniem I,100 tego dzieła, jest równoległa do podstaw cylindra. Skoro zatem linia FM jest równa i równoległa do linii DK, która jest częścią osi, to także, zgodnie z EE I,33, linia KF jest równa i równoległa do linii DM i podobnie, zgodnie z EE I,33, linia FM będzie równa i równoległa do linii długości, którą jest linia ET, ponieważ linia ET jest równa i równoległa do osi KD, zgodnie z twierdzeniem I,92 tego dzieła, bo jest linią długości zwierciadła, a linia KE, jak poprzednio, będzie równa i równoległa do linii DT, zaś linia EF jest równa i równoległa do linii TM, zgodnie z tym samym twierdzeniem Euklidesa I,33. Ale także płaszczyzna KDLG (ponieważ przechodzi przez oś cylindra, a kąt GDB jest prosty) jest prostopadła do płaszczyzny przecięcia ostrokątnego, którą jest AEBC, zgodnie z definicją prostopadłej. Ta sama płaszczyzna KDLG jest prostopadła również do płaszczyzny koła ESP, ponieważ płaszczyzna KDL przechodzi przez oś i, zgodnie z EE XI,18, jest prostopadła do podstaw cylindra, a zatem, ta sama płaszczyzna KDL jest także prostopadła do koła ESP, równoległego do podstaw. Ponieważ wspomniana płaszczyzna KDL jest prostopadła do płaszczyzny przecięcia ostrokątnego i koła ESP, jest więc prostopadła do linii wspólnej wspomnianego przecięcia i koła (a jest to linia EF), zgodnie z EE XI,19. Ponieważ linia EF jest prostopadła do płaszczyzny KDL, na której została poprowadzona linia KF, zatem, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny, kąt EFK jest prosty. Wobec tego, zgodnie z EE XI,10, i kąt TMD jest prosty. Boki bowiem, tworzące te kąty poprowadzone na równoległych płaszczyznach kół, są równe i równoległe, jak to wynika z wcześniejszych wywodów. Skoro więc kąt DMT jest prosty, to również, zgodnie z EE III,18, i kąt GTD jest prosty. Jeżeli zatem w trójkącie prostokątnym DTG została poprowadzona przez ten kąt prostopadła TM do podstawy, wobec tego, zgodnie z EE VI,8 i VI,17, to, co jest iloczynem linii DM i GM, jest równe kwadratowi linii MT. Ponieważ linia GT jest styczna do koła BTO, dlatego że znajduje się na płaszczyźnie stycznej, poprowadzonej do punktu styczności, którym jest T, to jest oczywiste, że linia LG jest równoległa do osi KD; i ponieważ płaszczyzny styczne do zwierciadła wzdłuż linii długości są prostopadłe do płaszczyzn podstaw cylindra, wobec tego, zgodnie z EE XI,19, ich wspólnym przecięciem jest, według założenia, linia LG, która będzie również prostopadła do tych samych płaszczyzn podstaw. Ta linia będzie więc, zgodnie z EE XI,6, równoległa do osi HK, a także równoległa do linii

FM, zgodnie z EE I,30, a ponieważ linia FM jest równoległa do podstawy LG w trójkącie LGD, to z EE VI,2 wynika, że przecina ona proporcjonalnie pozostałe boki tego trójkąta. Wobec tego stosunek linii DF do FL jest taki jak linii DM do MG; stąd wymiennie, zgodnie z EE V,16, stosunek linii DF do DM jest taki jak linii FL do MG, ale, zgodnie z EE I,19, linia DF jest większa niż linia DM, ponieważ w trójkącie FDM kąt FMD jest prosty, jak wynika z wcześniejszych wywodów bądź z EE XI,8. Z tego powodu linia FL jest większa niż linia MG, i dlatego iloczyn linii FD i FL jest większy od iloczynu linii DM i MG, a zatem jest większy również od kwadratu linii TM. Ale linia TM jest równa linii EF, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, stąd iloczyn linii DF i LF jest większy od kwadratu linii EF. W trójkącie DEL kąt LED jest więc większy od kąta prostego, zgodnie z twierdzeniem I,30 tego dzieła. Ponieważ, jeśli byłby kątem prostym, to wtedy, linia EF byłaby prostopadła do linii DL, a zgodnie z EE VI,8 i VI,17, iloczyn linii DF i FL byłby równy kwadratowi linii EF. Wynika zatem to, że linia prostopadła do linii, którą jest linia QL, styczna do przecięcia AEBC, poprowadzona przez punkt E, leży pod linią ED, nie dochodząc do punktu D. Tą linią prostopadłą niech więc będzie linia EU. Ponieważ kąt EDB jest ostry i kąt DEU jest ostry, a kąt UEQ jest prosty, wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie EU i BD, gdy zostaną przedłużone, przetną się w jakimś punkcie pod osią HK i pod przecięciem linii ED z linią BD, co jest oczywiste. Wynika więc to, co zakładano.

45. Prostopadła do powierzchni zwierciadła stożkowego wypukłego, poprowadzona przez punkt odbicia na przecięciu stożkowym, musi się przeciąć pod osią zwierciadła z prostopadłą padania, gdy pada ona w punkt bardziej oddalony od wierzchołka zwierciadła niż jest oddalony punkt odbicia, natomiast linia, poprowadzona przez punkt padania prostopadłej padania do linii prostopadłej do osi, tworzy z nią kąt ostry (Alh. VI,30).

To twierdzenie wynika również z twierdzenia I,113 tego dzieła. Aby łatwiej dało się je zastosować do zwierciadeł stożkowych, niech ABG będzie zwierciadłem stożkowym wypukłym, a jego wierzchołkiem niech będzie [punkt] A, zaś osią AK, i niech na nim będzie przecięcie ostrokątne. Od obwodu tego przecięcia, którym jest linia EFZ, niech odbiją się do oka formy punktów linii widzianej [rys. 25]¹. Punktem odbicia niech będzie E. Niech linia ED, wychodząca z punktu E (który jest punktem odbicia), będzie prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła. A ta linia przedłużona na powierzchni przecięcia [ostrokątnego] przetnie się z osią AK, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, bowiem kąt EAK jest ostry, a kąt AED prosty. Niech więc się przetnie w punkcie D.

prowadźmy linie KZ i DZ. Ponieważ punkt K jest biegunem koła, to, zgodnie z twierdzeniem I,65 tego dzieła, linia KZ jest równa linii KO, a zgodnie z twierdzeniem I,8 tego dzieła, linia AO jest równa linii AZ (bo są to linie długości jednego stożka), zaś linia AK jest wspólna dla obydwu tych trójkątów, wobec tego, zgodnie z EE I,8, trójkąty AOK i AZK będą równokątne. Ale skoro kąt AOK jest prosty, to i kąt AZK jest prosty. Linia KZ jest zatem prostopadła do linii długości zwierciadła AZ, która leży na płaszczyźnie stycznej do zwierciadła. Stąd linia KZ jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii AZ. Zatem, zgodnie z EE XI,18, płaszczyzna ZKO jest prostopadła do tej wspomnianej płaszczyzny stycznej, ponieważ przez punkt Z została poprowadzona linia styczna do przecięcia [ostrokatnego], a jest to linia TZQ. W rezultacie, skoro linia KZ jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii AZ – co jest oczywiste – a wspólnym przecięciem płaszczyzny przecięcia [ostrokatnego] i tej płaszczyzny stycznej do zwierciadła jest linia TZQ, styczna do przecięcia [ostrokatnego], to linia KZ będzie prostopadła do linii TZQ. Kąt KZQ będzie zatem prosty, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny stycznej. A ponieważ, jak wynika z wcześniejszych wywodów, kąt KZQ jest prosty, a trójkąt AZK jest prostopadły³ do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii AZ, to linia KZ jest tak samo prostopadła do tej płaszczyzny stycznej. Poprowadźmy zatem z punktu Z wspólne przecięcie płaszczyzny koła RZG i płaszczyzny stycznej do stożka wzdłuż linii AZ. Ta linia, jak wynika z EE XI,3, jest linią prostą. Niech więc będzie to linia ZY. Z wcześniejszych wywodów wynika, że linia ZY jest styczna do koła RZG. Środkiem tego koła niech będzie punkt C. Poprowadźmy linię CZ. Jak wynika z EE III,18, kąt CZY jest prosty. Poprowadźmy, jak podano w EE I,11, przez punkt C, który jest środkiem koła RZG, linię tworzącą z linią ZC kąt prosty. Niech będzie linia CR. A zatem, zgodnie z EE I,28, linia CR jest równoległa do linii ZY, natomiast linia CR jest prostopadła do powierzchni AZC (zgodnie z EE XI,4,) z tego powodu, że kąt ZCR jest prosty, zgodnie z wcześniejszymi wywodami, i kąt ZCA jest prosty, dlatego że oś AC jest prostopadła do powierzchni koła RZG, zgodnie z twierdzeniem I,89 tego dzieła. Ponieważ oś jest także prostopadła do podstawy stożka, do której koło jest równoległe, wobec tego, jak wynika z twierdzenia I,23 tego dzieła, oś będzie prostopadła do koła. Zatem linia ZY, równoległa do linii CR, jest prostopadła do płaszczyzny AZC, zgodnie z EE XI,8, zaś linia ZQ styczna do przecięcia jest ukośna do płaszczyzny AZC, dlatego [będzie ukośna] również do linii CZ. Poprowadźmy zatem, jak podano w EE I,11, przez punkt Z na płaszczyźnie przecięcia [ostrokatnego], ale poza obwodem przecięcia, linię prostą, tworzącą z linią TQ kąt prosty: niech to będzie linia ZH. Ponie-

waż punkt D, zgodnie z twierdzeniem 24 tej księgi, leży na płaszczyźnie przecięcia [ostrokatnego], w jakimś punkcie osi, to jest oczywiste, że jest to inny punkt niż punkt K, który jest punktem na osi, niżej położonym od punktu D, poza płaszczyzną przecięcia [ostrokatnego]. Ale punkt Z leży na płaszczyźnie tego przecięcia. Wynika więc, że linia KZ znajduje się poza płaszczyzną przecięcia i przecina linię ZH, ale nie tworzy z nią jednej linii, ponieważ linia HZ leży na samej płaszczyźnie przecięcia [ostrokatnego], a linia KZ jest poza nią. Ponieważ linie KZ i HZ przecinają się w punkcie Z, to z EE XI,2 wynika, że one same znajdują się na jakiejś jednej płaszczyźnie. Niech więc linie ZK i HZ znajdą się na jakiejś innej płaszczyźnie, z wyjątkiem płaszczyzny przecięcia, która niech przetnie płaszczyznę przecięcia wzdłuż linii PZH, znajdującej się, zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła, na obydwu tych płaszczyznach. Niech linia ZP będzie jedną i tą samą linią wraz z linią ZH, która została poprowadzona na płaszczyźnie przecięcia. Linia DZ, która znajduje się na płaszczyźnie przecięcia, jest natomiast poza płaszczyzną, na której znajdują się linie KZ i ZH. Ale linia ZK z linią ZQ tworzy kąt prosty, dlatego że, jak powiedzieliśmy wcześniej, linia KZ jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do stożka, która przechodzi przez linie AZ i ZQ. Płaszczyzna KZH przecina płaszczyznę DZH wzdłuż linii wspólnej dla tych dwóch płaszczyzn (zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła) i jest to linia HZ. Jednak linia DZ leży na płaszczyźnie przecięcia [ostrokatnego], jak wykazano powyżej, i jest przecięta linią KZ w punkcie Z, a punkty T i Q są po bokach powierzchni KZPH. Płaszczyzna HZK przecina zatem płaszczyznę DZQ. Stąd wspólna różnica⁴ płaszczyzn HZK i DZQ znajduje się na płaszczyźnie HZK. Zgodnie z EE XI,3, to wspólne przecięcie jest również linią prostą. Ta linia wraz z linią ZK tworzy więc kąt prosty. Ponieważ linia ZQ jest prostopadła do linii ZH i do linii ZK, to z EE XI,4 wynika, że ona jest również prostopadła do powierzchni HZK, a w konsekwencji i do linii ZP, i ponieważ płaszczyzna HZK przecina płaszczyznę DZQ, a odchylenie płaszczyzny HZK od powierzchni przecięcia [ostrokatnego], której częścią jest płaszczyzna DZQ, zachodzi od strony półśrednicy ZC, to linia ZP, (która jest wspólną różnicą dla tych dwóch powierzchni), znajdzie się pośrodku pomiędzy dwiema liniami QZ i ZD. Kąt QZD jest więc rozwarty, a linia HZ leży na płaszczyźnie (na której są linie DZ i ZQ), która jest płaszczyzną przecięcia i tworzy z linią ZQ kąt prosty. Stąd linia ZH, poprowadzona wewnątrz przecięcia⁵ poza punkt Z, przetnie kąt DZQ, a linia HZ przetnie się z linią CD pod punktem D, który jest punktem na osi, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła. Bowiem kąt ZDE jest ostry z założenia i kąt DZP jest ostry. Prostopadła padania, którą jest linia ZH, z linią ED prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła, którą prowadzimy przez punkt odbicia,

to przecięcie nastąpiło w punkcie O. Punkt O jest zatem bliższy wierzchołkowi tego zwierciadła niż punkt E. Zgodnie z twierdzeniem I,89 tego dzieła, linia AO będzie równa linii AZ. Ponieważ z punktu O wychodzi do linii AO prostopadła, którą niech będzie linia OK, dzieląca oś AD w punkcie K, to, zgodnie z EE I,28, linia OK będzie równoległa do linii ED. Poprowadźmy zatem linie KZ i DZ. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem I,65 tego dzieła, linia KZ jest równa linii KO, bo punkt K jest biegunem koła ZML, a linia AO jest równa linii AZ, zgodnie z twierdzeniem I,89 tego dzieła, zaś linia AK jest wspólna dla obydwu tych trójkątów, wobec tego, jak wynika z EE I,8, trójkąty AOK i AZK będą równokątne. Ale kąt AOK jest prosty, dlatego że OK jest prostopadłą poprowadzoną do linii AO bądź dlatego jest prosty, że kąt AED jest prosty, co wynika z EE I,29, a linie ED i OK są równoległe: a zatem i kąt AZK jest prosty. Linia KZ jest więc prostopadła do linii długości zwierciadła AZ, która leży na płaszczyźnie stycznej do zwierciadła: stąd linia KZ jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do zwierciadła wzdłuż linii AZ. Po przeprowadzeniu przez punkt Z linii stycznej do przecięcia [zwierciadła] w punkcie Z, (a niech to będzie linia TZQ) przeprowadźmy dowód jak w poprzednim twierdzeniu, i natychmiast stanie się oczywiste to założenie, podobnie jak poprzednie. Punkt P bowiem, który jest wspólnym przecięciem prostopadłej padania, poprowadzonej przez punkt Z, z prostopadłą ED, będzie leżał poza osią AD i pod punktem D. Jeśli na obwodzie tego przecięcia [stożkowego] zaznaczymy punkt bliższy wierzchołkowi niż punkt Z, to punktem zaznaczonym niech będzie X. Od tego również punktu poprowadźmy prostopadłą padania, którą niech będzie XY. Jeśli kąt XDE będzie ostry, to zostanie dowiedzione, że prostopadła padania przetnie się z prostopadłą ED poza osią AD, a przecięcie niech nastąpi w punkcie Y. Twierdzą, że punkt Y będzie bardziej oddalony od osi AD niż punkt P. Linia XY nie przetnie bowiem kąta AZP ani linii ZP, ponieważ prostopadła poprowadzona przez punkt wyższy dalej rozciąga się poza osią i z prostopadłą ED utworzy kąt prosty, i przetnie się z nią w punkcie D na osi. Pozostałe natomiast prostopadłe, te pośrodku, poprowadzone od ich punktów padania, do punktu D, tworzą z prostopadłą ED kąty ostre, ale nie przetną linii DP. Wynika więc to, co zakładano.

47. Jeżeli linia odbicia, [przedłużona do] wnętrza [obwodu] przecięcia ostrokątnego, przecina prostopadłą padania, i jeżeli przez punkt odbicia została przeprowadzona styczna przecinająca [tą] prostopadłą [padania], to wtedy stosunek całej prostopadłej [padania] do jej części odciętej [przez przedłużoną linię odbicia] i znajdującej się wewnątrz [obwodu] przecięcia ostrokątnego będzie taki jak części, znajdującej

będzie większy od kąta prostego, którym jest kąt GBT, jak wynika z wcześniejszych wywodów. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, linie DB i EK przetną się; ich punktem przecięcia niech będzie H. A zatem, zgodnie z twierdzeniem V,37⁴ tego dzieła, punkt H jest miejscem obrazu formy punktu E. Twierdząc, że stosunek linii EQ, która jest prostopadłą padania formy punktu E, do linii QH jest taki jak linii ET do linii TH.

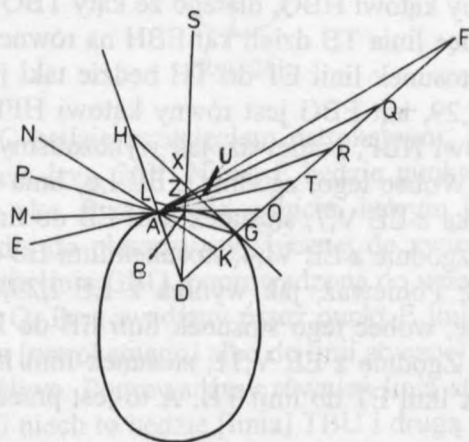
Ponieważ linie EK i BE przecinają się w punkcie E, poprowadźmy, jak podano w EE I,31, przez punkt H linię HF, równoległą do linii EB. Ponieważ, jak wynika z twierdzenia V,20 tego dzieła, kąt EBT jest równy kątowi DBU, a kąt DBU, zgodnie z EE I,15, jest równy kątowi TBH, jest oczywiste, że kąt EBT będzie równy kątowi TBH. Wynika zatem to, że kąt EBG jest równy kątowi HBQ, dlatego że kąty TBQ i TBG są proste i równe. Skoro więc linia TB dzieli kąt EBH na równe części, to, jak wynika z EE VI,3, stosunek linii ET do TH będzie taki jak linii EB do BH. Zgodnie z EE I,29, kąt EBG jest równy kątowi HFB, a zatem kąt HFB jest równy kątowi HBF, ponieważ, jak wykazaliśmy, kąt EBG jest równy kątowi HBF. Wobec tego, zgodnie z EE I,6, linia HB jest równa linii HF, a, jak wynika z EE V,7, stosunek linii EB do linii HF jest taki jak do linii HB, zaś, zgodnie z EE VI,4, stosunek linii EB do HF jest taki jak linii EQ do QH. Ponieważ, jak wynika z EE I,29, trójkąty EQB i HQF są równokątne, wobec tego stosunek linii EB do HB będzie taki jak linii EQ do QH. Zgodnie z EE V,11, stosunek linii EQ do linii QH będzie zatem taki jak linii ET do linii TH. A to jest przedmiotem twierdzenia.

48. Jeżeli w przypadku każdego zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego, wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła jest ostrokątne, to linia prosta, leżąca między punktem przecięcia dwóch wcześniej wspomnianych linii prostopadłych¹ i miejscem obrazu, jest większa od linii prostej, leżącej między miejscem obrazu i punktem odbicia (Alh. V,44).

Układ rysunku i dowód pod każdym względem niech będą takie same jak w poprzednim twierdzeniu. Ponieważ, zgodnie z EE VI,4 i I,29, stosunek linii EQ do linii QH jest taki jak linii EB do linii HF, a, zgodnie z EE I,6 i V,7, stosunek linii EB do HF jest taki jak linii EB do linii HB, to, zgodnie z EE V,11, stosunek linii EB do linii BH będzie taki jak linii EQ do linii QH. Wobec tego, wzajemnie, jak wynika z EE V,16 i V,4, stosunek linii EQ do EB będzie taki jak QH do HB. Ale linia EQ jest większa niż linia EB (zgodnie z EE I,19), dlatego że kąt EBQ jest większy od kąta prostego, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, ponieważ kąt TBQ jest prosty. Wobec tego linia QH jest większa od linii HB.

A to jest przedmiotem twierdzenia, bo punkt Q jest tym punktem, w którym przecinają się dwie prostopadłe GBQ i EK, która jest prostopadłą padania. Punkt H jest miejscem obrazu formy punktu E, a punkt B jest punktem odbicia formy punktu E do środka oka, znajdującego się w punkcie D.

49. Jeżeli wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego jest ostrokątne i forma rzeczy widzianej pada ukośnie na zwierciadło, to miejsce obrazu form punktów widzianych niekiedy będzie na powierzchni zwierciadła, niekiedy wewnątrz zwierciadła, a niekiedy poza nim (Alh. V,45 i 51).



[Rys. 27]

To, co tutaj się zakłada, zachodzi wtedy, gdy punkt rzeczy widzianej nie będzie na średnicy widzenia¹ prostopadłej do powierzchni zwierciadła. Wtedy bowiem forma tylko jednego punktu pada na linię prostopadłą do zwierciadła i wzdłuż tej samej linii odbija się do oka, np. ten punkt linii prostopadłej, który znajduje się na powierzchni patrzącego oka. Punkt bowiem położony ponad powierzchnią oka nie może się odbić wzdłuż tej prostopadłej, ponieważ nie może dojść do zwierciadła po linii prostopadłej z przyczyny wspomnianej w twierdzeniu V,32 i VI,10 tego dzieła. Podobnie nie może się odbić forma tego punktu do oka od innego punktu zwierciadła z wyjątkiem tego punktu, na który pada sama prostopadła. Bo jeżeli przyjmniemy, że to może się stać, to wtedy mogłoby się zdarzyć, że dwie prostopadłe, poprowadzone przez powierzchnię zwierciadła, przecięłyby się w środku tego samego oka, co jest sprzeczne z EE XI,6 i twierdzeniem I,20 tego dzieła, i powstałyby dwa kąty proste

w trójkącie, co jest sprzeczne z EE I,32 i jest niemożliwe. W takim więc położeniu prostopadła odbije się tylko wzdłuż siebie samej.

Niech będzie tak, że forma rzeczy widzianej pada nie prostopadłe na powierzchnię zwierciadła, ale ukośnie. Przyjmijmy, że płaszczyzna odbicia przecina zwierciadło cylindryczne wypukłe, a wspólne ich przecięcie jest przecięciem ostrokątnym, które jest AGB [rys. 27]². Przez punkt A tego przecięcia poprowadźmy linię styczną do [obwodu] przecięcia i niech to będzie linia EAT. Zgodnie z EE I,11, poprowadźmy wewnątrz [obwodu] przecięcia prostopadłą przez punkt A do linii ET, i niech to będzie linia AD. Punkt D niech leży wewnątrz [obwodu] przecięcia. Z twierdzenia I,115 tego dzieła wynika więc, że linia DA dzieli [obwód] tego przecięcia na dwie części i na każdej z nich jest jeden jedyny punkt, w którym linia styczna do [obwodu] przecięcia będzie równoległa do linii DA. Niech jednak poza tym jednym punktem, [wspomnianym w zdaniu poprzednim], będzie dany jeszcze inny punkt, którym niech będzie punkt G³, a styczna w tym punkcie niech się przetnie z linią DA w punkcie H na zewnątrz [obwodu] przecięcia. Poprowadźmy, zgodnie z EE I,11, linię prostopadłą do tej linii stycznej (a jest to linia GH), którą niech będzie prostopadła GQ, przecinająca inną linię styczną, którą jest linia EAT, w punkcie T. Punkt T, zgodnie z definicją 6 z księgi VI, będzie więc końcem styczności. Ta prostopadła (którą jest GQ) również będzie się musiała przeciąć z linią HD, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, dlatego że kąt QGH jest prosty, a kąt GHD jest ostry. Te prostopadłe niech się więc przetną w punkcie D. Poprowadźmy linię GA, którą przedłużmy poza [obwód] przecięcia aż do punktu P. Poprowadźmy linię QA. Kąt QAH jest zatem równy kątowi HAP albo większy, albo mniejszy od tego kąta.

Jeśli kąt ten będzie równy [kątowi HAP], to forma punktu Q padnie na zwierciadło w punkcie A i, zgodnie z twierdzeniem V,20 tego dzieła, odbije się do środka oka znajdującego się w punkcie P, a miejscem obrazu, zgodnie z twierdzeniem V,37 tego dzieła, będzie punkt G, który jest punktem przecięcia [obwodu] przecięcia ostrokątnego i powierzchni cylindra zwierciadła, ponieważ w tym punkcie przecina się prostopadła padania, poprowadzona przez punkt rzeczy widzianej (rzeczą widzianą jest Q) do linii stycznej do [obwodu] przecięcia w punkcie G z linią odbicia, którą jest linia PA. Ponieważ punkt G jest na powierzchni zwierciadła, jest oczywiste, że wtedy zobaczymy obraz formy punktu Q na powierzchni zwierciadła.

Jeśli natomiast na linii GQ nad punktem Q umieścimy inny punkt, np: F, i poprowadzimy linię FA, to wtedy kąt FAH będzie mniejszy od kąta HAP. Kąt FAH jest bowiem mniejszy od kąta QAH, który jest równy kątowi HAP. Wykreślmy, jak podano w EE I,23, kąt równy kątowi FAH,

o wierzchołku w punkcie A, granicy linii HA, którym niech będzie kąt HAN. Przedłużmy linię NA do wnętrza [obwodu] przecięcia. Przetnie się ona z prostopadłą FQGD i punktem tego przecięcia niech będzie punkt K. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika zatem, że forma punktu F odbija się z punktu zwierciadła, którym jest punkt A, do oka znajdującego się w punkcie N, a miejsce obrazu formy punktu F będzie w punkcie K. Obrazy wszystkich punktów linii QF, znajdujących się ponad punktem Q, będą wewnątrz cylindra zwierciadła, jak to wynika z twierdzenia V,34 tego dzieła oraz wcześniejszych wywodów.

Jeśli natomiast między punktem Q i punktem T (który jest końcem styczności) umieścimy jakiś punkt, np. R, to kąt RAH będzie większy od kąta QAH, a tym samym również większy od kąta HAP. Temu kątowi niech będzie równy kąt, którym niech będzie kąt HAM. Jest oczywiste, że linia MA po przedłużeniu padnie na linię GQ na zewnątrz [obwodu] przecięcia. Z tego bowiem powodu, ponieważ linia PA tworząc z linią AH kąt PAH, równy kątowi QAH, pada na samo przecięcie w punkcie G, to jest oczywiste, że linia MA przecina linię GQ na zewnątrz [obwodu] przecięcia; niech będzie tak, aby ta linia padła w punkt O. Jak wynika z twierdzenia V,37 tego dzieła, obraz formy punktu R będzie więc w punkcie O, a obrazy wszystkich punktów linii RQ, z wyjątkiem punktu Q, będą na zewnątrz zwierciadła między punktami O i G.

Jeśli natomiast kąt QAH będzie mniejszy od kąta HAP: odetnijmy, zgodnie z twierdzeniem I,27 tego dzieła, od kąta HAP kąt HAN równy kątowi QAH. Jest oczywiste, jak poprzednio, że obraz formy punktu Q będzie w punkcie K, a obrazy wszystkich wyżej położonych punktów linii QF będą wewnątrz [obwodu] przecięcia. Jeśli jednak przyjmiemy, że punkt R jest niżej położony niż punkt Q w taki sposób, że kąt RAH jest równy kątowi HAP, wtedy obraz formy punktu R będzie w punkcie G na przecięciu [ostrokątnym], który znajduje się na powierzchni zwierciadła, a obrazy wszystkich punktów między R i Q będą wewnątrz zwierciadła, natomiast obrazy wszystkich punktów między R i T będą na zewnątrz powierzchni zwierciadła.

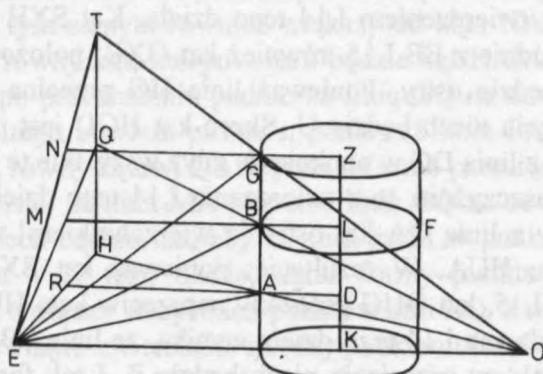
Jeśli jednak kąt QAH będzie większy od kąta HAP, a kąt HAM równy kątowi QAH, to jest oczywiste, że przedłużona linia MA przetnie przecięcie [ostrokątne], bo linia EAT jest styczna do tego przecięcia w punkcie A z tego powodu, że linia MA, gdy ją przedłużymy, musi przeciąć to przecięcie [ostrokątne]. Niech więc je przetnie w punkcie B. Poprowadźmy linię styczną do przecięcia [ostrokątnego] w punkcie B, które niech się przetnie z linią DH w punkcie L. Przetnie się zaś, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, bo po przeprowadzeniu linii DB [powstanie] kąt prosty DBL i kąt ostry LDB. Kąt DLB będzie ostry na mocy EE I,32, ponieważ kąt DBL jest prosty. Zgodnie z EE I,13, kąt HLB jest

rozwartą. Linia LB przetnie się zatem z linią HG⁴, jak to wynika z twierdzenia I,60 tego dzieła, od strony punktów B i G, ponieważ, co się tyczy tej sprawy, to takie same stosunki zachodzą na przecięciach kół [z liniami]⁵; i [linia LB z linią HG] utworzy kąt ostry. Poprowadźmy zatem, zgodnie z EE I,11, przez punkt B prostopadłą do linii LB, a ta prostopadła niech będzie BS. Ta prostopadła połączona z linią DB stanie się jedną linią, zgodnie z EE I,14, ponieważ każda z tych linii z linią LB w tym samym punkcie, tzn. w punkcie B, utworzy kąt prosty. Linia BS przetnie linię HG. Niech będzie tak, aby przecięła ją w punkcie X. Ponieważ linia LB, po przedłużeniu, przecina się z linią HD, a kąt SBL jest prosty, to jest oczywiste, że linia BS tworzy z linią HG od strony punktu H kąt ostry, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła. Kąt SXH będzie ostry. Wobec tego, zgodnie z EE I,15, również kąt GXB, położony naprzeciw tamtego kąta, będzie ostry. Ponieważ linia HG przecina linię QA, to punktem przecięcia niech będzie U. Skoro kąt HGD jest prosty, a linia QA przecina się z linią DG w punkcie Q, gdyż wszystkie te linie znajdują się na jednej płaszczyźnie, to z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika, że linia HG tworzy z linią QA kąt ostry [z wierzchołkiem] w punkcie U, który jest kątem HUA. W rezultacie; ponieważ kąt SXH jest ostry, a zgodnie z EE I,15, kąt QUG położony naprzeciw kąta HUA także jest ostry, to z twierdzenia I,14 tego dzieła wynika, że linie SB i QU przecinają się. Ich punktem przecięcia niech będzie Z. I tak forma punktu Z przesunie się do zwierciadła po linii ZA, a odbije się po linii AM do oka, znajdującego się w punkcie M, zaś miejscem obrazu będzie punkt B. Miejsca wszystkich obrazów punktów linii ZS, poza punktem Z, będą wewnątrz [obwodu] przecięcia, a miejsca obrazów wszystkich punktów linii ZB, które znajdują się poniżej Z, będą na zewnątrz [obwodu] przecięcia. A to jest przedmiotem twierdzenia.

50. Jeżeli środek oka znajduje się na tej samej płaszczyźnie co oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego i równoległa do niej linia prosta, to jest możliwe, że odbicie [formy] tej linii zachodzi do oka od całej linii długości zwierciadła, a obraz tej linii zobaczymy jako prosty, równy rzeczy widzianej (Alh. VI,25).

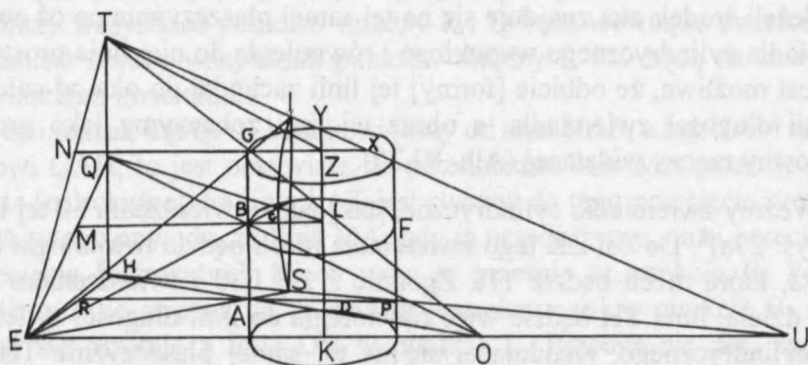
Weźmy zwierciadło cylindryczne, [tak] jak w twierdzeniu 30 tej księgi [rys. 27a]¹. Do osi ZK tego zwierciadła niech będzie równoległa linia prosta, którą niech będzie TH. Zgodnie z EE I,30 i twierdzeniem I,92 tego dzieła, linia TH będzie więc równoległa do linii długości zwierciadła cylindrycznego, znajdującej się na tej samej płaszczyźnie THZK, i niech to będzie linia AG. Twierdzę, że jeśli oko (którego środkiem jest [punkt] E) będzie na tej samej płaszczyźnie THZK co linia TH i oś ZK, to jest możliwe, że [formy] wszystkich punktów linii TH odbiją się do

oka E. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 30 tej księgi, jest możliwe, że punkty odbicia wszystkich punktów linii TH są na linii długości cylindra, którą jest linia GA, gdyż, jak to wynika z twierdzenie I,93 tego dzieła, ta linia jest wspólna dla płaszczyzny odbicia, na której znajdują się oko E, oś ZK i linia TH, oraz dla powierzchni cylindra, to zobaczymy obraz formy linii TH jako prosty dzięki temu, że dowolna prostopadła, poprowadzona przez punkt linii TH, będzie na tej samej płaszczyźnie co oko i oś. Potwierdzi się to, że miejsca obrazów punktów linii TH są umieszczone wzdłuż linii prostej, podobnie jak w zwierciadłach płaskich, co zostało udowodnione w twierdzeniu V,52 tego dzieła, w przypadku linii prostych widzianych. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 27a]

51. Jeżeli oko nie znajduje się na tej samej płaszczyźnie co oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego i równoległa do niej linia prosta, to obraz tej linii widzimy zakrzywiony, o umiarkowanej krzywiznie, mniejszy od rzeczy widzianej (Alh. VI,27).



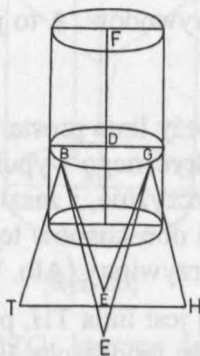
[Rys. 28]

Niech układ [rysunku] będzie taki, jak wcześniej w twierdzeniu 30 tej księgi [rys. 28]¹. Niech forma linii TH odbije się od linii długości zwierciadła, którą niech będzie linia AG. Twierdzą, że obraz linii TH czasami zobaczymy zakrzywiony, bowiem forma jej punktu, którym jest Q, jak okazało się powyżej w twierdzeniu 30 tej księgi, odbija się do oka E z punktu B na zwierciadle, który jest punktem na kole BF. Wobec tego linia, poprowadzona przez punkt Q do wnętrza koła BF, którego środkiem jest L, będzie linią QL i jest ona prostopadłą padania formy punktu Q ponieważ, jak wynika z EE III,18, linia QL jest prostopadła do linii stycznej do koła BF, którego obwód jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła. Ta prostopadła QL, jak się okazuje, przecina się również z prostopadłą do powierzchni zwierciadła przedłużoną do osi ZK, poprowadzoną przez punkt B, który jest punktem odbicia. To przecięcie, zgodnie z twierdzeniem I,90 tego dzieła, będzie w punkcie L na osi, tzn. w środku koła BF. Linia QL niech się wobec tego przetnie z linią LM² w punkcie L na osi. Przedłużmy również linię odbicia, którą jest linia EB, tak, aby się ona przecięła z prostopadłą QL; niech C będzie punktem tego przecięcia. Jak więc wynika z twierdzenia V,37 tego dzieła, obraz formy punktu Q zobaczymy w punkcie C, a ten punkt C, na mocy EE XI,1, znajduje się na płaszczyźnie, na której znajdują się linia QH, oś ZK i linia długości AG, zaś forma punktu T linii TH odbija się od punktu G zwierciadła, który, zgodnie z twierdzeniem 10 tej księgi, jest punktem przecięcia ostrokątnego, ponieważ punkt T jest wyżej niż środek oka, którym jest E, i [punkty T oraz E] nie leżą na tej samej płaszczyźnie. Przez punkt T można przeprowadzić tylko jedną prostopadłą do tego przecięcia ostrokątnego, które jest wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła, bądź do linii stycznej do zwierciadła w jakimś punkcie tego przecięcia ostrokątnego, i poprowadźmy ją, jak podano w EE I,12. Na mocy twierdzenia I,114 tego dzieła bądź twierdzenia 44 tej księgi przetnie się ona z prostopadłą, poprowadzoną do osi ZK przez punkt na tym samym przecięciu [ostrokątnym], którym jest G, a tą prostopadłą jest linią NGZ. Przecięcie będzie poza osią, tzn. pod punktem Z, który jest przecięciem prostopadłej NZ i osi ZK, ponieważ po przeprowadzeniu linii TZ kąt TZN będzie ostry, dlatego że kąt NZY jest prosty, gdy przedłużymy oś KZ poza punkt Z do punktu Y. Przedłużmy także linię NZ poza punkt Z do punktu X. Poprowadźmy przez punkt T linię przecinającą się w punkcie X z linią NZ, przedłużoną poza punkt Z. Przetnie się ona, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, dlatego że kąt XNT jest prosty bądź ostry, a kąt XTN jest ostry. Linia TX niech przetnie oś KZ w punkcie Y. Przedłużmy linię EG poza punkt G tak, aby przecięła się z linią TX. Przetnie się zaś zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, bo przedłużona linia EG przecina kąt

TGX. Wobec tego przecina również podstawę TX, ponieważ jest oczywiste, że te linie leżą na tej samej płaszczyźnie. Niech przecięcie tych linii nastąpi w punkcie I. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem V,37 tego dzieła, punkt I będzie miejscem obrazu formy punktu T. Podobnie linia, poprowadzona przez punkt H na linii TH, jest prostopadłą do linii stycznej do zwierciadła w jakimś punkcie przecięcia ostrokątnego, od którego [to punktu], zgodnie z twierdzeniem 10 tej książki, odbija się forma punktu H do oka E, i przetnie się ona z prostopadłą DAR poza punktem D, który jest punktem osi, jak to wynika z twierdzenia I,114 tego dzieła bądź z twierdzenia 44 tej książki. Niech się więc przetnie w punkcie P. Poprowadźmy linię EA poza punkt A tak, aby przecięła się z linią HP. Punktem przecięcia, zgodnie z wcześniejszymi wywodami³, niech będzie S. Punkt S, jak poprzednio, będzie więc obrazem punktu H. Poprowadźmy także linię SI. Jest oczywiste, że linia TI przetnie się w punkcie X z prostopadłą NZ, która jest równoległa do linii EO, ponieważ ta linia przetnie się z linią EO, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła; niech się więc przetnie w punkcie U. Podobnie linia HS, ponieważ przecina się z prostopadłą DR, która jest równoległa do linii EO, przetnie się z linią EO, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła. Ponieważ położenie punktu T linii TH względem punktu E, który jest środkiem oka, jest takie samo co położenie punktu H, i taka sama jest odległość od oka, gdyż linia TH jest równoległa do osi ZK, i podobnie punkty T i H są w równej odległości od punktu Q, jak to wynika z wcześniejszych wywodów w twierdzeniu 30 tej książki, to położenie punktów T i H jest takie samo względem punktu O, podobnie jak i położenie punktów I oraz S jest takie samo względem punktu O, co wynika z wcześniejszych wywodów w obecnym dowodzie. Wobec tego, zgodnie z EE XI,1, położenie linii TI oraz HS względem linii EO będzie takie samo. Zatem linie TI i HS przetną się w tym samym punkcie na linii EO: niech się więc przetną w punkcie U. Stąd powstanie trójkąt TUH i na płaszczyźnie tego trójkąta będzie linia IS, zaś oś zwierciadła, którą jest ZK, nie będzie na tej płaszczyźnie. Ale linia TH jest na tej samej płaszczyźnie co oś, jak wynika z założenia i twierdzenia I,1 tego dzieła. Zatem ta płaszczyzna przecina płaszczyznę trójkąta TUH na linii wspólnej, którą jest linia EH, a nie na żadnej innej linii. Wobec tego, ponieważ punkt T leży na płaszczyźnie linii TH i podobnie oś ZK leży na tej samej płaszczyźnie, a punkt C nie jest na linii TH, to w rezultacie nie znajduje się na płaszczyźnie trójkąta TUH. Na płaszczyźnie tego trójkąta są dwa punkty: I oraz S. Wobec tego, zgodnie z EE XI,1, linia ICS będzie zakrzywiona. Ponieważ jest ona obrazem linii TH, jest oczywiste, że obraz linii prostej, którą jest linia TH, jest zakrzywiony. A to jest pierwsze założenie.

To zakrzywienie jednak jest umiarkowane, dlatego że prostopadła, poprowadzona przez punkt C do linii IS, tzn. do punktu przecięcia linii IS oraz płaszczyzny koła, jest bardzo mała. Jednak im większa będzie linia widziana, którą jest linia TH, równoległa do linii długości zwierciadła, o tyle jej obraz będzie mniej zakrzywiony, a im mniejsza będzie linia TH, tym większe będzie zakrzywienie. Ponieważ linia IC jest mniejsza od linii TQ, a linia SC mniejsza od linii HQ, gdyż linia IS, od której odchyła się w sposób umiarkowany linia ICS, leży między liniami TU i HU, przecinającymi się w punkcie U, i jest prawie równoległa do linii TH, podobnie jak i [do] osi KZ, to jest więc oczywiste, że linia, która jest obrazem⁴ (to jest linia ICS), jest mniejsza od rzeczy widzianej, na której jest linia TH. A to jest drugie założenie. Wynika więc w całości to, co zakładano.

52. Jeżeli płaszczyzna, [na której leży] linia prosta widziana, przecina prostopadłe płaszczyznę, na której jest oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego [i środek oka], a środek oka znajduje się na jednej i drugiej płaszczyźnie, to odbicie będzie zachodziło od obwodu koła (które jest wspólnym przecięciem wspomnianej płaszczyzny i powierzchni zwierciadła), a obraz linii prostej widzianej będzie zakrzywiony (Alh. VI.28).



[Rys. 29]

Niech linia TH będzie na płaszczyźnie, przecinającej prostopadłe płaszczyznę, na której znajdują się środek oka E i oś danego zwierciadła cylindrycznego, którą niech będzie linia DF. Punkt E wraz z linią TH niech się znajdują na tej samej płaszczyźnie [rys. 29]¹. Punkt E będzie więc na linii, wzdłuż której przecinają się te dwie płaszczyzny, co musi się dokonać zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła i EE XI,1. Twierdzę, że zajdzie odbicie do oka formy całej linii TH od obwodu koła (któ-

re jest wspólnym przecięciem płaszczyzny THE i powierzchni cylindra tego zwierciadła): tym obwodem będzie GB. Bo jeśli środek oka (który jest w [punkcie] E) będzie z tyłu linii TH², a ta linia będzie materialna i nieprzezroczysta, zaś jej gęstość zakryje zwierciadło przed okiem i nie będzie odbicia [do oka], chyba że przypadkiem tylko formy końców linii, a są to punkty T i H, ukażą się i odbiją się do oka od koła zwierciadła (a tym kołem jest [koło] BG), to obraz form tych końców będzie miał tendencje do zakrzywienia, jak [w przypadku] zwierciadeł kulistych wypukłych, co wynika z twierdzenia VI,56 tego dzieła. Jeśli natomiast w miejsce linii TH będzie ciało o wielkiej przezroczystości, np. [będzie to] kryształ, to o tym pomówimy w X księdze tego dzieła.

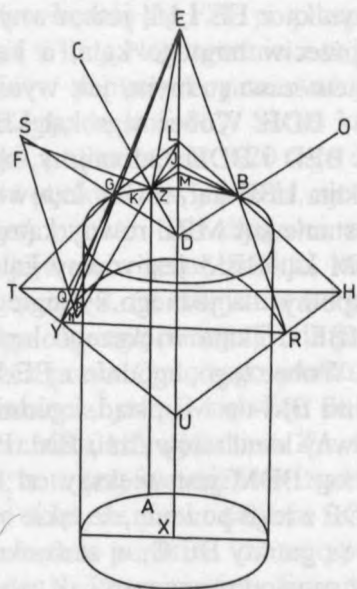
Jednak jeżeli oko – obojętne, czy linia TH będzie przezroczysta czy nie – znajdzie się pod tą linią, tzn. pomiędzy tą linią i zwierciadłem, to wtedy część linii TH będzie ukryta z powodu tego, że pomiędzy nimi znajduje się głowa, w której jest oko, zaś [forma tej części] linii TH, którą można zobaczyć, ponieważ nie stoi na przeszkodzie głowa, odbije się do oka od koła BG, dokładnie w ten sam sposób, jak przedstawiliśmy dla zwierciadeł kulistych wypukłych w odpowiednim miejscu³. Wobec tego obraz linii prostej TH, widzianej w taki sposób, jest zawsze zakrzywiony.

Skoro jednak środek oka E będzie poza punktami granicznymi linii TH na tej samej płaszczyźnie, jak poprzednio, to będzie zachodziło odbicie formy linii TH do oka. Cały obraz linii TH zobaczymy zakrzywiony, jak to wynika z wcześniejszych wywodów. A to jest przedmiotem twierdzenia.

53. Jeżeli płaszczyzna, na której leży linia prosta widziana, przecina prostopadle oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego, a środek oka nie znajduje się na tej samej płaszczyźnie, i zaszło odbicie do oka, które jest w tej samej odległości od obu końców tej linii, to obraz tej linii zobaczymy bardzo mocno zakrzywiony (Alh. VI,29).

Weźmy płaszczyznę, na której jest linia TH, przecinającą prostopadle płaszczyznę, na której znajdują się: środek oka E i oś zwierciadła cylindrycznego wypukłego, a powierzchnią zwierciadła niech będzie BKG [rys. 30]¹. Środek oka E nie leży na tej samej płaszczyźnie co linia TH, której końcowe punkty T i H, niech się znajdują, jak zakładamy, w równej odległości od oka E. Z twierdzenia 10 tej książki wynika, że wspólne przecięcia wszystkich płaszczyzn odbicia i powierzchni zwierciadła będą ostrokątne. Ponieważ, zgodnie z założeniem, forma punktu H odbija się do oka E od jakiegoś punktu danego zwierciadła, zatem przyjmijmy, że to odbicie zachodzi od punktu B, zgodnie z twierdzeniem 29 tej książki. Ponieważ punkt T jest w tej samej odległości od punktu E (który jest środkiem oka) co punkt H, jest oczywiste, że forma punktu T odbija się

do oka E od jakiegoś punktu zwierciadła: niech to będzie punkt G. Ponieważ punkty końcowe linii HT mają takie same położenie i taką samą odległość od środka oka, dlatego i punkty odbicia form tych punktów (a są to punkty B i G) mają taką samą odległość od punktu E, środka oka, i takie same względem niego położenie; wobec tego dwa punkty B i G będą na kole równoległym do podstaw zwierciadła. To koło leży zawsze pomiędzy linią TH i płaszczyzną, przechodzącą przez środek oka E i przecinającą zwierciadło równolegle do podstaw tego zwierciadła. Z tego powodu zdarza się, że punkty odbicia, którymi są B i G, są bliżej środka oka, do którego następuje odbicie, niż te punkty H i T, których formy się odbijają.



[Rys. 30]

Ważmy więc koło BZG, którego środkiem jest [punkt] D. Poprowadźmy linie padania, którymi są HB i TG, oraz linie odbicia, którymi są BE i GE. Przez środek koła D poprowadźmy prostopadłe do linii stycznych do koła BZG w punktach B i G, a niech to będą linie DGS² i DBO. Z twierdzenia 21 tej książki wynika, że części tych prostopadłych, a te części to GD i DB, są półśrednicami koła BZG. Poprowadźmy linię przez punkt D, środek koła, do środka oka, i niech to będzie linia ED. Przedłużmy linie padania, którymi są linie HB i TG, tak daleko, aż przetną się z linią ED. Ponieważ punkty H i T znajdują się w tym samym położeniu i odległości w stosunku do punktu E oraz do środka D, jest oczywiste, że linie HB i TG będą miały to samo położenie względem linii ED. Przetną

więc w tym samym punkcie linię ED^3 . Niech się przetną w punkcie L. Poprowadźmy linię długości cylindra zwierciadła, na której niech będzie punkt Z. Niech ta linia będzie na płaszczyźnie, na której znajduje się środek oka i oś zwierciadła; niech to będzie linia AZ. Poprowadźmy linie LZN i DZC. Ponieważ płaszczyzna, na której znajduje się środek oka i oś zwierciadła, przecina płaszczyznę, na której jest linia TH, niech punktem na linii TH, w którym zachodzi to przecięcie, będzie punkt Q. Przez punkt Q poprowadźmy linię, równoległą do linii DZC. Ta linia, jak wynika z twierdzenia I,2 tego dzieła, pada na oś zwierciadła z jednej strony i na linię LZN z drugiej strony. Niech więc pada w punkt N na linii LZN. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika, że kąt HBO (który jest kątem padania formy punktu H) jest równy kątowi OBE, który jest kątem odbicia⁴. Ale kąt HBO, jak wynika z EE I,15, jest równy kątowi LBD, ponieważ jest położony naprzeciw tamtego kąta, a kąt OBE, ponieważ w trójkącie EDB jest kątem zewnętrznym, jak wynika z EE I,32, jest równy dwom kątom BED i BDE. Wobec tego kąt LBD jest równy tym dwom kątom, tzn. kątowi BED i BDE. Odetnijmy, zgodnie z twierdzeniem I,27 tego dzieła, od kąta LBD kąt, równy kątowi BDE, który niech będzie kątem MBD. Pozostanie kąt MBL równy kątowi BED. A zatem, ponieważ w trójkącie EBM kąt BEM jest równy kątowi MBL trójkąta BML, a kąt BME jest wspólny dla jednego i drugiego trójkąta, to, jak wynika z EE I,32, kąt MBE trójkąta większego będzie równy kątowi MLB trójkąta mniejszego. Wobec tego, zgodnie z EE VI,4, stosunek linii EM do BM jest taki jak linii BM do ML, stąd, zgodnie z EE VI,17, iloczyn linii EM i ML jest równy kwadratowi linii BM. Poprowadźmy również linię MZ. Ponieważ kąt BDM jest większy od kąta ZDM (bo kąt SDE jest równy kątowi ODE z tego powodu, że takie samo jest położenie punktów odbicia, którymi są punkty B i G, w stosunku do środka oka E, a takie samo położenie jest spowodowane tym, jak to zostało wyjaśnione, że położenie punktów widzianych, którymi są punkty H i T, jest takie samo w stosunku do oka E, a kąt SDE jest większy od kąta ZDM, jak całość od swej części; stąd i kąt BDM jest większy od kąta ZDM), a dwa boki ZD i DM są równe dwom bokom BD i DM, gdyż boki DB i ZD rozciągają się od środka do obwodu, a bok DM jest wspólny, wobec tego, zgodnie z EE I,24, bok MB jest większy od boku MZ. Z tego powodu iloczyn linii EM i LM jest większy od kwadratu linii ZM. Wyznaczmy więc linię MI, mniejszą od linii ML tak, aby iloczyn linii ME i linii MI był równy kwadratowi linii MZ⁵. Poprowadźmy linie IB, IZ i EZ. Ponieważ trójkąty EZM i ZIM (dla których wspólnym kątem jest ZMI), zgodnie z EE VI,6, są równokątne, dlatego, jak wynika z EE VI,17, ich boki są proporcjonalne, gdyż tworzą one kąt wspólny. Kąt MZI będzie zatem równy kątowi ZEI. Stąd kąt MZL (który jest większy od kąta MZI) jest

wiekszy od kąta ZED. Ale skoro ustalono, że kąt MBD jest równy kątowi BDM, a linia MD będzie równa linii MB, zgodnie z EE I,6, zaś linia MB jest większa od linii MZ, jak wynika z wcześniejszych wywodów, to linia MD jest więc większa od linii MZ. Wobec tego, zgodnie z EE I,18, kąt MZD będzie większy od kąta MDZ. Kąt DZL jest zaś większy od dwóch kątów EDZ i ZED, bo kąt DZL zawiera kąt MZL, większy od kąta ZED, ponieważ kąt MZI, który jest częścią kąta MZL, jest równy kątowi ZED, jak to okazało się powyżej. Oprócz kąta MZL, również kąt DZL zawiera kąt DZM większy od kąta MDZ. Kąt NZC jest natomiast równy kątowi DZL, zgodnie z EE I,15, a kąt EZC, zgodnie z EE I,32, jest równy dwom kątom ZDE i ZED. Kąt NZC jest więc większy od kąta EZC. Odetnijmy zatem od kąta NZC, zgodnie z twierdzeniem I,27 tego dzieła, kąt równy kątowi EZC i niech to będzie kąt FZC po przeprowadzeniu linii ZF, która również przetnie się z linią NQ, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, i niech się przetnie w punkcie F, ponieważ przecina się w punkcie Z z linią CD, równoległą do linii NQ. Skoro kąt FZC jest równy kątowi EZC, to, jak wynika z twierdzenia V,20 tego dzieła, forma punktu F odbija się do oka E od punktu Z zwierciadła, ale forma punktu Q odbija się do oka od jakiegoś punktu linii długości zwierciadła, przechodzącej przez punkt Z. Odbija się więc od punktu, który jest poniżej punktu Z. Gdybyśmy jednak przyjęli, że odbija się od punktu, który jest powyżej punktu Z⁶, bliżej położonego punktu E niż jest punkt Z, to wtedy linia poprowadzona przez punkt Q do tego punktu odbicia przecięłaby linię FZ. Ten punkt przecięcia⁷ odbija się więc do oka E od dwóch punktów linii długości zwierciadła, którą jest linia ZA, tzn. od punktu Z i od innego danego punktu; a to jest niemożliwe, zgodnie z twierdzeniem 26 tej księgi. Przyjmijmy więc, że punkt odbicia formy punktu Q leży poniżej punktu Z; niech to będzie punkt K. Od tego punktu niech się odbije forma punktu Q do oka E. Poprowadźmy linię padania, którą niech będzie linia QK, i linię odbicia, którą niech będzie linia EK. Przedłużmy linię EK tak, aby przecięła się z linią NQ. Linia EK przetnie się z linią NQ, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, ponieważ przecina się z linią DC, równoległą do linii NQ. Ta bowiem linia jest na tej samej płaszczyźnie między punktami E i K. Linie EK i NQ przecinają się. Niech P będzie punktem przecięcia. Zgodnie z twierdzeniem V,37 tego dzieła, punkt P będzie więc miejscem obrazu formy punktu Q. [Forma] punktu H odbija się do oka E od punktu przecięcia ostrokątnego, ponieważ nie leży na tej samej płaszczyźnie co oko E. Jeśli zatem z punktu H poprowadzimy prostopadłą padania formy punktu H, którą będzie linia prostopadła do linii prostej, stycznej do przecięcia ostrokątnego⁸ w jakimś punkcie tego przecięcia, to jest oczywiste, że ta prostopadła przetnie się z prostopadłą OBD poza osią, zgodnie z twierdzeniem 44 tej księgi.

Niech się więc przetnie w jakimś punkcie. Podobnie z punktu T należy poprowadzić jedną prostopadłą padania, tzn. linię prostopadłą do przecięcia ostrokątnego i od punktu na tym przecięciu odbija się forma punktu T do oka E, a ta linia [prostopadła], jak w poprzednim przypadku, przetnie się z prostopadłą SGD poza osią. Ponieważ półśrednice BD i GD nie mogą być jedną linią, jak to wynika z twierdzenia IV,78 tego dzieła, jest oczywiste, zgodnie z twierdzeniem I,112 tego dzieła, że odbicie form punktów H i T zachodzi z założenia i zgodnie z twierdzeniem 23 tej księgi od dwóch punktów dwóch przecięć cylindrycznych, przecinających się (zgodnie z twierdzeniem 24 tej księgi, EE XI,1 i twierdzeniem I,19 tego dzieła) wzdłuż linii ED⁹ poprowadzonej poza zwierciadło. Ponieważ punkty H i T linii HT mają takie same położenie względem linii ED, dlatego że z założenia te punkty H i T mają takie same położenie względem oka E, zaś linia ED, która jest średnicą widzenia, leży na tej samej płaszczyźnie co oś zwierciadła i środek oka, punkty H i T mają więc to samo położenie względem linii ED, podobnie jak punkty przecięcia, przez które przechodzą prostopadłe padania, poprowadzone przez punkty H i T. To wszystko zachodzi dzięki temu, że położenie punktów H i T względem oka E i względem linii ED jest takie same. Jest więc oczywiste, że te dwie prostopadłe, poprowadzone przez punkty H i T do tych przecięć, z których każda – jak to wynika z wcześniejszych wywodów – przecina się z linią ED, przetną się z linią ED w tym samym punkcie; niech się przetną w punkcie U. Ponieważ linia EB po przedłużeniu przetnie się z linią HU, niech punktem przecięcia będzie R, a linia EG niech się przetnie z linią TU w punkcie Y. Poprowadźmy linię RY. Z twierdzenia V,37 tego dzieła wynika więc, że punkt R jest obrazem formy punktu H, a punkt Y jest obrazem formy punktu T. Mamy również trójkąt ERY i poza płaszczyzną tego trójkąta jest punkt Z. Płaszczyzna tego trójkąta jest więc wyżej położona aniżeli linia EP, jeżeli środek oka będzie wyżej aniżeli linia HT, i będzie niżej położona, jeżeli środek oka będzie niżej położony aniżeli linia HT. Punkt P jest więc zawsze poza tą płaszczyzną. Linia RPY jest zatem zawsze zakrzywiona, zgodnie z EE XI,1, lecz sama jest obrazem linii TH, jak to wynika z twierdzenia V,37 tego dzieła. Obraz linii HT, usytuowanej w przedstawiony sposób względem środka oka i zwierciadła cylindrycznego wypukłego, jest więc zawsze zakrzywiony o niezbyt umiarkowanej krzywiznie. A to jest przedmiotem twierdzenia.

54. Obraz linii prostej widzianej, nierównoległej do osi zwierciadła cylindrycznego wypukłego, leżącej na płaszczyźnie ukośnie przecinającej oś, zobaczymy zakrzywiony o różnym stopniu zakrzywienia w zależności od różnego położenia linii.

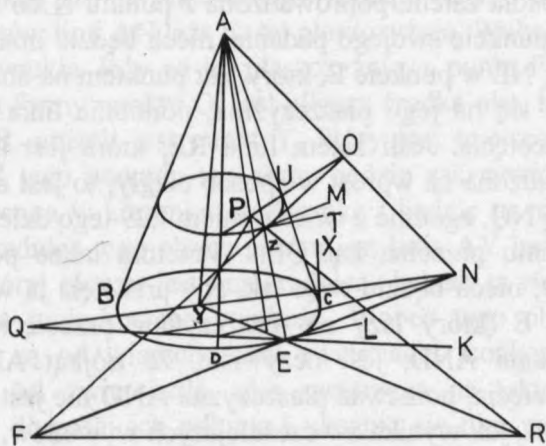
stożek zwierciadła wzdłuż koła, którym jest ZU. Poprowadźmy, zgodnie z EE I,11, przez punkt Z prostopadłą do linii długości ZA. Ta linia przedłużona do osi zwierciadła, którą jest linia AD, niech padnie w punkt H i przetnie się z osią, zgodnie z twierdzeniem I,96 albo I,14 tego dzieła, dlatego że kąt DAZ jest ostry. Przez punkt Z poprowadźmy, jak podano w EE III,17, linię styczną do koła ZU, którą niech będzie linia ZM, a przez punkt A poprowadźmy linię, tworzącą z dwiema liniami AZ i AH kąt ostry. Ta linia niech będzie poza płaszczyzną styczną do stożka wzdłuż linii AZ. A to jest możliwe, ponieważ kąt HAZ jest ostry. Weźmy więc linię AN; na płaszczyźnie, na której znajdują się linie AN i AH, poprowadźmy, zgodnie z EE I,23, przez punkt H linię tworzącą z linią AH kąt równy kątowi ZHA. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, przetnie się więc z linią AN, dlatego że, jak wynika z wcześniejszych wywodów, dwa kąty NAH i AHZ są ostre. Punktem przecięcia niech więc będzie punkt O. Linia HO przetnie obwód koła ZU. Z tego powodu, że kąt AHO jest równy kątowi AHZ, linie ZH i OH muszą leżeć na tej samej płaszczyźnie. Niech linia HO przecina obwód koła [ZU] w punkcie U. Poprowadźmy linię długości zwierciadła, którą jest AU. Przedłużmy linię prostopadłą HZ poza zwierciadło do punktu T i poprowadźmy linię OZ; przedłużmy ją na wprost w nieskończoność i niech to będzie linia OZF, a linię AZ przedłużmy do punktu E. Kąt FZH będzie, zgodnie z EE I,15, kątem ostrym, ponieważ linia OZ z linią TZ tworzy kąt ostry, a kąt AZT jest prosty. Skoro linia OZ przecina płaszczyznę styczną do zwierciadła wzdłuż linii AZ, do której prostopadłą jest linia HZ, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, to kąt OZA jest ostry, skoro kąt AZH jest kątem prostym. Z EE I,15 wynika zatem, że kąt EZF jest ostry. Poprowadźmy wobec tego, zgodnie z EE I,12, przez punkt F prostopadłą do linii AE. Poprowadźmy ją na wprost w nieskończoność, aż przetnie się z linią AO w punkcie N. Linia FE przetnie się z linią AO, zgodnie z twierdzeniem I,14 tego dzieła, ponieważ kąt EAO jest ostry, a kąt AEN jest prosty. Poprowadźmy przez punkt E linię ED, równoległą do linii ZH. Jak wynika z EE I,8, linia ED będzie więc prostopadłą do płaszczyzny stycznej do stożka wzdłuż linii AE, ponieważ linia ZH jest prostopadłą do tej samej płaszczyzny. Poprowadźmy przez punkt E linię EL, równoległą do linii ZM, i wyobraźmy sobie, że płaszczyzna, na której znajdują się linie EL i ED, przecina stożek. Wspólne przecięcie tej płaszczyzny i powierzchni stożkowej tego zwierciadła będzie przecięciem ostrokątnym, zgodnie z twierdzeniem I,103 tego dzieła, ponieważ ta płaszczyzna LED jest ukośna do osi AD. To przecięcie oznaczmy więc DEC. Linia MZ natomiast, która jest styczna do koła ZU, jest prostopadłą do linii AE, zgodnie z twierdzeniem I,22 tego dzieła, dlatego że, zgodnie z twierdzeniem I,89 tego dzieła, oś AH jest prostopadłą do

płaszczyzny tego koła³, a linia ZM, zgodnie z EE III,18, jest prostopadła do półśrednicy tego koła. Linia ZM jest więc prostopadła do płaszczyzny AZH, jak to wynikało z twierdzenia 41 tej księgi, ponieważ płaszczyzna koła i płaszczyzna AZH są wzajemnie prostopadłe. Wobec tego linia LE, równoległa do linii ZM, jest, zgodnie z EE XI,8, prostopadła do płaszczyzny ADE. Zatem kąt AEL jest prosty; a to wyraźniej wynika z EE I,29. Ponieważ kąt AZM jest prosty, to i kąt AEL będzie prosty i także kąt AEN jest prosty. Podobnie również kąt AED jest prosty, jak wynika z EE I,29, dlatego że kąt AZH jest prosty, a linia ED jest równoległa do linii ZH. Wobec tego, jak wynika z EE XI,5, linie NE, LE, DE leżą na tej samej płaszczyźnie przecięcia, a linia AE jest prostopadła do płaszczyzny tego przecięcia, ponieważ wszystkie te linie przecinając się z linią AE tworzą kąty równe i proste. A zatem linia FN leży na płaszczyźnie przecięcia. Przedłużmy linię DE na wprost w nieskończoność aż do punktu Q i przeprowadźmy przez punkt F linię, równoległą do linii DEQ, którą niech będzie linia FP. Ta linia, zgodnie z EE I,30, będzie więc równoległa do linii HZ. Poprowadźmy przez punkt Z na płaszczyźnie OZH linię prostą, tworzącą z linią ZT kąt równy kątowi OZT, który jest kątem ostrym na podstawie EE I,13, dlatego że, jak wykazano we wcześniejszych wywodach, kąt OZH jest rozwarty. Ta linia, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie się zatem z linią FP, ponieważ przetnie linię ZH, równoległą do linii FP, i leży ona na tej samej płaszczyźnie, gdyż linia ZF jest również na tej płaszczyźnie, a wszystkie linie równoległe leżą na tej samej płaszczyźnie, jak wynika z twierdzenia I,1 tego dzieła; niech się więc przetnie w punkcie P. Kąt PZT niech będzie równy kątowi OZT. Ponieważ kąt OZT jest równy kątowi ZFP, zgodnie z EE I,29, gdyż jest dla tamtego zewnętrzny, a kąt TZP jest równy kątowi, który jest do niego przeciwległy, którym jest kąt ZPF, to jest oczywiste, że kąt ZFP jest równy kątowi ZPF; stąd, zgodnie z EE I,6, linie ZF i ZP są równe. Ponieważ linia FEN leży na płaszczyźnie przecięcia, a linia FP jest równoległa do linii ED, która znajduje się na płaszczyźnie przecięcia, to, zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła i EE XI,7, linia FP leży na płaszczyźnie tego przecięcia. Poprowadźmy również linię PE; linia PE będzie zatem, zgodnie z EE XI,7, tak samo leżała na płaszczyźnie przecięcia. Ponieważ powyżej wykazano, że linia długości zwierciadła, którą jest linia EA, jest prostopadła do płaszczyzny przecięcia, zatem obydwa kąty AEP i AEF są proste, zgodnie z definicją linii prostopadłej do płaszczyzny. Wobec tego na podstawie EE I,47, kwadrat linii FZ ma wartość sumy kwadratów dwóch linii ZE i FE. Podobnie kwadrat linii ZP ma wartość sumy kwadratów dwóch linii ZE i EP, ale kwadrat linii ZF jest równy kwadratowi linii ZP, ponieważ jedna linia jest równa drugiej linii, co wynika z wcześniejszych wywodów. Kwadrat linii ZE jest zaś wspól-

ny dla obydwu linii⁴. Pozostaje więc kwadrat linii FE, równy kwadratowi linii EP. Linia FE będzie więc równa linii PE, a zatem, zgodnie z EE I,5, dwa kąty EPF i EFP są równe. Tymczasem kąt NEQ jest równy kątowi EFP, zgodnie z EE I,29, ponieważ jest względem niego zewnętrzny, a kąt QEP jest równy kątowi EFP, ponieważ jest względem niego przeciwny. Kąty NEQ i QEP są więc równe. Z twierdzenia V,20 tego dzieła wynika zatem, że forma punktu N odbija się do oka, znajdującego się w punkcie P, od punktu E zwierciadła, a forma punktu O odbija się do oka, znajdującego się w punkcie P, od punktu Z zwierciadła. Każda linia, poprowadzona przez punkt F do jakiegoś punktu na linii ON, przetnie linię ZE. Z wcześniej przeprowadzonych wywodów wynika również, że ta linia będzie równa linii, poprowadzonej przez punkt P do tego samego punktu, ponieważ linia AE jest prostopadła do płaszczyzny, na której znajdują się linie PE i FE, a jest to płaszczyzna przecięcia. Dwie linie FE i PE są równe. Zatem wszystkie linie, poprowadzone przez punkty F i P do jakiegoś jednego punktu na linii ZE, są równe, co można dowieść, jeżeli powtórzymy sposób dowodzenia, którym posłużyliśmy się wcześniej. Wynika więc, że forma każdego punktu, który jest na linii ON, odbija się do oka, znajdującego się w punkcie P od tego punktu zwierciadła, w którym [linia padania] przecina się z linią ZE⁵. Również każda linia, poprowadzona z wierzchołka stożka, który jest w punkcie A, padając ukośnie na oś stożka zwierciadła, którą jest linia AD, w taki sposób, że z osią AD oraz z linią długości, którą jest linia AZ, bądź z inną dowolną linią długości, tworzy kąty ostre, a w sposób wcześniej podany można dowieść, że jakaś część tej linii odbija się wtedy do oka, ustawionego względem tej rzeczy widzialnej podobnie jak teraz został umieszczony punkt P względem linii ON, to jest także oczywiste, że w tym układzie formy punktów całej linii AON będą się odbijały do oka, znajdującego się w punkcie P. Jeżeli punkt F zostanie umieszczony wyżej, w większej odległości od punktu Z, powiększy się wielkość linii AON stosownie do tej odległości. Problem podobny do tego został dowiedziony w twierdzeniu 41 tej książki. W tym tutaj twierdzeniu natomiast przedstawiliśmy to właśnie zagadnienie, aby zainteresowany badacz łatwiej zrozumiał wywód, który nastąpi.

Po rozmieszczeniu wszystkiego we właściwy sposób poprowadźmy linię ND [rys. 32]⁶. Linia ND przetnie obwód przecięcia, albowiem dwa punkty D i N są na tej samej płaszczyźnie przecięcia, a punkt N jest poza obwodem przecięcia, zaś D wewnątrz obwodu tego przecięcia. Linia ND niech więc przetnie obwód przecięcia w punkcie C. Ponieważ, zgodnie z EE XI,2, cały trójkąt AHO leży na jednej płaszczyźnie, to, zgodnie z EE XI,1, jest oczywiste, że linia ND będzie na płaszczyźnie trójkąta AOH, bowiem punkty D i N znajdują się na liniach AO i AH: wobec

tego również linia ND wraz z tymi liniami leży na tej samej płaszczyźnie. Na płaszczyźnie trójkąta będzie więc punkt C. Także dwa punkty A i U są na płaszczyźnie tego trójkąta AOH, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, ponieważ linia HO przecina obwód koła ZU w punkcie U; tak bowiem oznaczyliśmy ten punkt. Wobec tego trzy punkty, a są to punkty: A, U oraz C, znajdują się na płaszczyźnie tego trójkąta AOH, ale wszystkie punkty A, B i C znajdują się na powierzchni zwierciadła, a zatem trzy punkty A, U i C są na linii wspólnej dla powierzchni zwierciadła i płaszczyzny AND. A tą linią wspólną jest, zgodnie z twierdzeniem I,90 tego dzieła, linia prosta. To przecięcie niech się dokona wzdłuż osi zwierciadła. Stąd punkty A, U i C leżą na tej prostej. Przedłużmy zatem bezpośrednio do punktu C linię AU. Przedłużmy linię RZ poza punkt Z tak, aby przecięła linię OH; [a przetnie ją], zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, dlatego że linie RZ i HO są na tej samej płaszczyźnie, a linia RZ, która dzieli kąt FZT, dzieli również kąt położony naprzeciw niego, a jest to kąt HZO; wobec tego będzie musiała przeciąć również podstawę, znajdującą się pod nim, a podstawą jest [linia] HO⁷. Ta linia [RZ] niech więc przetnie podstawę w punkcie P. A zatem punkt P znajduje się na płaszczyźnie trójkąta AOH.



[Rys. 32]

Poprowadźmy również linię AP i przedłużmy ją poza punkt P. Zgodnie z twierdzeniem I,2 tego dzieła, przetnie ona linię DN, ponieważ przecina kąt DAN; niech ją⁸ przetnie w punkcie G. Skoro punkt F nie znajduje się na płaszczyźnie stycznej do stożka zwierciadła, przechodzącej przez linię AZE, ale pada na nią ukośnie⁹, jak to wynika z wcześniejszych wywodów, dlatego że znajduje się na płaszczyźnie przecięcia, i skoro płaszczyzna przecięcia nie jest prostopadła do powierzchni ADE, zgodnie z twierdzeniem I,103 tego dzieła, to z EE XI,4 wynika, że kąt

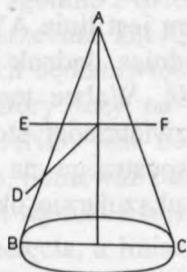
FED będzie musiał być ostry, ponieważ kąt AEF jest prosty. Kąt DEN, zgodnie z EE I,13, jest zatem rozwarty, a kąt EDN jest ostry, zgodnie z EE I,32. Wobec tego leży on w trójkącie rozwartym, którym jest trójkąt DEN. Niech linia CX będzie styczna do przecięcia w punkcie C. A więc, zgodnie z tym, co zostało powiedziane w dowodzie twierdzenia V,46 tego dzieła, i na podstawie tego, że kąt DCX jest rozwarty, jest oczywiście, że prostopadła, poprowadzona z punktu C do linii CX stycznej do przecięcia, przecina kąt DCX, i że przetnie się ona z linią ED pod punktem D. Ta więc prostopadła niech przetnie linię ED, poprowadzoną poza punkt D, w punkcie S. Prostopadła zaś, poprowadzona z punktu N do linii stycznej do przecięcia, przetnie linię ED poza punktem S, [w punkcie], który jest bardziej oddalony od punktu D niż jest punkt S, obojętnie czy te prostopadłe przetną się z linią ED poza obwodem przecięcia, czy wewnątrz niego. Prostopadła bowiem, poprowadzona z punktu N do linii stycznej do przecięcia, nie przetnie kąta DCX, ale przetnie ten kąt prostopadła poprowadzona przez punkt C. Jak wynika z twierdzenia 46 tej księgi i twierdzenia I,113 tego dzieła, ta prostopadła będzie bardziej oddalona od linii NE niż linia ND. Dlatego ta linia prostopadłe przecina oś zwierciadła, którą jest linia AD, w punkcie wyżej położonym niż jest punkt D. Prostopadła zatem, poprowadzona z punktu N do linii stycznej do przecięcia w punkcie swojego padania, niech będzie linią NQ, a linia RE przecina linię NE w punkcie E, który jest punktem na obwodzie przecięcia i znajduje się na jego płaszczyźnie; podobnie linia NQ leży na płaszczyźnie przecięcia. Jeśli zatem linia RE, która jest linią odbicia, zostanie poprowadzona na wprost w sposób ciągły, to jest oczywiste, że przetnie ona linię NQ, zgodnie z twierdzeniem I,29 tego dzieła, ponieważ po jej przedłużeniu przecina kąt QEN. Przetnie także podstawę QN w trójkącie NEQ; niech będzie więc tak, aby przecięła ją w punkcie Y. Ponieważ punkt E (który leży na płaszczyźnie przecięcia) jest poza płaszczyzną trójkąta AND, jest oczywiste, że trójkąt AND przetnie płaszczyznę przecięcia, ponieważ płaszczyzna AND nie jest płaszczyzną przecięcia, chociaż, jak wynika z wcześniejszych wywodów, punkt A jest poza płaszczyzną przecięcia, a linia AE jest prostopadła do płaszczyzny przecięcia, zaś punkt E znajduje się na obwodzie tego przecięcia. Linia NCD jest zaś wspólna dla obydwu tych płaszczyzn, tzn. płaszczyzny trójkąta AND i płaszczyzny przecięcia. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem I,19 tego dzieła, linia NCD jest wspólnym przecięciem tych płaszczyzn, tzn. płaszczyzny trójkąta AND i płaszczyzny przecięcia. Linia NQ przecina się z samym przecięciem poza punktem C, jak wykazano powyżej. Linia NQ znajduje się więc poza płaszczyzną trójkąta AND, ale linia APG jest na płaszczyźnie tego trójkąta AND. Punkt Y (który, zgodnie z twierdzeniem V,37 tego dzieła, jest miejscem obrazu formy punktu N,

choć sam jest wspólnym przecięciem linii odbicia, którą jest linia RE, oraz prostopadłej padania formy punktu N, którą jest linia NQ), będzie zatem leżał poza linią APG. Jeżeli oko znajduje się w punkcie R, a forma dowolnej rzeczy widzianej została odbita do środka oka w punkcie R od linii długości zwierciadła, którą jest linia ZE, jak to wykazano we wcześniejszych wywodach (ponieważ forma punktu O odbija się do oka, znajdującego się w punkcie R, od punktu Z zwierciadła, a forma punktu N od punktu E zwierciadła), to, zgodnie z twierdzeniem V,37 tego dzieła, punkt P będzie miejscem obrazu formy punktu, skoro sam punkt P jest wspólnym przecięciem linii odbicia, którą jest linia ZR, oraz prostopadłej padania formy punktu O, którą jest linia OL, a punkt Y jest miejscem obrazu formy punktu N. Formę punktu A zobaczymy natomiast na właściwym jej miejscu, ponieważ znajduje się na wierzchołku stożka, i obrazem linii AON będzie linia, przechodząca przez punkty A, P, Y. Ale ta linia jest wypukła, ponieważ punkt Y znajduje się ponad linią APG. A zatem obraz linii jest zakrzywiony, a jest to linia APY. Ale już się okazało, że formy wszystkich punktów linii AN odbijają się do oka, znajdującego się w punkcie R, od linii długości zwierciadła, którą jest linia AE. Wszystkie linie odbić zatem, wzdłuż których odbijają się te formy, znajdują się na płaszczyźnie trójkąta RAE, dlatego wszystkie obrazy punktów linii AN leżą na tej płaszczyźnie. Wobec tego linia APY, która jest wypukła, leży na tej płaszczyźnie, a punkt P, który jest miejscem obrazu formy punktu O, jest bliższy środkowi oka, który znajduje się w punkcie R, aniżeli jest punkt Y, który jest miejscem obrazu formy punktu N. Z tego powodu ten obraz będzie zakrzywiony, a krzywizna będzie zwrócona w kierunku środka oka i będzie to niewielkie zakrzywienie. A średnica tego obrazu, którą jest linia AY będzie mniejsza niż linia AN, której obrazu jest ona średnicą. Jednak ta różnica w długości będzie miała umiarkowaną wielkość. Wobec tego obrazy linii, które prowadzone są od wierzchołków zwierciadeł stożkowych wypukłych ukośnie do osi zwierciadła, oko spostrzega na takich zwierciadłach wzdłuż linii długości ich odbicia i ukazują się oku wypukłe. A to jest przedmiotem twierdzenia.

56. Forma każdej linii prostej równoległej do długości zwierciadła stożkowego¹ wypukłego, jeżeli oko znajduje się poza jej płaszczyzną [na której leży ta linia], przecinającą zwierciadło równolegle do podstawy, odbija się do oka wzdłuż przecięć ostrokątnych, a jej obraz widzimy zakrzywiony, mający bardzo dużą krzywiznę, która zwrócona jest w kierunku oka (Alh. VI,33).

Weźmy zwierciadło stożkowe wypukłe. Jego wierzchołek niech będzie w punkcie A [rys. 33]². Średnicą podstawy jest BC. Jego długością

jest więc trójkąt ABC. Niech D będzie środkiem oka. Linia prostą widzianą niech będzie linia EF, która jest równoległa do płaszczyzny trójkąta ABC. Niech zwierciadło zostanie przecięte płaszczyzną, na której leży linia EF, równoległe do podstawy, i niech środek oka D znajduje się poza tą płaszczyzną. Twierdzą, że forma linii EF odbija się do oka D wzdłuż przecięć ostrokątnych, które przecinają powierzchnię zwierciadła. Bo ta forma nie może się odbić wzdłuż linii długości zwierciadła, ponieważ wtedy linia ta musiałaby się przeciąć z osią zwierciadła po stronie wierzchołka, zgodnie z twierdzeniem 41 tej książki, gdyż padałaby na tę oś ukośnie, podczas gdy założenie [tego twierdzenia] jest temu przeciwne³. Od powierzchni tych zwierciadeł, zgodnie z twierdzeniem 12 tej książki, nie będzie zatem zachodziło odbicie wzdłuż koła. Konieczne jest więc, aby odbicie [form] tych linii, skoro zachodzi do oka, zachodziło wzdłuż przecięć ostrokątnych. Ponieważ prostopadłe padania, które są liniami prostopadłymi do tych ostrokątnych przecięć (gdyż są prostopadłe do linii stycznych do przecięć), nie przecinają się z liniami odbić na jednej linii, równoległej do linii widzianej, ale na różnych liniach, to z tego powodu obrazy linii tak rozmieszczonych względem powierzchni tych zwierciadeł widzimy zakrzywione, jak to zostało dowiedzione w twierdzeniu 53 tej książki dla zwierciadeł cylindrycznych. Obrazy tych linii są bowiem tak bardzo zakrzywione, że ich krzywizna jest widoczna dla oka, a środek tych obrazów jest poza powierzchniami, na których dokonuje się zakrzywienie form tych linii. Średnice obrazów⁴ tych linii są o wiele mniejsze od samych tych linii. A to zdarza się z powodu wielkości ich zakrzywienia. Wynika więc to, co zakładano.



[Rys. 33]

57. Jeżeli [formy] linii prostych nie padają na powierzchnie zwierciadeł stożkowych wypukłych w miejscu przecięcia osi ze stożkiem ani równoległe do długości zwierciadła¹, ale ukośnie względem tych [położeń], to ich obrazy są zakrzywione i mają różny stopień zakrzywienia, zależny od tego, na ile te linie proste zbliżają się do skrajnych położeń (Alh. VI,34).

To, co tutaj zakładamy, można wyjaśnić w sposób dość oczywisty. Linie proste bowiem, których rzuty na te zwierciadła ani nie leżą wzdłuż linii długości, jak to jest w twierdzeniu 41 i 55 tej księgi, ani nie są równoległe do długości zwierciadła, jak w poprzednim twierdzeniu, mają [obrazy] o umiarkowanej wielkości zakrzywienia w zależności od tego, czy [linie te] bardziej w swoim położeniu zbliżają się do jednego bądź drugiego położenia². Z tego powodu te linie, które swoim położeniem bardziej zbliżają się do linii [znajdujących się na] długości zwierciadła, mają [obrazy] form mniej zakrzywione, natomiast te linie, które bardziej się zbliżają do linii równoległych do długości zwierciadeł, mają [obrazy] form bardzo wyraźnie wypukłe, ale jednak w sposób pokręcony, ponieważ te linie, które bardziej zbliżają się do wierzchołka zwierciadła, mają [obrazy] form bardziej ściśnięte i bardziej wypukłe, natomiast te, które bardziej się zbliżają do podstawy zwierciadła, mają bardziej rozciągnięte [obrazy] form, jednak u wszystkich te obrazy mają wyraźną krzywiznę. Wynika więc to, co zakładano.

58. Na zwierciadłach stożkowych wypukłych [obraz] każdej formy rzeczy widzianej widzimy jako stożkowaty, podobny do kształtu stożka zwierciadła (Alh. VI,35).

To, co tutaj zakładamy, wynika z twierdzenia VI,40 tego dzieła, ponieważ tam wykazaliśmy dla zwierciadeł kulistych wypukłych, że, o ile mniejsze było zwierciadło, o tyle mniejsze będą koła leżące na powierzchni zwierciadła. W ten sposób również obrazy będą bliżej środka i z tego powodu będą mniejsze. Podobnie jest także, gdy przecięcia znajdują się na jakimś zwierciadle stożkowym: te z nich, które są bliżej wierzchołka, są mniejsze i bardziej ściśnięte. W ten sposób miejsce obrazu będzie bliżej punktu, w którym z osią zwierciadła przecinają się prostopadłe, poprowadzone do płaszczyzn stycznych do tych zwierciadeł w punktach odbicia na przecięciach ostrokątnych, od których to punktów przecięć odbijają się [formy] do oka. Te obrazy będą więc mniejsze. Przecięcia ostrokątne natomiast, które są bliżej podstawy, mają własności przeciwne do tych wyżej położonych, ponieważ one są szersze, jak to wynika z twierdzenia I,116 tego dzieła. Dlatego miejsca obrazów są bardziej oddalone od punktu, w którym przecinają się wyżej wspomniane prostopadłe, poprowadzone do płaszczyzn stycznych do tych zwierciadeł w punktach odbić. Skutkiem tego obrazy stają się większe. Z tego powodu zdarza się, że obrazy form widzianych na zwierciadłach stożkowych wypukłych stają się stożkowate, [przybierając kształty] podobne do stożków zwierciadeł. Bowiem ta część formy, która odbija się¹ bliżej wierzchołka zwierciadła, będzie bardziej ściśnięta, a która odbija się bliżej podstawy, będzie szersza. W ogóle [obraz] formy rzeczy widzianej, który

postrzegamy przez odbicie zachodzące od jakiegoś ze zwierciadeł, upodabnia się do [kształtu] powierzchni zwierciadła, od którego ta forma się odbija, jak to wynika z twierdzenia V,38 tego dzieła. Pozostałe natomiast wszystkie zniekształcone obrazy, które ukazują się oczom na zwierciadłach cylindrycznych wypukłych, ukazują się także na tych zwierciadłach stożkowych wypukłych i dlatego nie ma tutaj potrzeby zajęcia się tego rodzaju zjawiskami. I odwrotnie, jak zniekształcone obrazy pojawiają się na tych zwierciadłach stożkowych, tak również one pojawiają się na zwierciadłach cylindrycznych, z wyjątkiem obrazów, przybierających kształt stożka, ponieważ przecięcia ostrokątne zwierciadeł cylindrycznych, które [przecinają] oś cylindra i mają takie samo nachylenie, wszystkie są takie same, a każda część takiego przecięcia, zwrócona w kierunku wierzchołka zwierciadła, jest podobna do części równej sobie w tym samym położeniu, zwróconej w kierunku podstawy zwierciadła, co nie zachodzi w przypadku przecięć ostrokątnych stożków. Wszystkie te przecięcia stożków, jak wykazano w twierdzeniu I,116 tego dzieła, rozszerzają się bowiem w stronę podstawy stożków, dzięki czemu koła, przecinające stożki równolegle do ich podstaw, są większe², podczas gdy wszystkie koła w cylindrach są równe. Wynika więc to, co zakładano.

59. Na zwierciadłach wypukłych cylindrycznych lub stożkowych większych widoczne są większe wizerunki, a obraz rzeczy widzianej, położonej bliżej, jest widoczny jako większy (Alh. VI,36).

Opisane tutaj zjawiska i wiele innych zjawisk są takie same na zwierciadłach wypukłych cylindrycznych i stożkowych oraz kulistych. Z tego też powodu dla tych tutaj zjawisk, jak i dla innych, które są takie same, jest ten sam sposób dowodzenia. Jeśli jednak na omawianych powyżej zwierciadłach wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła będzie przecięcie ostrokątne, które nie zachodzi na zwierciadłach kulistych, ponieważ na nich [przecięciami] są tylko koła, to tutaj trzeba będzie dowodzić dla tych przecięć, jak tam dla kół. To twierdzenie będzie oczywiste dla umysłu dociekliwego.

60. Jest możliwe, że zwierciadło wypukłe cylindryczne lub stożkowe w taki sposób jest umieszczone, że obserwujący zobaczy w zwierciadle obraz rzeczy niewidocznej bezpośrednio, znajdującej się w przestrzeni¹ poza zwierciadłem.

Weźmy zwierciadło cylindryczne wypukłe. Jego linią długości niech będzie ABC [rys. 34]². Poprowadźmy ją do podstawy cylindra ustawionego w jakimś miejscu, [np.] w domu odpowiednio szerokim w taki sposób, aby linia AC, dla której punktem środkowym jest B, była prostopa-

między zwierciadłem i linią GFH, tj. w pobliżu punktu D linii DE, stycznej do zwierciadła w punkcie B, jak to wynika z twierdzenia 49 tej książki. Jeśli linie OG i OH przedłużymy poza mur do punktów P i Q i połączymy je jedną linią, która niech będzie linią PKQ, na której poza murem umieścimy jakąś pomalowaną tablicę w taki sposób, aby środek formy linii, wymalowanej na tej tablicy znalazł się na linii PKQ i tak został usytuowany, żeby forma wymalowana na tablicy nie mogła być widoczna okiem, znajdującym się w punkcie N albo poniżej tego punktu, to przy takim umieszczeniu oka zobaczymy jednak obraz tej formy w przestrzeni odbity od powierzchni cylindrycznej zwierciadła. W podobny również sposób pilny obserwator może umieścić zwierciadło stożkowe wypukłe i środek oka, zgodnie z twierdzeniem 41 i 49 tej książki. Od zwierciadeł kulistych wypukłych natomiast tak regularne odbicie nie będzie zachodziło, jak to jest w przypadku omawianych zwierciadeł. Wynika więc to, co zakładano.

Gośliwy badacz niech dalej zajmuje się tym zagadnieniem zgodnie z podaną metodą, ponieważ to, co tutaj w tym twierdzeniu przedstawiliśmy, zrobiliśmy to dla przykładu, aby rozszerzając twierdzenie 7 tej książki pilnej duszy otworzyć drogę poszukiwania w zakresie innej umiejętności.

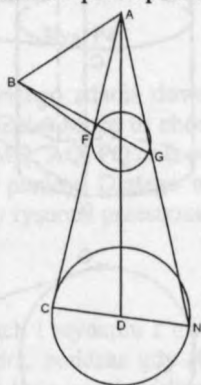
2. KOMENTARZ

¹ Termin „przecięcie ostrokątne” związany jest z przecięciem powierzchni bocznej (pobocznic) stożka płaszczyzną. Zagadnienie to analizuje Witelo w twierdzeniu I,98. Jeżeli pobocznice stożka przetniemy płaszczyzną równoległą do tworzącej (linii długości wg terminologii Witelona) stożka, to otrzymamy parabolę, a takie przecięcie nazywa autor równokątnym (*rectangula*). Jeśli zaś płaszczyzna sieczna jest równoległa do osi stożka, to w wyniku cięcia otrzymamy hiperbolę; to przecięcie Witelo nazywa przecięciem hiperbolicznym lub rozwartokątnym (*ambligonia*). W przypadku gdy płaszczyzna sieczna przecina całą pobocznice stożka i nie jest równoległa do podstawy, to otrzymamy krzywą zamkniętą, i jest nią elipsa. Takie przecięcie nazywa Witelo przecięciem ostrokątnym (*oxygonia*) lub zmniejszonym (*mukefi*). W przypadku gdy dokonujemy cięcia cylindra płaszczyzną, która nie jest równoległa do podstaw i osi, a przecina całą jego pobocznice, otrzymujemy jako wynik cięcia elipsę, czyli otrzymujemy krzywą przecięcia ostrokątnego.

Definicje

¹ Patrz: księga VI, definicje przypis 2 oraz rysunek P1 do tego przypisu.

² Tzn. prostopadła padania lub prostopadła odbicia.



Rys. P1

Twierdzenie 1

¹ W oryg.: *linea visualis*. Z kontekstu trudno jest się zorientować, co ten termin w tym twierdzeniu oznacza. Z rozważań przeprowadzonych w twierdzeniu II,3 możemy

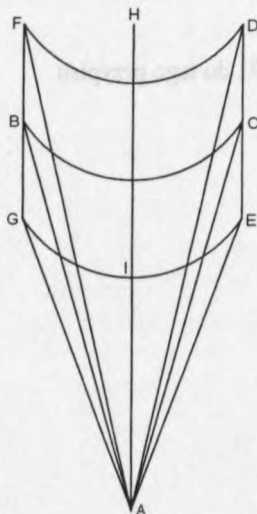
wnioskować, że chodzi tu o promień świetlny. We wspomnianym twierdzeniu z księgi II Witelo używa wyrażenia bardziej ogólnego *linea sensibilis*, wyjaśniając, że jest to linia dostrzegalna wzrokiem, po której dochodzi światło.

² Rysunek w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I różni się od rysunku Risnera tym, że zamiast owali w rękopisach są koła. Dla porównania zamieszczamy rysunek z wydania I oznaczony jako rys. P1.

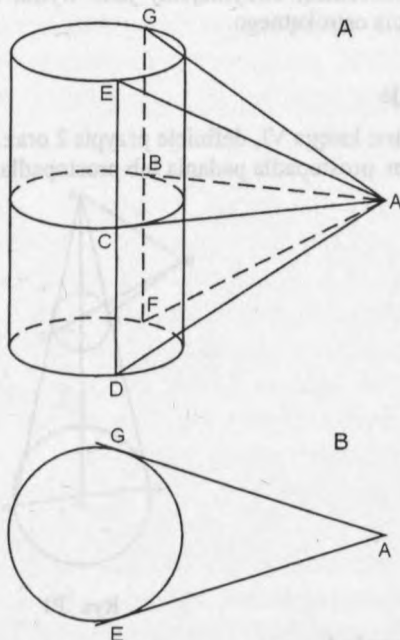
Twierdzenie 2

¹ Twierdzenie sformułowane zbyt lapidarnie. W sposób jeszcze mniej zrozumiały sformułuje je Alhazen (IV,26). Naszym zdaniem, twierdzenie to powinno mieć następującą postać: Istnieją takie dwie płaszczyzny odbicia, które muszą być styczne do zwierciadła, jeżeli poprowadzimy je od środka oka do linii ograniczających widzianą przez oko powierzchnię zwierciadeł wypukłych, cylindrycznych i stożkowych. Odeślanie do Alhazena jest błędne, ponieważ w twierdzeniu IV,26 mowa jest o obrazie.

² Rysunek w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I dokładniej przedstawia założenia tego twierdzenia. Ukazuje bowiem tę część cylindra, która jest naprawdę widoczna, podczas gdy Risner przedstawia niepotrzebnie cały cylinder, ale jest to przyjęty przez niego schemat, który jest próbą przestrzennego przedstawienia sytuacji omawianej w twierdzeniu. Dla zobrazowania różnicy między rysunkami podajemy rysunek z rękopisu A i oznaczamy go jako rys. P2. W celu ułatwienia zrozumienia wywodów Witelona zamieszczamy współczesny rysunek przestrzenny (rys. P3). Na rys. P3A przedstawiono sytuację omawianą w dowodzie twierdzenia. Rys. P3A jest rysunkiem przestrzennym, zaś rys. P3B przedstawia widok z góry. Na rys. P3B wyraźnie widać punkty styczności, o których jest mowa w twierdzeniu.



Rys. P2



Rys. P3

Komentarz:

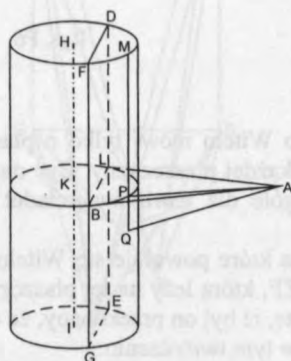
Twierdzenie to wynika z twierdzenia 1. Jego zamieszczenie nie było konieczne.

Twierdzenie 3

¹ Tego rysunku nie ma ani w rękopisach A, C, H, Q, S, ani w wydaniu I, co świadczyłoby, że pochodzi od Risnera. Z tego powodu rysunek ten oznaczyliśmy jako 2a, ponieważ w tej księdze, podobnie jako to robiliśmy w poprzedniej, rysunki, które, w naszym przekonaniu, pochodzą od Risnera, otrzymują małą literę dodaną do numeru. Witelo nie zamieścił rysunku w tym twierdzeniu, ponieważ wystarczający jest rysunek przy twierdzeniu 2. Risner zauważył jednak, że oznaczenia literowe podane w dowodach twierdzeń 2 i 3 różnią się nieznacznie między sobą, np. koło oznaczone w twierdzeniu 2 jako BC w dowodzie twierdzenia 3 zostało oznaczone przez Witelona jako BL. Z tego zapewne powodu zamieścił dodatkowy rysunek, uwzględniający zmienione oznaczenia literowe.

² Tzn. do płaszczyzny odbicia.

Twierdzenie 4

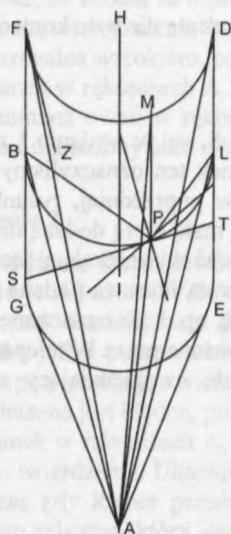


Rys. P4

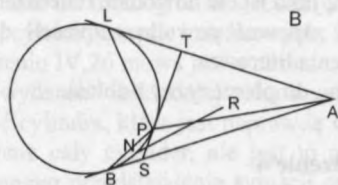
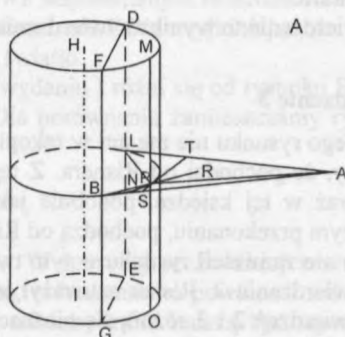
¹ Jak wynika z pierwszego zdania dowodu, Witelo odsyła czytelnika do rysunku z wcześniejszego twierdzenia. Może tu chodzić jedynie o rysunek z twierdzenia 2, na którym brak jednak linii MQ, AQ, PQ oraz punktu P. Risner na swoim rysunku (rys. 2a) uwzględnił wszystkie te punkty. Dlatego też jego rysunek jest przydatny i do tego twierdzenia. Współczesny rysunek przestrzenny zamieściliśmy jako rys. P4.

Twierdzenie 5

¹ Rysunki w rękopisach i wydaniu I uwzględniają fakt, że obserwator widzi tylko część powierzchni cylindra, podczas gdy Risner na swoim rysunku przedstawia cały cylinder i kreśli niektóre linie na niewidocznej jego części. Dla zobrazowania różnic między rysunkami zamieszczamy rysunek z rękopisu H jako rys. P5. Żaden jednak z wymienionych rysunków nie jest rysunkiem przestrzennym. Z tego powodu dodajemy współczesny rysunek przestrzenny (rys. P6). Rys. P6A przedstawia zwierciadło cylindryczne i oko (punkt A) oraz wszystkie linie, o których mowa w twierdzeniu. W celu łatwiejszego zrozumienia wywodów autora poniżej, na rys. P6B przedstawiono przekrój w płaszczyźnie ABL.



Rys. P5



Rys. P6

Twierdzenie 6

¹ Trudno powiedzieć, dlaczego Witelo mówi tylko o płaszczyźnie odbicia, skoro twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej płaszczyzny. Być może, że chciał on podkreślić wagę tego zagadnienia w ogóle dla teorii zwierciadeł wypukłych stożkowych i cylindrycznych.

² Na rys. 3 w twierdzeniu 5, na które powołuje się Witelo, nie mamy zaznaczonej płaszczyzny GAF, a jedynie linię ZF, która leży na tej płaszczyźnie. Zapewne dla Witelona twierdzenie jest tak oczywiste, iż był on przekonany, że czytelnik łatwo wyobraz sobie sytuację, o której jest mowa w tym twierdzeniu.

Twierdzenie 7

¹ Takiego rysunku nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S ani wydaniu I, co wskazywałoby, że pochodzi on od Risnera. Przy tym twierdzeniu w rękopisie S jest natomiast rysunek, który u Risnera znalazł się przy twierdzeniu 9, a w rękopisie H znajduje się przy twierdzeniach 8 i 9. Risner zrobił zapewne ten rysunek, aby ułatwić czytelnikowi śledzenie wywodów, i sporządził go jako wyciąg rysunku 4. Trzeba dodać, że rys. 4 w twierdzeniu 9 wystarczająco ilustruje dowód niniejszego twierdzenia.

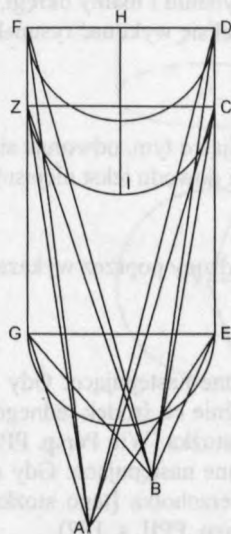
Twierdzenie 8

¹ Rysunek ten nie występuje w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Można więc przyjąć, że pochodzi on od Risnera i mamy tu sytuację taką samą, o której pisaliśmy w przypisie 1 do twierdzenia 7. Należy dodać, że rysunek przy twierdzeniu 7 w rękopisie S jest ważny także dla tego twierdzenia.

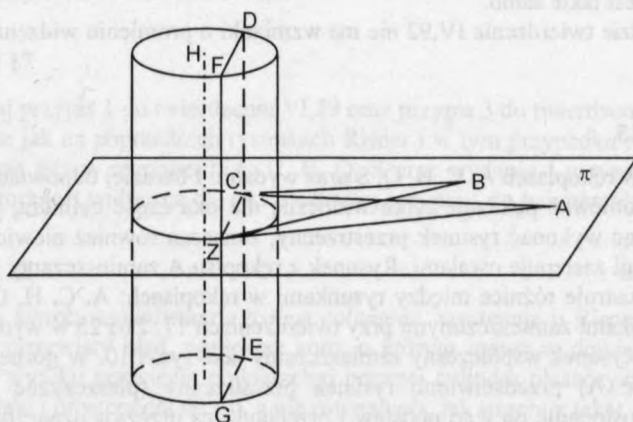
² Tzn. płaszczyzny.

Twierdzenie 9

¹ Podobnie jak to było w twierdzeniu 5 i 7, również w tym twierdzeniu rysunek Risnera różni się od rysunków zamieszczonych w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I, które przedstawiają tylko widoczną część cylindra, gdy tymczasem Risner przedstawia cały cylinder. Dla zilustrowania różnicy między rysunkami zamieszczamy rysunek z rękopisu A jako rys. P7. Dla ułatwienia śledzenia wywodów Witelona dodajemy współczesny rysunek przestrzenny oznaczony jako rys. P8. Na rysunku tym płaszczyznę przecinającą zwierciadło równoległą do podstaw cylindra, na której znajdują się punkty A i B, oznaczono literą π . Rysunek P7 w rękopisach i wydaniu I służy do ilustracji dowodów twierdzeń 7, 8 i 9.



Rys. P7



Rys. P8

Twierdzenie 10

¹ O przecięciu ostrokątnym patrz *Wstęp*, przypis 1.

² Tego rysunku nie ma w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. W zasadzie jest on zbyteczny, gdyż wystarczający jest rys. 4 z poprzedniego twierdzenia. Porównaj przypis 1 do twierdzenia 7, przypis 1 do twierdzenia 8 i przypis 1 do twierdzenia 9.

³ Referencja do twierdzenia 7 tej książki nie ma żadnego uzasadnienia. Nie wiadomo, czego chciał dowieść Witelo, odsyłając czytelnika do tego twierdzenia. Z tego powodu i sam wywód staje się niejasny.

Twierdzenie 12

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I mamy okręgi. Risner zamieszczając na tym rysunku owale prawdopodobnie starał się wykonać rysunek przestrzenny.

Twierdzenie 13

¹ W tym miejscu autor, nie wspominając o tym, odwołuje się do rysunku 5.

² Od słów: „Nigdy zatem...” do końca dowodu tekst niejasny.

Komentarz

Dowód twierdzenia został przeprowadzony poprzez wykazanie sprzeczności.

Twierdzenie 14

¹ Twierdzenie IV,84 jest sformułowane następująco: Gdy podstawa stożka obrotowego znajduje się na tej samej płaszczyźnie co środek jednego oka, to wtedy widzi się mniej niż połowę powierzchni wypukłej stożka (Wit. Persp. PPII, s. 173)

² Twierdzenie IV,92 jest sformułowane następująco: Gdy oś stożka przecina się ze środkiem oka położonym naprzeciw wierzchołka [tego stożka], wtedy widać jednym okiem całą powierzchnię stożka (Wit. Persp. PPII, s. 182).

³ Treść tego zdania jest niejasna, ponieważ trzeba wywnioskować z kontekstu, co to znaczy, że środek oka jest wspólny dla wszystkich linii długości. Można się jedynie domyślać, że Witelo chciał podkreślić, iż położenie środka oka względem wszystkich linii długości jest takie samo.

⁴ W dowodzie twierdzenia IV,92 nie ma wzmianki o promieniu widzenia (*radius visualis*).

Twierdzenie 15

¹ Rysunek w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I bardziej odpowiada dowodowi twierdzenia, ponieważ pokazuje tylko widoczną dla oka część cylindra, podczas gdy Risner, próbując wykonać rysunek przestrzenny, zaznacza również niewidoczną część cylindra i okręgi zastępuje owalami. Rysunek z rękopisu A zamieszczamy jako rys. P9. Rysunek P9 ilustruje różnice między rysunkami w rękopisach: A, C, H, Q, S i wydaniem I, a rysunkami zamieszczonymi przy twierdzeniach 17, 21 i 25 w wydaniu Risnera *Perspektywy*. Rysunek współczesny zamieszczamy jako rys. P10. W górnej części tego rysunku (część A) przedstawiono rysunek przestrzenny (płaszczyznę przecinającą zwierciadło prostopadle do jego podstaw i przechodzącą przez oś oznaczono literą π). W dolnej części (część B) znajduje się przekrój w płaszczyźnie ABXL prostopadłej do płaszczyzny π .

Twierdzenie 19

¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Rysunek z twierdzenia 15 (rys. 6) nie odpowiada w pełni dowodowi twierdzenia. Prawdopodobnie z tego powodu Risner dodał rysunek oznaczony przez nas jako 7a. Rysunek 7a ilustruje poprawnie wywody autora *Perspektywy*.

Twierdzenie 20

¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Rysunek zamieszczony przez Witelona przy twierdzeniu 17 (rys. 7) jest nieadekwatny do twierdzenia 20. Prawdopodobnie z tego powodu Risner zamieścił rysunek oznaczony przez nas jako 7b, który poprawnie ilustruje wywody Witelona.

² W oryg.: *punctum visus*.

Twierdzenie 21

¹ W oryg.: *econverso* – odwrotnie, tzn. średnica jest prostopadła do powierzchni cylindra.

² Patrz przypis 1 do twierdzenia 15.

³ Oryg.: *super superficiei contingentem*. Z kontekstu dowodu i rysunku wynika, że ta płaszczyzna, na której leży punkt Z, jest prostopadła a nie styczną.

⁴ Patrz przypis 1 do tego twierdzenia.

Twierdzenie 22

¹ W twierdzeniu VII,7 Witelo podaje, jakie warunki muszą być spełnione, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego była linia prosta.

² W twierdzeniu VII,9 Witelo podaje warunki, jakie muszą być spełnione, aby wspólnym przecięciem płaszczyzny odbicia i powierzchni zwierciadła cylindrycznego wypukłego było koło.

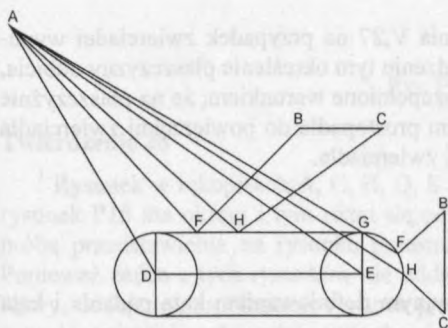
³ Twierdzenie VII,10 pokazuje, kiedy wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia i zwierciadła wypukłego cylindrycznego bądź stożkowego jest przecięciem ostrokątnym.

Twierdzenie 23

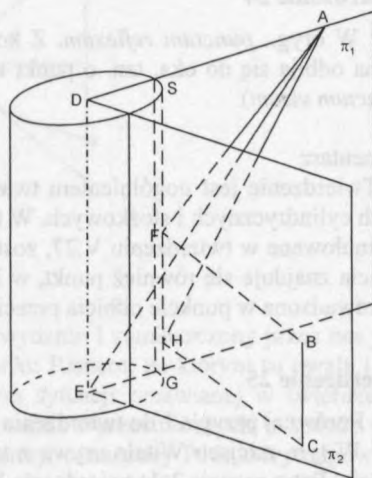
¹ W oryg.: *secundum puncta illorum linearum continua*. Tekst łaciński jest niejasny. Przekład polski tego zdania jest próbą interpretacji, opartej na dowodzie twierdzenia. Jak wynika z dowodu twierdzenia, od słów „obojętnie czy....” tekst należy rozumieć następująco: obojętnie czy płaszczyzna padania tej linii będzie przechodziła przez linię długości, czy będzie równoległa do koła podstawy, przecięcie płaszczyzny odbicia każdego punktu tej linii z powierzchnią zwierciadła będzie ostrokątne i będzie zachodziło w punktach leżących na liniach, wzdłuż których płaszczyzna padania przecina powierzchnię zwierciadła.

² Konstrukcja rysunku w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I jest inna niż w wydaniu Risnera. Dlatego zamieszczamy rysunek zgodny z rękopisem H jako rys. P11. Ponieważ żaden z tych rysunków nie oddaje przejrzystości sytuacji omawianej w twierdzeniu, na rys. P12 zamieszczamy rysunek przestrzenny do pierwszej części twierdzenia, a na rys. P13 do drugiej. Na rys. P12 i P13 płaszczyzna oznaczona literą π_1 jest

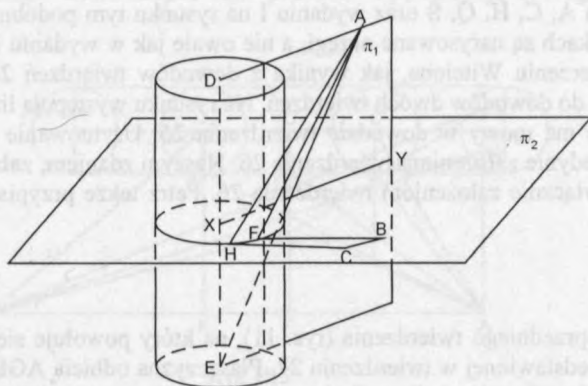
prostopadła do podstaw zwierciadła cylindrycznego i przechodzi przez oś cylindra. Na płaszczyźnie π_1 w punkcie A znajduje się środek oka. Na płaszczyźnie π_2 znajduje się przedmiot BC. Na rysunku P12 płaszczyzna π_2 jest prostopadła do podstaw zwierciadła cylindrycznego i przechodzi przez jego oś, zaś na rys. P13 płaszczyzna π_2 jest równoległa do podstaw cylindra. Linia XY na rys. P13 (oznaczenie nasze) jest krawędzią przecięcia płaszczyzn π_1 i π_2 .



Rys. P11



Rys. P12



Rys. P13

³ Płaszczyzna padania jest zdefiniowana w księdze V jako definicja 10.

⁴ Wyrażenie to jest bardzo zwięzłe. Jak wynika z kontekstu, należy je rozumieć w następujący sposób: chociaż punkty odbicia form punktów linii BC leżą na linii długości SG, to jednak wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia formy każdego z punktów linii BC z powierzchnią zwierciadła stanowi przecięcie ostrokątne.

⁵ Porównaj przypis 4 do tego twierdzenia

⁶ Zdanie to należy rozumieć następująco: chociaż formy wszystkich punktów linii BC odbijają się do oka A od łuku koła zwierciadła, to jednak wspólne przecięcie płaszczyzny odbicia formy każdego punktu linii BC z powierzchnią zwierciadła jest przecięciem ostrokątnym. Patrz również przypis 4 do tego twierdzenia.

⁷ Porównaj przypis 6 do tego twierdzenia.

Twierdzenie 24

¹ W oryg.: *punctum reflexum*. Z kontekstu wynika, że chodzi tu o punkt, którego forma odbija się do oka, tzn. o punkt widziany, wspomniany w dowodzie twierdzenia (*punctum visum*).

Komentarz

Twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia V,27 na przypadek zwierciadeł wypukłych cylindrycznych i stożkowych. W twierdzeniu tym określenie płaszczyzny odbicia, sformułowane w twierdzeniu V,27, zostało uzupełnione warunkiem, że na płaszczyźnie odbicia znajduje się również punkt, w którym prostopadła do powierzchni zwierciadła poprowadzona w punkcie odbicia przecina oś zwierciadła.

Twierdzenie 25

¹ Porównaj przypis 1 do twierdzenia 15.

² W tym miejscu Witelo zrywa z tradycyjnym definiowaniem kąta padania i kąta odbicia. Patrz przypis 2 do twierdzenia VI,8.

Twierdzenie 26

¹ U Risnera: *ad centrum circuli*, w rękopisie H oraz S prawidłowo: *ad centrum oculi*.

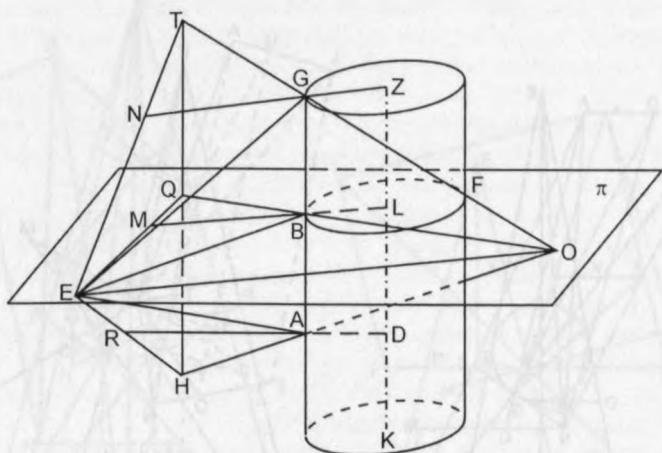
² W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I na rysunku tym podobnie jak w poprzednich przypadkach są narysowane okręgi, a nie owale jak w wydaniu Risnera. Rysunek ten w zamierzeniu Witelona, jak wynika z dowodów twierdzeń 26 i 27, miał stanowić ilustrację do dowodów dwóch twierdzeń. Na rysunku występują linie KLI oraz KE, o których nie ma mowy w dowodzie twierdzenia 26. Usytuowanie płaszczyzny ABG odpowiada jedynie założeniom twierdzenia 26. Naszym zdaniem, załączony rysunek odpowiada wyłącznie założeniom twierdzenia 26. Patrz także przypis 1 do twierdzenia 27.

Twierdzenie 27

¹ Rysunek z poprzedniego twierdzenia (rys. 11), na który powołuje się Witelo, nie oddaje sytuacji przedstawionej w twierdzeniu 27. Płaszczyzna odbicia AGB jest z założenia prostopadła do osi zwierciadła cylindrycznego. Jeżeli oś zwierciadła cylindrycznego znajduje się w płaszczyźnie rysunku, wtedy linia AB i płaszczyzna AGB będą prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Z tego powodu zamieściliśmy rysunek P14, na którym przedstawiliśmy sytuację omawianą w twierdzeniu 27. Rysunek ten został wykonany tak, że płaszczyzna odbicia ABG jest płaszczyzną rysunku. Rysunek P14 jest więc widokiem z góry od strony płaszczyzny górnej podstawy zwierciadła cylindrycznego wypukłego.

² W tym miejscu Witelo zaczyna przeprowadzać dowód poprzez wykazanie sprzeczności.

I mają raczej charakter szkicu. Zamiast litery T wprowadzono błędnie literę C, która nie występuje w dowodzie twierdzenia. W innych rękopisach jest litera T. Jako przykład rysunku zgodnego z rękopisem zamieszczamy rysunek pochodzący z rękopisu A (rys. P17). W celu łatwiejszego zrozumienia wywodów Witelona zamieszczamy współczesny rysunek przestrzenny, oznaczony P18.



Rys. P18

³ Jak wynika z dotychczasowych wywodów chodzi tu o linie ZK i ABG.

⁴ Risner błędnie podaje księgę XXI Elementów Euklidesa, której w ogóle nie ma. Według rękopisu S i wydania I chodzi o księgę I, co jest zgodne z dowodem twierdzenia.

⁵ Jest to twierdzenie Pitagorasa.

⁶ Tzn. $GO^2 = GB^2 + BO^2$.

⁷ Tzn. $GE^2 = GB^2 + BE^2$.

⁸ Zdanie to należy rozumieć: ponieważ $BD = BE$, a GB^2 występuje zarówno w wyrażeniu na GD^2 i GE^2 , wobec tego $GD^2 = GE^2$.

Twierdzenie 31

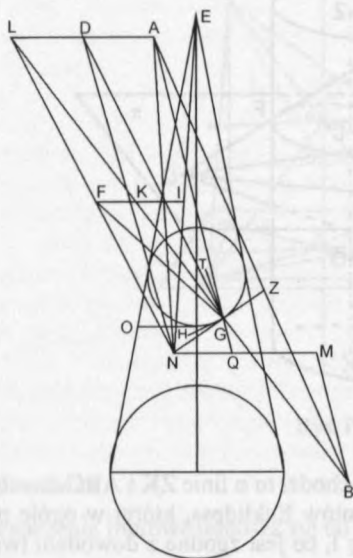
¹ Na rysunku tym w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I mamy okręgi, a nie owale jak u Risnera.

Twierdzenie 32

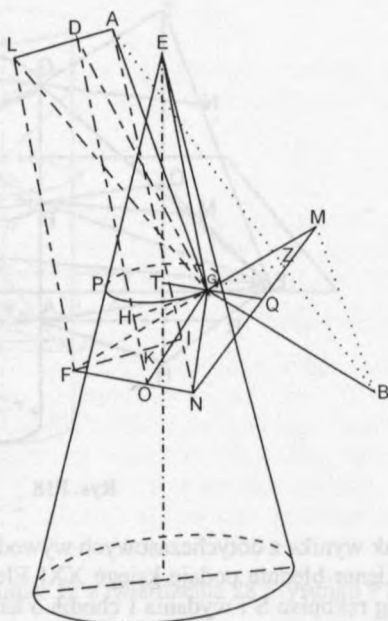
¹ W tym miejscu autor odsyła czytelnika do twierdzenia 27 tej księgi.

² Rysunek zamieszczony w wydaniu Risnera różni się od rysunku występującego w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I i stanowi próbę przestrzennego przedstawienia sytuacji omawianej w twierdzeniu. Jako przykład rysunku występującego w rękopisie zamieszczamy rysunek zgodny z rękopisem H (rys. P19). Ponieważ żaden z rysunków nie przedstawia wyraźnie sytuacji omawianej w twierdzeniu, w celu ułatwienia śledzenia rozważań Witelona dołączamy rysunek P20. Witelo w twierdzeniu tym rozpatruje przypadek ogólny. Analizuje bowiem sytuację, gdy płaszczyzna odbicia tworzy z tworzącą stożka (linia długości według terminologii Witelona) jakiś kąt. W takim przypadku krawędź przecięcia płaszczyzny odbicia z powierzchnią zwierciadła

jest elipsą. Z tego powodu rysunek P20 nie jest w pełni rysunkiem przestrzennym, ponieważ nie narysowano wszystkich płaszczyzn, o których mówi Witelo. Narysowanie ich spowodowałoby zbyt duże zaciemnienie rysunku. W celu zaznaczenia poszczególnych płaszczyzn linie leżące na każdej z płaszczyzn zaznaczono inaczej. Na przykład: linie kropkowane leżą na jednej płaszczyźnie.



Rys. P19



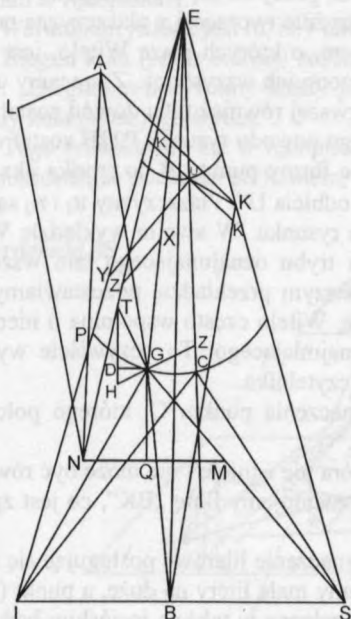
Rys. P20

³ Jak wynika z kontekstu, nie chodzi tu o powierzchnię koła, ale o płaszczyznę, na której znajduje się koło.

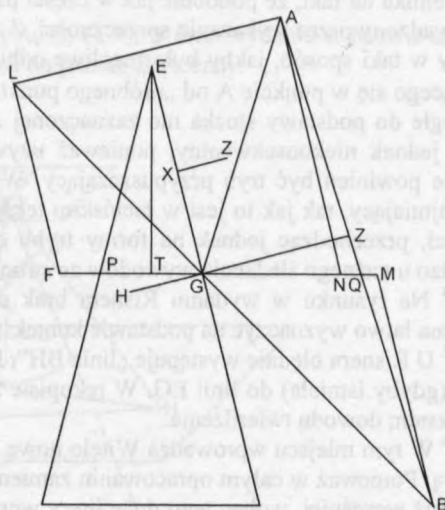
Twierdzenie 33

¹ Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I oraz rysunek Risnera (choć bardziej czytelny od tamtych) są mało przejrzyste. Aby czytelnik mógł je porównać zamieszczamy rysunek z rękopisu H, oznaczony jako P21. Rysunki w rękopisach różnią się między sobą sposobem umieszczenia ich w tekście, np. w rękopisie Q jest on obrócony w prawo o kąt 90° . Risner rysunek do tego twierdzenia (rys. 16) upodobił do rysunku z twierdzenia 32 (rys. 15) dodając punkt D na linii AL i prowadząc linię DO, których nie wymienia się w dowodzie twierdzenia. Nie ma ich również na rysunkach, np. w rękopisach H i S. W tym twierdzeniu Witelo rozpatruje przypadek, gdy płaszczyzna odbicia przechodzi przez tworzącą i oś stożka zwierciadła. Dowód twierdzenia składa się z dwóch części i polega na wykazaniu sprzeczności. W rękopisach, wydaniu I oraz wydaniu Risnera znajdujemy jeden rysunek do obu części dowodu. Powoduje to małą przejrzystość rysunku i utrudnia zrozumienie dowodu. W związku z tym w celu śledzenia wywodów Witelona do każdej części dowodu dodajemy osobny rysunek. Do części pierwszej dodajemy rysunek oznaczony numerem P22A, a do części drugiej oznaczony P22B. W pierwszej części dowodu rozpatrywany jest przypadek, gdy właściwy punkt odbicia (punkt G) i „próbny” (punkt X) leżą na założonej płaszczyźnie

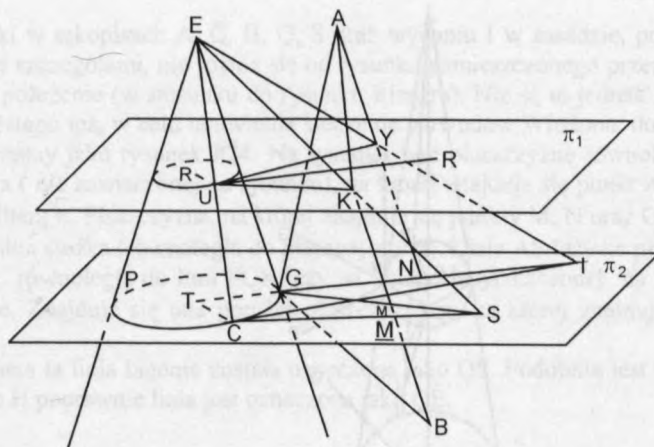
odbicia i tej samej tworzącej. Oczywiście, w tym przypadku wszystkie poprowadzone linie też leżą na płaszczyźnie odbicia. Z tego powodu nie zachodziła konieczność wykonania rysunku przestrzennego do pierwszej części dowodu i rysunek P22A jest przekrojem w płaszczyźnie odbicia, która jest płaszczyzną rysunku.



Rys. P21



Rys. P22A



Rys. P22B

² W oryg.: *quod reflectitur per utramque*, co tłumaczymy: przez jedną i drugą płaszczyznę. Zwrot ten rozumiemy w ten sposób, że forma punktu B odbijając się do oka,

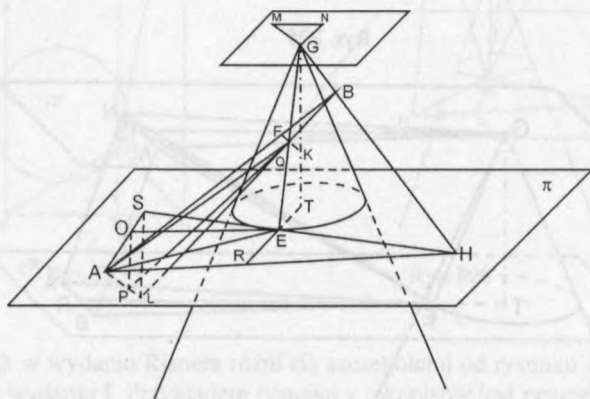
¹ Na rysunku w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I zamiast owali, jak w wydaniu Risnera, mamy okręgi. Podobnie jak w poprzednich przypadkach Risner stara się wykonać rysunek przestrzenny. Rysunek P23 jest zgodny z rysunkiem z rękopisu H. Na rysunkach w rękopisach A, C, Q, S oraz w wydaniu I mamy linię RC, której nie ma na rysunku w rękopisie H.

² Warunkiem jednak jest to, aby ten punkt leżał na linii przecięcia ostrokątnego.

³ Biegun koła (*polus circuli*) został zdefiniowany w księdze I *Perspektywy*. Witelo pisze: „Biegunem nazywamy każdy punkt linii, poprowadzonej prostopadłe do płaszczyzny koła przez jego środek”.

⁴ Tego rysunku nie ma w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Można zatem przypuszczać, że pochodzi od Risnera; jest on jednak zbyt cenny.

Twierdzenie 35



Rys. P24

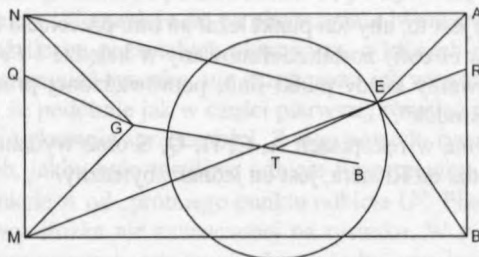
¹ Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I w zasadzie, poza drobnymi nieistotnymi szczegółami, nie różnią się od rysunku zamieszczonego przez Risnera, ale mają różne położenie (w stosunku do rysunku Risnera). Nie są to jednak rysunki przestrzenne. Dlatego też, w celu ułatwienia śledzenia wywodów Witelona, dodajemy rysunek współczesny jako rysunek P24. Na rysunku tym płaszczyznę równoległą do podstawy stożka (nie zaznaczonej na rysunku), na której znajduje się punkt A, przedmiotu oznaczono literą π . Płaszczyzna, na której znajdują się punkty M, N oraz G, jest styczna do wierzchołka stożka (równoległa do płaszczyzny π). Linia AS leży na płaszczyźnie π , zaś linia AL równoległa do linii FQK leży na innej, nie zaznaczonej na rysunku P24, płaszczyźnie. Znajduje się ona poniżej płaszczyzny π , na której znajduje się jedynie punkt A.

² U Risnera ta linia błędnie została oznaczona jako QS. Podobnie jest w wydaniu I. W rękopisie H poprawnie linia jest oznaczona jako QE.

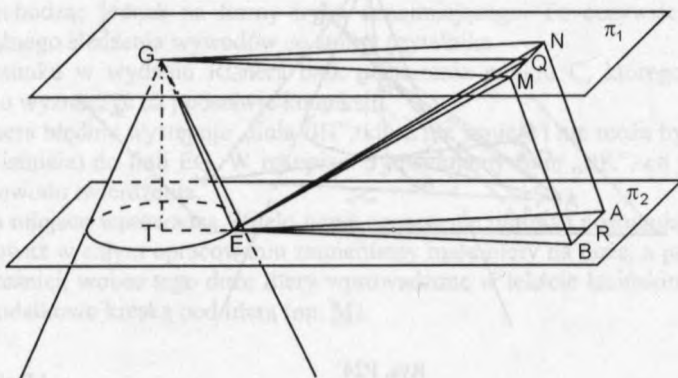
Twierdzenie 36

¹ Rysunki w wydaniu Risnera różnią się od rysunków w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I sposobem rzutowania. Dla zilustrowania zachodzących różnic zamieszczamy rysunek z rękopisu H (rys. P25). W celu ułatwienia zrozumienia wywodów Witelona dołączamy rysunek przestrzenny, oznaczony jako rys. P26. Na rysunku tym płaszczyzna oznaczona literą π_1 jest styczna do zwierciadła wypukłego stożkowego na

jego wierzchołku G. Na płaszczyźnie π_1 znajduje się środek oka i punkt widzianego przedmiotu. Płaszczyzna π_2 jest równoległa do podstawy stożka (nie znaczonej na rysunku) i płaszczyzny π_1 .



Rys. P25



Rys. P26

² Treść zdania: „Jeżeli więc przez punkt A... aż do słów.. poprzednim twierdzeniu” jest nielogiczna, ponieważ, jeżeli poprowadzimy linie, o których jest mowa w tym zdaniu, to nie będzie można wykazać, że forma punktu N może odbić się do oka, znajdującego się w punkcie M, od punktu E zwierciadła. Nielogiczność tego zdania najlepiej widać, gdy dokona się analizy rysunku P26. Treść tego zdania niepokoiła już wcześniejszych wydawców, którzy próbowali poprawić tekst, ale bez rezultatów. Rękopis S ma tekst identyczny jak u Risnera. W wydaniu I mamy zdanie *cum lineae...*, gdzie wyraźnie mamy błędy w wyrażeniu *lineae ducto* (brakuje oznaczeń tej linii oraz powinna znaleźć się forma *ductae* a nie *ducto*), a zamiast punktu A wydawca wprowadza punkt Q. W rękopisie C opuszczone zostało zdanie: *copulentur lineae ME et NE*. Poniżej dla przejrzystości podajemy zestawienie różnych lekcji:

Wyd. I: *cum lineae equidistante lineae ducto a puncto Q.*

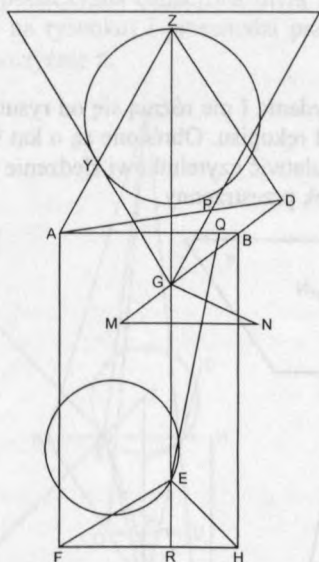
Rękopis C: *lineae ME donec.*

Wyd. R: *copulentur lineae ME et NE et producatur linea ME donec concurrat cum linea aequidistante lineae QE ducto a puncto A.*

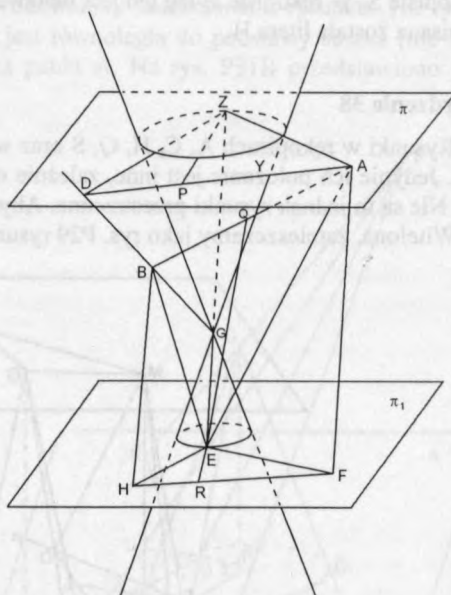
Wyd. I: *copulentur..... cum linea aequidistante lineae ducto a puncto Q.*

Rękopis C: (nie ma zdania *copulentur lineae ME et NE*) *et producatur linea ME, donec concurrat cum linea aequidistante lineae QE ducto a puncto A.*

Twierdzenie 37



Rys. P27



Rys. P28

¹ Rysunek w wydaniu Risnera różni się szczegółami od rysunku w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Przykładem rysunku z rękopisów jest rysunek zgodny z rękopisem H oznaczony jako rys. P27. Na rysunku w wydaniu Risnera brak oznaczenia punktu Y. Aby ułatwić czytelnikowi śledzenie toku rozumowania Witelona oraz pokazać różnice w konstrukcji rysunków, dodajemy rysunek współczesny (rys. P28). Płaszczyzna oznaczona π_1 jest równoległa do podstawy zwierciadła stożkowego, płaszczyzna oznaczona π jest równoległa do podstawy stożka będącego odbiciem zwierciadlanym stożka zwierciadła w płaszczyźnie równoległej do podstawy i przechodzącej przez wierzchołek. Na rysunku P28 nie uwidoczniiono podstaw stożków. W celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku nie zaznaczono na nim płaszczyzny MNG (występującej na rysunkach w rękopisach i wyd. I oraz R). Należy zaznaczyć, że płaszczyzna MNG nie występuje w dowodzie twierdzenia i służy jedynie do określenia położenia punktu i środka oka względem zwierciadła.

² Ten utworzony nowy stożek jest odbiciem zwierciadlanym stożka zwierciadła w płaszczyźnie równoległej do jego podstawy i przechodzącej przez wierzchołek, czyli w płaszczyźnie MNG nie zaznaczonej na rys. P28.

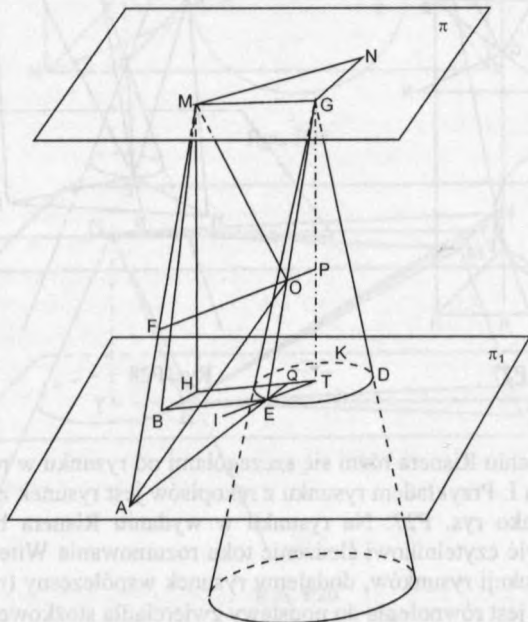
³ Nowy stożek jest tworem hipotetycznym mającym umożliwić dowód twierdzenia. Z tego powodu i odbicie od punktu Z, który leży na niewidocznej części nowego stożka (patrz rys. P28), jest również hipotetyczne i ma na celu jedynie ułatwić przeprowadzenie dowodu twierdzenia.

⁴ Risner błędnie oznacza linię PZ jako SPZ. Punktu S nie ma bowiem ani na rysunku, ani w żadnym miejscu dowodu twierdzenia. W rękopisach H oraz S linia ta jest oznaczona prawidłowo jako PZ.

⁵ Risner błędnie podaje „ką REI”, tymczasem chodzi tu o kąt REH i tak jest np. w rękopisie S. W rękopisie H kąt ten jest wprowadzicie oznaczony jako REP, ale nad literą P dopisana została litera H.

Twierdzenie 38

¹ Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydania I nie różnią się od rysunku Risnera. Jedynie ich położenie jest inne, zależnie od rękopisu. Obrócone są o kąt 90° lub 180° . Nie są to jednak rysunki przestrzenne. Aby ułatwić czytelnikowi śledzenie wywodów Witelona, zamieszczamy jako rys. P29 rysunek przestrzenny.



Rys. P29

Twierdzenie 39

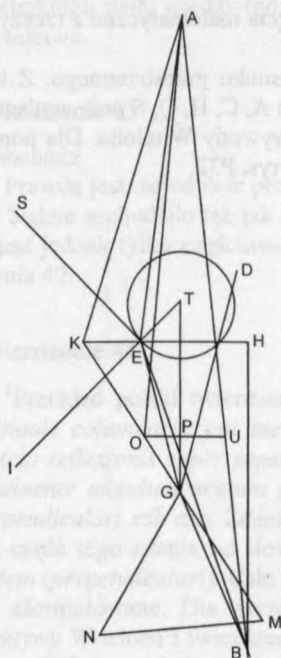
¹ Rysunku tego nie znajdujemy w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Stanowi on zapewne dodatek Risnera. Jest on powtórzeniem rysunku 20 z twierdzenia 37. Naszym zdaniem jest on zbyteczny i jego zamieszczenie w tekście nie było potrzebne dla zrozumienia wywodów Witelona.

² Patrz przypis 2 do twierdzenia 37.

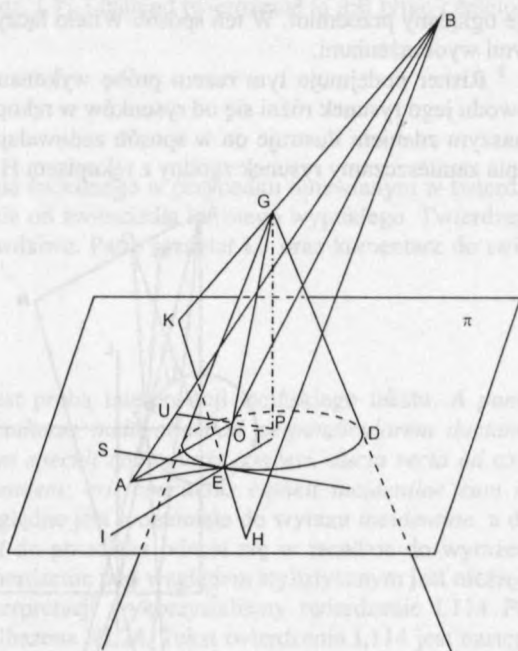
Twierdzenie 40

¹ W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I znajdujemy zamieszczony poniżej rysunek, oznaczony jako P30. Rysunek w wydaniu Risnera różni się od rysunków w rękopisach sposobem rzutowania. Nie jest to jednak rysunek przestrzenny. Dlatego dodajemy rysunek współczesny, oznaczony P31A, który jest rysunkiem w sposób właściwy ilustrującym wywody Witelona. Na rys. P31A nie zaznaczono płaszczyzny MNG, rów-

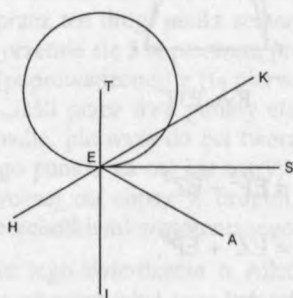
noległej do podstawy stożka zwierciadła, ponieważ jej narysowanie nie ułatwiłoby śledzenie wywodów Witelona, a powodowałoby zaciemnienie rysunku. Na rysunku P31A płaszczyzna oznaczona literą π jest równoległa do podstawy stożka (nie zaznaczonej na rysunku) i przechodzi przez punkt A. Na rys. P31B przedstawiono widok w płaszczyźnie π .



Rys. P30



Rys. P31A



Rys. P31B

² W celu łatwiejszego zrozumienia wywodów Witelona dotyczących wymienionych kątów proponujemy korzystać z rys. P31B. Oznaczenia na rys. P31B są zgodne z oznaczeniami Witelona.

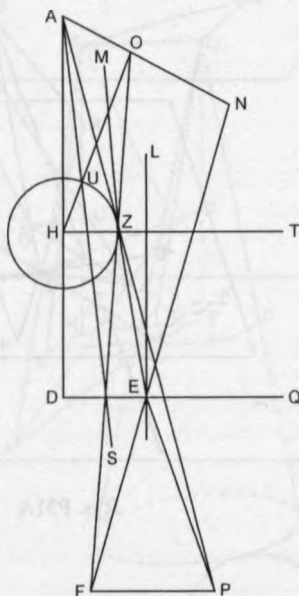
³ W oryg.: *Et imaginandum est ita, quod in figura solida punctum B cadat in lineam EG, quod in plano non potuimus taliter figurare*. W naszym przekonaniu Witelo sygnalizuje trudności w przedstawieniu na rysunku opisywanego zjawiska. O ile nasze rozu-

mienie tego zdania jest prawidłowe, w tym miejscu, jedynym dotąd, Witelo rozróżnia możliwości przedstawienia zjawiska za pomocą rysunku płaskiego albo przestrzennego.

Twierdzenie 41

¹ Wyrażenie „linia prosta rzeczy widzianej” oznacza, że linia na rysunku reprezentuje oglądany przedmiot. W ten sposób Witelo łączy pojęcia matematyczne z rzeczywistymi wyobrażeniami.

² Risner podejmuje tym razem próbę wykonania rysunku przestrzennego. Z tego powodu jego rysunek różni się od rysunków w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I, i naszym zdaniem ilustruje on w sposób zadowalający wywody Witelona. Dla porównania zamieszczamy rysunek zgodny z rękopisem H jako rys. P32.



Rys. P32

³ Tzn., że:

$$FZ^2 = EF^2 + EZ^2$$

oraz

$$ZP^2 = EZ^2 + EP^2,$$

ale

$$FZ^2 = ZP^2,$$

a więc

$$EF^2 = EP^2,$$

z tego wynika, że:

$$EF = EP.$$

⁴ W oryg.: *quod ipse reflectetur ad punctum P a puncto aliquo lineae ZE, quem secat illa linea*. Cytowane zdanie zawiera następującą myślforma tego punktu, w którym linia poprowadzona z punktu F (przecinająca linię ZE) przecina linię ON, odbija się do punktu P od punktu, w którym ta poprowadzona linia przecina linię ZE.

⁵ Porównaj przypis 1 do tego twierdzenia.

Twierdzenie 42

Komentarz

Prawdą jest, że odbicie promienia świetlnego w przypadku omawianym w twierdzeniu będzie zachodziło tak jak od zwierciadła płaskiego. Powstawanie jednak obrazu punktu w zwierciadle płaskim przedstawione przez autora jest błędne z punktu widzenia dzisiejszego stanu wiedzy (por. rozdz. I.3), i dlatego twierdzenie to jest tylko częściowo prawdziwe.

Twierdzenie 43

Komentarz

Prawdą jest, że odbicie promienia świetlnego w przypadku omawianym w twierdzeniu będzie zachodziło tak jak odbicie od zwierciadła kulistego wypukłego. Twierdzenie to jest jednak tylko częściowo prawdziwe. Patrz rozdział I,3 oraz komentarz do twierdzenia 42.

Twierdzenie 44

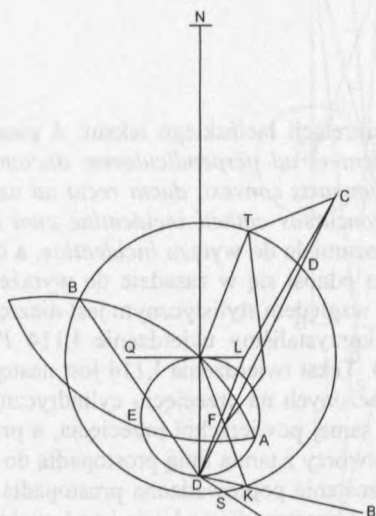
¹Przekład polski twierdzenia jest próbą interpretacji łacińskiego tekstu: *A puncto sectionis columnaris, cui incidit cathetus incidentiae ad perpendicularem ductam a puncto reflexionis super superficiei speculi columnaris convexi, ducta recta ad axem continente angulum acutum cum eadem: erit concursus catheti incidentiae cum illa perpendiculari sub axe*. Zdanie względne jest zrozumiałe do wyrazu *incidentiae*, a dalsza część tego zdania od słowa *ad* do przecinka odnosi się w zasadzie do wyrażenia *eadem (perpendiculari)*. Całe to twierdzenie pod względem stylistycznym jest niezręcznie sformułowane. Dla naszej interpretacji wykorzystaliśmy twierdzenie I,114 *Perspektywy* Witelona i twierdzenie Alhazena VI,24. Tekst twierdzenia I,114 jest następujący: „Jeśli przez jeden z dwóch punktów zaznaczonych na przecięciu cylindrycznym przeprowadzimy prostopadłą do osi cylindra na samej powierzchni przecięcia, a przez drugi punkt zostanie poprowadzona linia, która utworzy z tamtą linią prostopadłą do osi cylindra kąt ostry, i jeśli przez ten drugi punkt zostanie poprowadzona prostopadła do samego przecięcia, to ona przetnie się z tą pierwszą prostopadłą pod osią i pod punktem przecięcia pierwszej linii [poprowadzonej] z [tą pierwszą] prostopadłą”. W *De aspectibus* VI,24 Alhazen pisze „Jeśli przez dwa punkty elipsy cylindrycznej zostałyby [poprowadzone] dwie prostopadłe, pierwsza do osi tworząc z prostą poprowadzoną przez drugi punkt do tego samego punktu na osi kąt ostry; druga [z tych prostopadłych] jest prostopadłą do prostej stycznej do elipsy w drugim punkcie: [obydwie prostopadłe] przetną się poza osią i [wierzchołkiem] wspomnianego kąta ostrego”.

Uwaga: sformułowanie tego twierdzenia u Alhazena jest równie niezręczne jak sformułowanie u Witelona, chociaż tekst tego ostatniego jest jeszcze bardziej zawyły. Zwrot *elipsa cylindryczna (ellipsis cylindraceae)* oznacza kształt krzywej powstającej w wyniku przecięcia cylindra płaszczyzną nierównoległą do jego podstaw. Witelo nazywa to przecięcie przecięciem ostrokątnym.

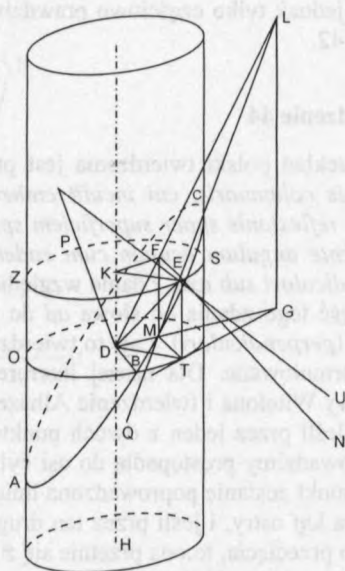
²Taki sam rysunek znajdujemy w wydaniu Risnera przy twierdzeniu I,114 Witelona oraz przy twierdzeniu VI,24 *De aspectibus* Alhazena. W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I przy tym twierdzeniu znajduje się taki sam rysunek jak u Risnera. Natomiast w rękopisie łacińskim Alhazena Edinburgh, Royal Observatory, Crawford Library, 9-11-3(20) jest rysunek zamieszczony poniżej jako rys. P33.

Porównanie rys. P33 z rys. 24 wskazuje, że są to dwa różne rysunki. Z tego powodu trudno zgodzić się z S. Unguru (Wit. Persp. UI, s. 196), który twierdzi, że rysunek w tekście Witelona w księdze I pochodzi od Alhazena. Być może, że Unguru ma rację, ale powinien podać, w jakim rękopisie Alhazena znalazł ten rysunek. Trzeba mocno podkreślić, że rys. 24, jak również i rys. P33 w ogóle nie odzwierciedlają sytuacji przedstawionej w tym twierdzeniu. Bardzo pomocny dla zrozumienia tego twierdzenia okazał się rysunek zrobiony przez S. Unguru, zamieszczony w przypisach do twierdzenia I,114 *Perspektywy*. Aby ułatwić czytelnikowi śledzenie wywodów Witelona dodajemy współczesny rysunek przestrzenny (rys. P34), który został wykonany na podstawie dowodu twierdzenia z wykorzystaniem rysunku S. Unguru.

³ W oryginale czytamy: *quoniam linea TD est diameter circuli*. Z tekstu dowodu oraz rysunku wynika, że linia TD jest promieniem okręgu, ale zgodnie z terminologią Witelona jest półśrednicą (*semidiameter*) okręgu.



Rys. P33



Rys. P34

Komentarz

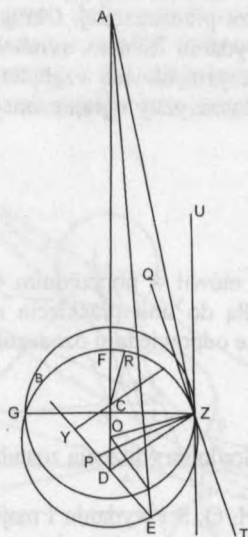
Dowód tego twierdzenia jest trudny do zrozumienia bez znajomości dowodu twierdzenia I,114. Jest on tak zawiły, że odtworzenie rysunku na podstawie tekstu dowodu nastręcza duże trudności. Twierdzenie VII,44 jest przeniesieniem twierdzenia I,114 na grunt optyki.

Twierdzenie 45

¹ W rękopisach A, C, H, S oraz wydaniu I znajduje się rysunek, zamieszczony poniżej jako rys. P35, który został wykonany przy zastosowaniu trudnego do określenia, sposobu rzutowania i przez to jest mało zrozumiały dla dzisiejszego czytelnika. Risner dokonał próby wykonania rysunku przestrzennego. Sądzimy, że rysunek Risnera jest wystarczającą ilustracją wywodów Witelona.

² W oryg.: *Sitque cathetus incidentiae formae puncti alicuius reflexi a puncto speculi EZ: quae sit HZ*. W powyższym zdaniu forma participium *reflexi* gramatycznie

odnosi się do rzeczownika *puncti*. Jednak zgodnie z teorią widzenia przyjętą przez Witelona to nie punkt materialny odbija się od zwierciadeł, ale jego forma. Z tego powodu w tłumaczeniu piszemy o „odbitej formie”. Rzecz jasna, że punkt na zwierciadle, o którym jest mowa w tym zdaniu, nie może być oznaczony dwoma literami EZ, gdyż, jak wynika z dowodu i rysunku, są to dwa różne punkty. Nie ma wątpliwości, że Risner popełnił błąd, który, być może, powtórzył za wydaniem I. Tymczasem w rękopisach H i S ten punkt na zwierciadle oznaczony został literą E, co także jest błędem, ponieważ w takim przypadku nie mogłaby powstać linia HZ. Z tego zapewne zdawali sobie sprawę wydawcy i dodali literę Z do znajdującego się w rękopisach oznaczenia E. Wydaje się, że jedyny możliwy punkt to punkt Z, przez który przechodzi linia HZ prostopadła do linii ED, jak to wynika z rys. 25 oraz dowodu twierdzenia.



Rys. P35

³ W oryg.: *trigonum....erectum* zwrot ten należałoby przetłumaczyć: płaszczyzna, na której leży trójkąt AZK, jest prostopadła.

⁴ W oryg.: *differentia communis superficierum*. Zgodnie z tym, co powiedziano w księdze II (Wit. Persp. PPI, por. skorowidz), zwrot ten oznacza w tym przypadku linię przecięcia płaszczyzn.

⁵ W oryg.: *intra sectionem*. W tym miejscu zwrot ten oznacza, że linia została doprowadzona do wnętrza stożka.

⁶ Wspomniane w tym zdaniu linie, a właściwie odcinki ZH i ED, nie przecinają się, natomiast przecinają się ich przedłużenia. Wyrażenie łacińskie *sub axe* przetłumaczyliśmy: poza osią, a *sub puncto* – poniżej punktu.

Twierdzenie 46

¹ W oryg.: *punctus reflexionis sectionis pyramidalis*. Z wcześniejszych twierdzeń i dowodu tego twierdzenia wynika, że autor rozpatruje sytuację, gdy promień padający i odbity leżą w płaszczyźnie przecięcia stożkowego.

² Rysunku tego nie ma w rękopisach przez nas wykorzystanych i wydaniu I. Z tego można wnosić, że jego autorem jest sam wydawca.

Twierdzenie 47

¹ Tzn. między punktem przecięcia stycznej z prostopadłą padania a punktem przecięcia przedłużonej (do wnętrza obwodu przecięcia ostrokątnego) linii odbicia z prostopadłą padania.

² Rysunek w wydaniu Risnera jest odbiciem zwierciadlanym w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez linię GQ rysunku znajdującego się w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Rysunki te zostały wykonane tak, że płaszczyzna rysunku jest płaszczyzną przecięcia ostrokątnego. Należy jednak zaznaczyć, że prostopadła GBQ leży na płaszczyźnie równoległej do podstaw cylindra. Rysunki z rękopisów i wydań I oraz Risnera są zadowalającą ilustracją do dowodu twierdzenia. Wymagają jednak pewnej wyobraźni przestrzennej. Okrąg na rysunkach w rękopisach oraz wydaniu I, jak też owal w wydaniu Risnera, symbolizują elipsę, która powstaje w wyniku przecięcia cylindra płaszczyzną ukośną względem podstawy.

³ Właściwie wewnątrz części płaszczyzny ograniczonej trójkątem EKB lub inaczej wewnątrz trójkąta EKB.

⁴ U Risnera błędnie I,37.

Twierdzenie 48

¹ O tych prostopadłych Witelo mówił w poprzednim 47 twierdzeniu. Chodzi tutaj o prostopadłą padania i prostopadłą do linii przecięcia ostrokątnego, poprowadzoną w punkcie odbicia. Na rys. 26 są one odpowiednio oznaczone EKQ i GBQ.

Twierdzenie 49

¹ W oryg.: *in diametro visuali*. Średnica widzenia została zdefiniowana w księdze VI (definicja 4)

² Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S i wydaniu I mają okrąg lub jego część i tym różnią się od rysunku Risnera, który narysował owal i mają one symbolizować elipsę, która powstaje w wyniku przecięcia ostrokątnego cylindra. Płaszczyzną, w której został wykonany ten rysunek, jest płaszczyzna przecięcia ostrokątnego i wszystkie linie, o których jest mowa w dowodzie twierdzenia, leżą na tej płaszczyźnie.

³ W oryg.: *sit ergo citra unum illorum punctorum alius, qui sit G*. Z poprzedniego zdania wynika, że chodzi tu o punkt leżący między punktem E i punktem, o którym jest mowa w poprzednim zdaniu, tzn. tym punktem, w którym styczna do obwodu przecięcia jest równoległa do linii DA.

⁴ W oryg.: *linea ergo LB concurret cum linea HD*. Wyraźny błąd w wydaniu Risnera. Zamiast linii HD musi być linia HG, co potwierdza rękopis S. Po tej zmianie staje się zrozumiałe wyrażenie: „od strony punktów B i G” oraz stwierdzenie: „i [linia LB z linią HG] utworzy kąt ostry”.

⁵ W oryg.: *quia quantum ad hoc eadem ratio est in circulis et in sectionibus*. Tłumaczenie jest próbą interpretacji łacińskiego tekstu, który jest niejasny.

Komentarz

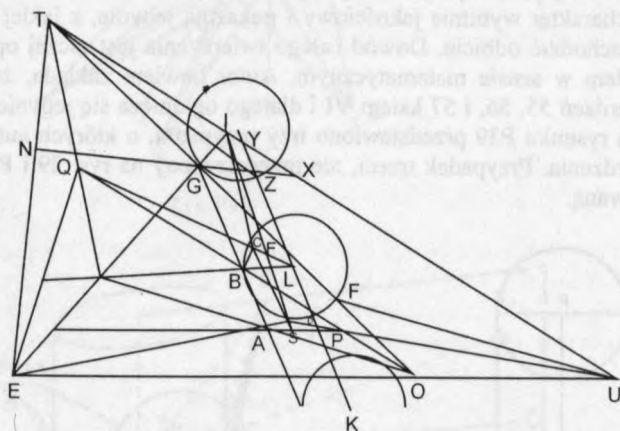
Twierdzenie to jest błędne z punktu widzenia dzisiejszego stanu wiedzy (por. rozdział I,3). Jest jednak w całkowitej zgodności z pojęciem formy i z przyjmowanym w czasach Witelona mechanizmem powstawania obrazu w oku. Trzeba jednak zaznaczyć, że przedstawione odbicie promienia świetlnego jest poprawne.

Twierdzenie 50

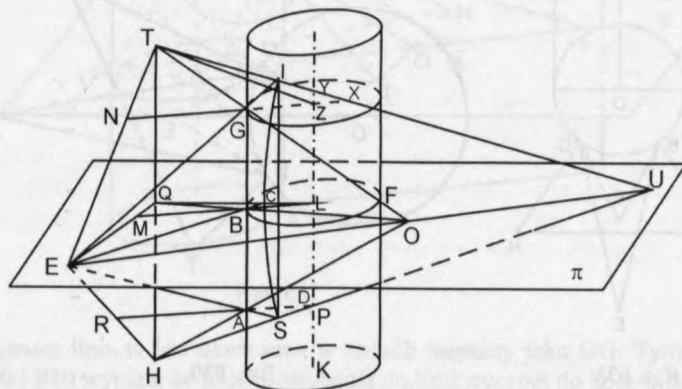
¹ Rysunek ten nie występuje w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Pochodzi więc zapewne od Risnera i jest kopią rysunku 13 z twierdzenia 30, na które powołuje się Witelo. Oznaczenia w tekście i na rys. 27a są identyczne z występującymi w twierdzeniu 30.

Twierdzenie 51

¹ Rysunek w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I nie jest rysunkiem przestrzennym i sprawia wrażenie szkicu, podczas gdy rysunek w wydaniu Risnera jest próbą rysunku przestrzennego mającego ilustrować dowód twierdzenia. Dla porównania tych rysunków zamieszczamy rysunek (rys P36), wykonany zgodnie z rysunkiem, znajdującym się w rękopisie H. Natomiast w celu ułatwienia czytelnikowi śledzenia wywodów Witelona zamieszczamy rysunek współczesny, oznaczony jako rys. P37.



Rys. P36



Rys. P37

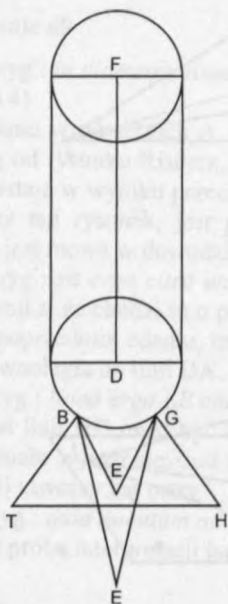
² Witelo nawiązuje do sytuacji omawianej w twierdzeniu 30 tej książki, gdzie linia LM jest dokładnie określona. Jest ona prostopadłą do powierzchni zwierciadła cylindrycznego, poprowadzoną przez punkt odbicia B, i przecina linię QE w punkcie M.

³ Tzn. wywodami zawartymi w twierdzeniu 30 tej książki.

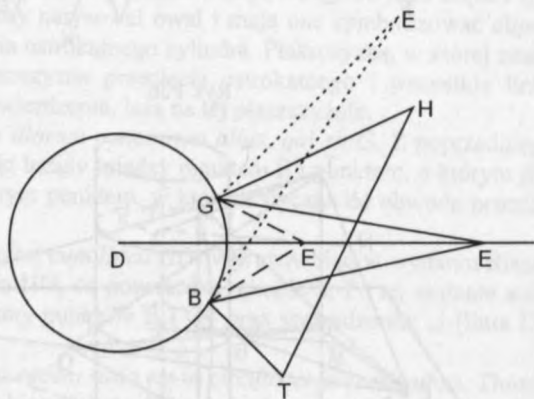
⁴ W oryg.: *linea imaginis* (linia obrazu). Jest to wyrażenie, które ma przypominać, że linia TH, o której jest mowa w dowodzie, zastępuje przedmiot.

Twierdzenie 52

¹ Risner tutaj, podobnie jak w większości poprzednich twierdzeń, starał się wykonać rysunek przestrzenny. Dlatego na rysunku w jego wydaniu *Perspektywy* mamy owale zamiast okręgów, które występują w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I. Rysunek zgodny z rękopisem H zamieszczamy jako rys. P38. W celu ułatwienia zrozumienia wywodów Witelona na rysunku P39 przedstawiliśmy widok w płaszczyźnie prostopadłej do osi zwierciadła, na której znajdują się linia TH i środek oka E. Linia DE jest linią przecięcia się płaszczyzn, o których jest mowa w twierdzeniu. Rysunki 29, P38 i P39 mają charakter wybitnie jakościowy i pokazują jedynie, z jakiej części obwodu koła może zachodzić odbicie. Dowód całego twierdzenia jest raczej opisem zjawiska, a nie dowodem w sensie matematycznym. Autor bowiem zakłada, że czytelnik zna dowody twierdzeń 55, 56, i 57 księgi VI i dlatego ogranicza się jedynie do opisywania zjawiska. Na rysunku P39 przedstawiono trzy przypadki, o których autor mówi w dowodzie twierdzenia. Przypadek trzeci, nie przedstawiony na rys. 29 i P38, zaznaczono linią kropkowaną.



Rys. P38

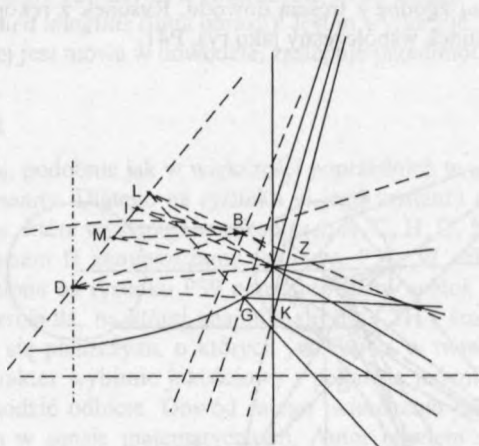


Rys. P39

² Z dalszego tekstu wynika, że linia TH znajduje się między okiem i zwierciadłem.

³ Dowód tej części twierdzenia wynika z twierdzeń 56 i 57 księgi VI.

linii przez Risnera jako ET jest jego własnym pomysłem, bo np. w rękopisie S nie ma ona żadnego oznaczenia. Wątpliwości z tą linią mieli pierwsi wydawcy Tansteter i Apian, skoro te linię oznaczyli tylko literą D.



Rys. P41A

⁴ W tym miejscu po raz kolejny używa Witelo dzisiejszej definicji kąta padania i kąta odbicia.

⁵ W oryg.: *sit ergo ductus lineae EM in lineam MI (quae minor est quam ML) aequalis quadrato lineae MZ*. Punkt I w tym miejscu pojawia się po raz pierwszy. Wydaje nam się, że uwaga w nawiasie ma umożliwić wyznaczenie odcinka MI leżącego na linii ML. Zgodnie z tą interpretacją przetłumaczyliśmy powyższe łacińskie zdanie.

⁶ W oryg.: *reflectitur ergo a puncto, quod est ultra punctum Z. Quia si detur, ut reflectatur a puncto, quod sit citra punctum Z*. Przyimek *ultra* oznacza miejsce znajdujące się powyżej czegoś, a przyimek *citra* poniżej czegoś. Dokładna analiza tekstu wskazuje jednoznacznie, że chodzi tu o dokładnie odwrotne określenie położenia. Z tego powodu *ultra* tłumaczymy poniżej a *citra* powyżej.

⁷ W oryg.: *ille ergo punctus sectionis reflectetur*. Punkt przecięcia linii nie może się odbić do oka, a jedynie forma padająca przez ten punkt na zwierciadło. Witelo często zapomina, że czym innym jest zjawisko, które opisuje, a czym innym jego geometryczne przedstawienie. Rezultatem takiego braku konsekwencji jest to, że w jego wywodach bardzo często odbija się punkt, a nie forma punktu.

⁸ Oznacza to, że przecięcie powierzchni zwierciadła płaszczyzną odbicia formy punktu H (wyznaczoną przez punkty H i B oraz E) jest przecięciem ostrokątnym.

⁹ U Risnera ta linia została błędnie oznaczona jako CD. Ten błąd znajduje się także w wydaniu I. Poprawnie linia ta jest oznaczona w rkp. H jako ED.

Twierdzenie 54

¹ Wspomniane tutaj „dwie linie” oznaczają, że jedna linia jest równoległa do osi zwierciadła, a druga jest linią leżącą na płaszczyźnie przecinającej prostopadle oś zwierciadła.

² Zwrot „tamtej drugiej linii”, naszym zdaniem, oznacza linię drugą z poprzedniego przypisu.

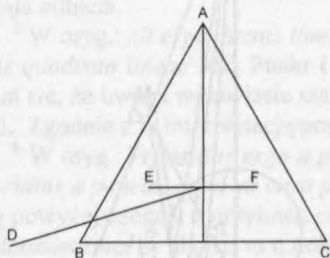
linii, a nie kąta. Zamiast *ipsum* musimy postawić formę *ipsam*. W rękopisie S oraz wydaniu I jest również lekcja *ipsum*.

⁹ W oryg.: *sed oblique incidit eidem*: jak wynika z poprzedniego zdania podmiotem do czasownika *incidit* jest rzeczownik *punctus*. Cytowane zdanie należy więc rozumieć w sposób następujący: punkt znajduje się na linii padającej ukośnie na tą samą płaszczyznę.

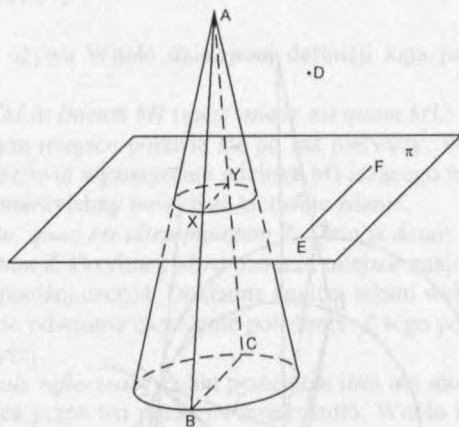
Twierdzenie 56

¹ Znaczenie wyrażenia: „długość zwierciadła stożkowego” zostało wyjaśnione poniżej na początku dowodu twierdzenia.

² W rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I znajdujemy rysunek, który przypomina przekrój stożka płaszczyzną prostopadłą do podstawy i przechodzącą przez jego wierzchołek. Rysunek z rękopisu H zamieszczamy jako rys. P44. W celu ułatwienia śledzenia wywodów Witelona zamieszczamy rysunek przestrzenny, oznaczony jako rys. P45. Linia XY (wprowadzone oznaczenie dodane zostało przez A. B. i W. W.) leży na płaszczyźnie (oznaczonej literą π) przecinającej stożek zwierciadła równoległe do podstawy. Na tej samej płaszczyźnie leży linia EF równoległa do płaszczyzny trójkąta BAC. Linie XY, EF i BC są równoległe.



Rys. P44



Rys. P45

³ Tekst od słów „...podczas gdy...” w oryginale jest następujący: *cuius oppositum dicit hypotesis*.

⁴ Jest to zgodne z tym, co Witelo mówi w twierdzeniu IV,27 (Wit. Persp. PP11, s. 112).

Twierdzenie 57

¹ O długości zwierciadeł stożkowych patrz początek dowodu twierdzenia 56.

² Zdanie to jest bardziej próbą interpretacji łacińskiego tekstu aniżeli jego wiernym tłumaczeniem. W oryginale czytamy: *neque aequidistanter latitudini speculi, ut in praemissa: medio modo, secundum quod plus approximant uni situi vel alteri, participant modos curvitatibus*.

Twierdzenie 58

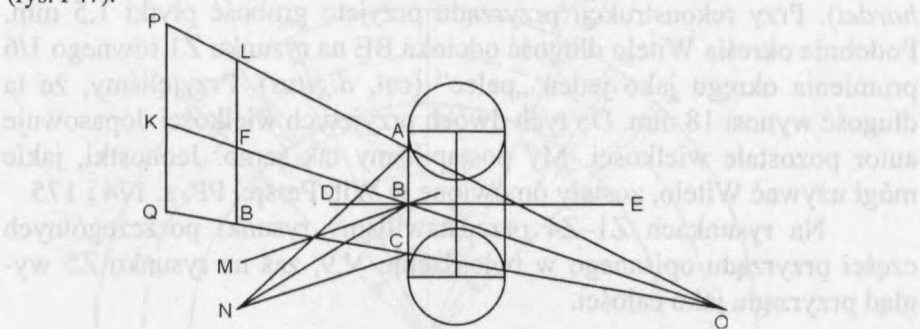
¹ W tym miejscu i następnym zdaniu względnym, gdzie występuje czasownik „odbija się”, w tekście łacińskim mamy dwa razy użyte słowo posiłkowe *fuerit* (*quod ex formis fuerit propinquius vertici speculi ... quod fuerit propinquius basi*). Z koncepcji Witelona wynika, że forma nie tylko znajduje się w jakimś punkcie zwierciadła, ale, aby zaszło widzenie, musi się ona odbić od zwierciadła. Dlatego też, aby tekst stał się jaśniejszy, słowo „jest” zastępujemy czasownikiem „odbija się”.

² Autor prawdopodobnie ma na myśli koła leżące na płaszczyznach równoległych do podstawy stożka i przecinających powierzchnię boczną stożka w różnych punktach przecięcia ostrokątnego.

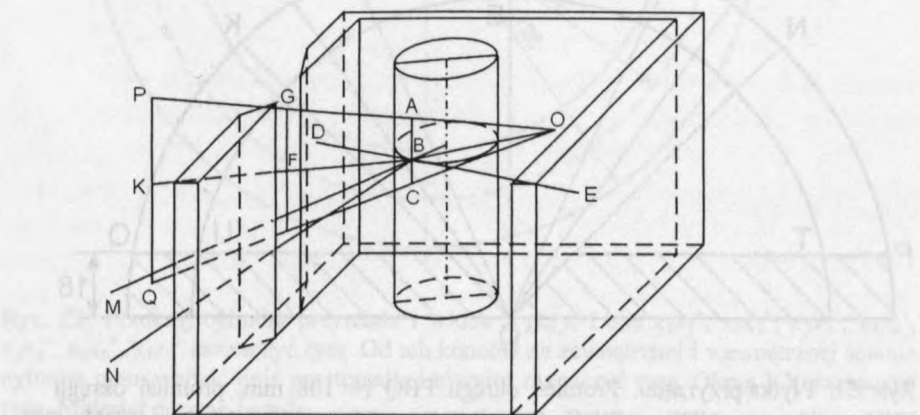
Twierdzenie 60

¹ W oryg.: *in aere*.

² Rysunki w rękopisach A, C, H, Q, S oraz wydaniu I różnią się tym od rysunku Risnera, że posiadają dwa koła, a nie trzy owale. Rysunek Risnera jest próbą przestrzennego przedstawienia sytuacji omawianej w dowodzie twierdzenia. Dla porównania dodajemy rysunek z rękopisu H jako rys. P46 oraz współczesny rysunek przestrzenny (rys. P47).



Rys. P46



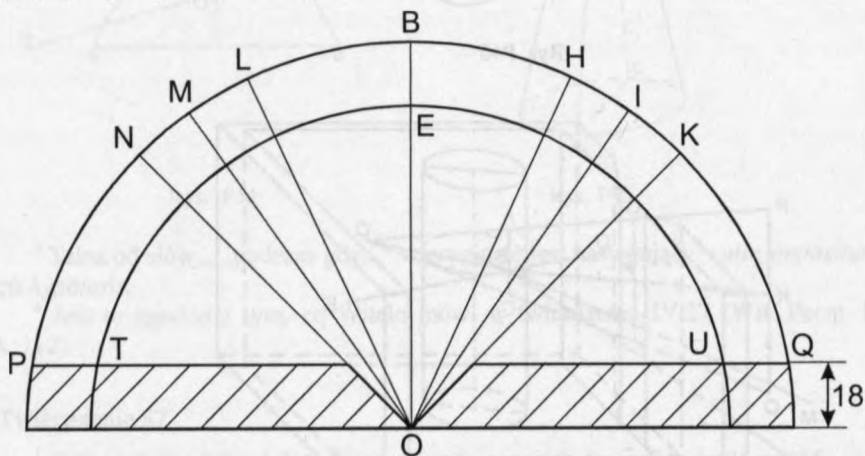
Rys. P47

V. ZAŁĄCZNIK DO KSIĘGI V

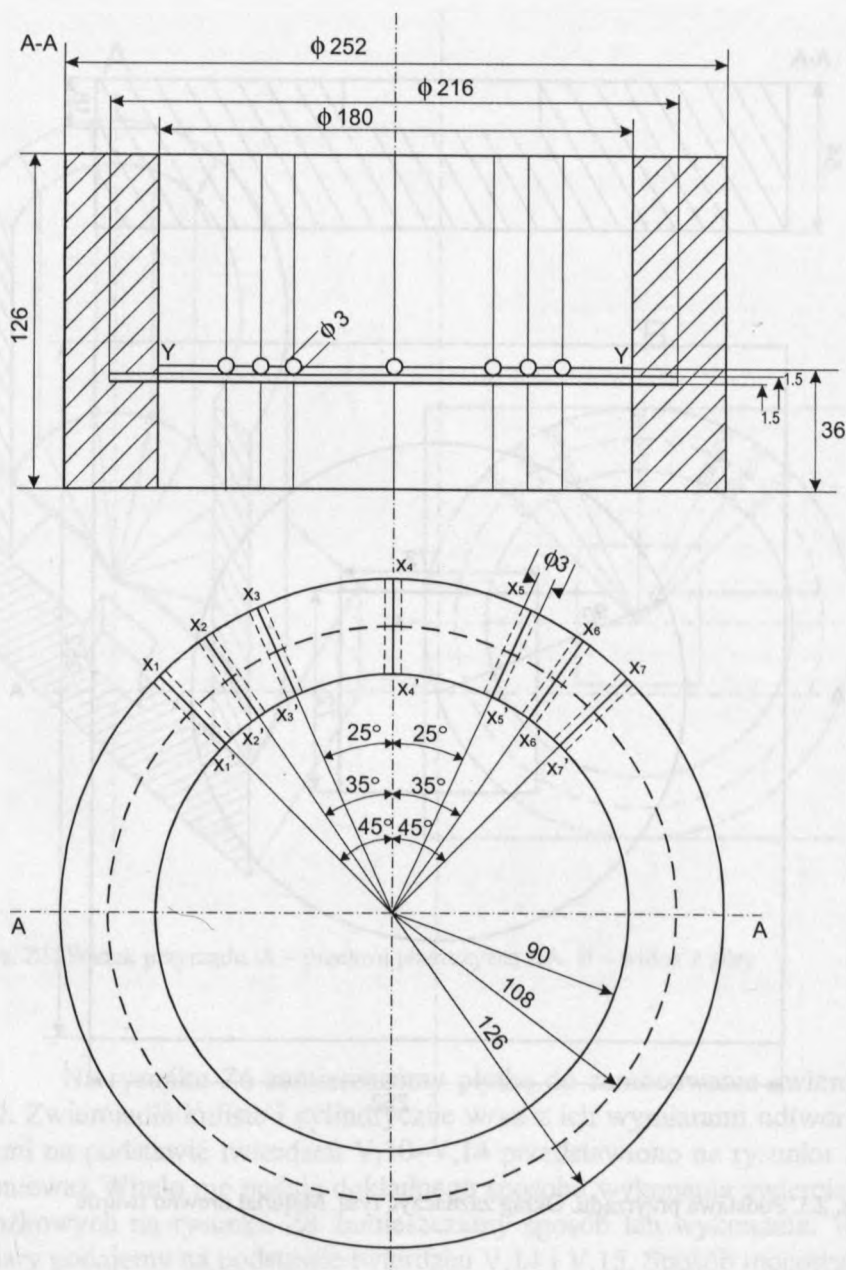
Rysunki konstrukcyjne przyrządu opisanego w twierdzeniach V,9–V,15

Sposób wykonywania rysunków w średniowiecznych rękopisach i szesnastowiecznych wydaniach *Perspektywy* jest trudny do zrozumienia dla współczesnego czytelnika. Z tego powodu podajemy rekonstrukcje rysunków przyrządu, za pomocą którego Witelo dowodzi doświadczalnie równości kąta padania i kąta odbicia od zwierciadeł o powierzchniach określonych przez niego jako regularne. Rekonstrukcji dokonaliśmy na podstawie rysunków i tekstu twierdzeń V,9–V,15. W twierdzeniu V,9 Witelo opisując zasadniczą część przyrządu, nie podaje dokładnych wymiarów. Określa je w przybliżeniu. O grubości płytki przedstawionej na rysunku Z1 pisze, że wynosi około połowy „ziarna jęczmienia” (*granum hordei*). Przy rekonstrukcji przyrządu przyjęto grubość płytki 1,5 mm. Podobnie określa Witelo długość odcinka BE na rysunku Z1 równego $1/6$ promienia okręgu jako jeden „palec” (*cal, digitus*). Przyjęliśmy, że ta długość wynosi 18 mm. Do tych dwóch przyjętych wielkości dopasowuje autor pozostałe wielkości. My postąpiliśmy tak samo. Jednostki, jakie mógł używać Witelo, zostały omówione w Wit. Persp., PP, s. 174 i 175.

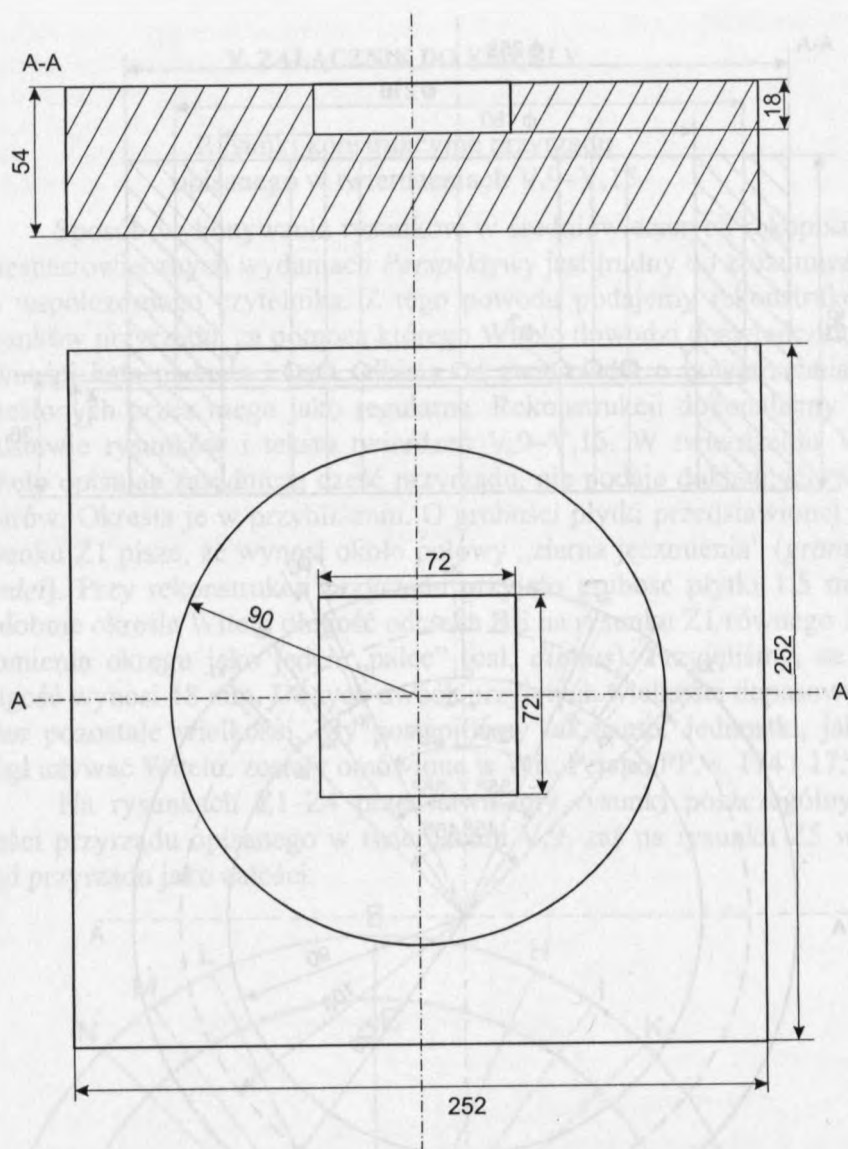
Na rysunkach Z1–Z4 przedstawiliśmy rysunki poszczególnych części przyrządu opisanego w twierdzeniu V,9, zaś na rysunku Z5 wygląd przyrządu jako całości.



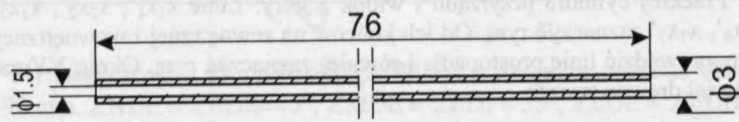
Rys. Z1. Płytkę przyrządu. Promień okręgu PBQ $r = 108$ mm, promień okręgu TEU $r = 90$ mm. $\angle NDE = \angle EDK = 45^\circ$, $\angle MDE = \angle EDI = 35^\circ$, $\angle LDE = \angle EDH = 25^\circ$. Część zakreskowaną usunąć. W punkcie D ma być ostrze. Wszystkie linie i okrąg TEU zaznaczyć rysą. Grubość płytki 1,5 mm. Materiał spiż



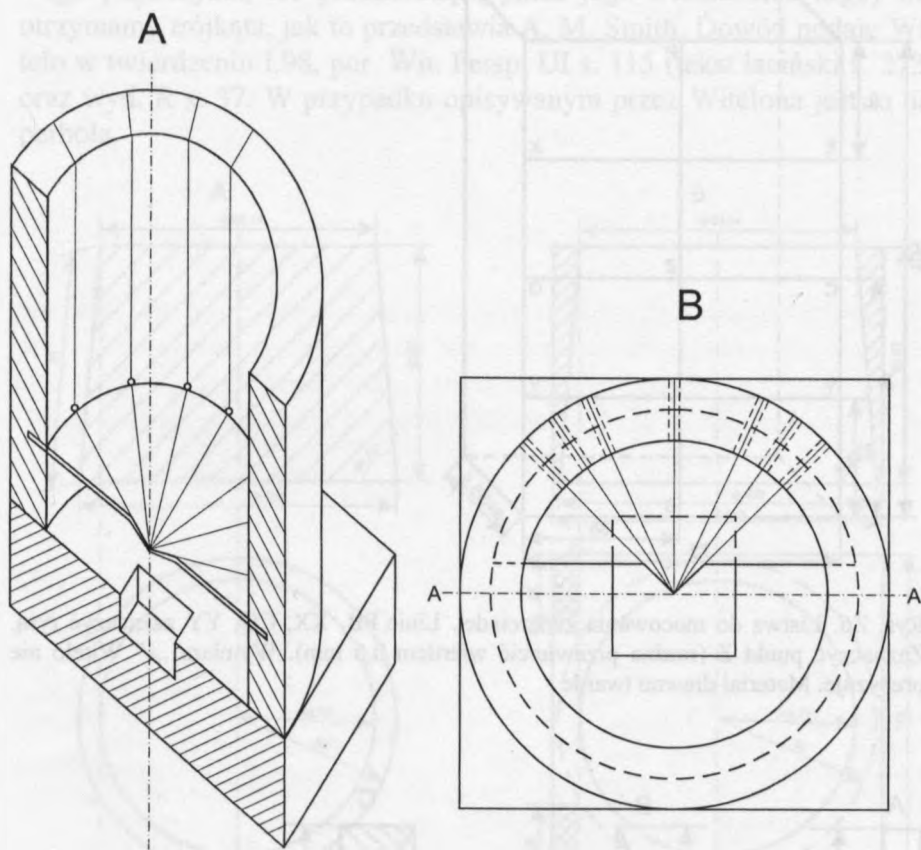
Rys. Z2. Przekrój cylindra przyrządu i widok z góry. Linie $x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3', x_4x_4', x_5x_5', x_6x_6', x_7x_7'$ zaznaczyć rysą. Od ich końców na zewnętrznej i wewnętrznej ścianie cylindra poprowadzić linie prostopadłe i również zaznaczyć rysą. Okrąg YY zaznaczyć rysą. Materiał drewno twarde



Rys. Z3. Podstawa przyrządu. Okrąg zaznaczyć rysą. Materiał drewno twarde

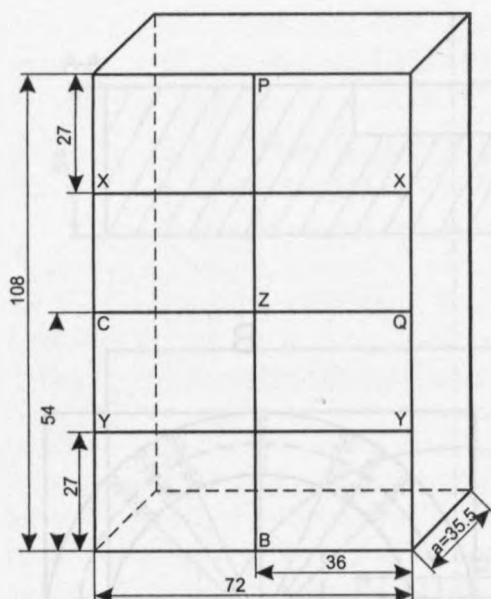


Rys. Z4. Cylinder pomocniczy. Materiał spż lub żelazo

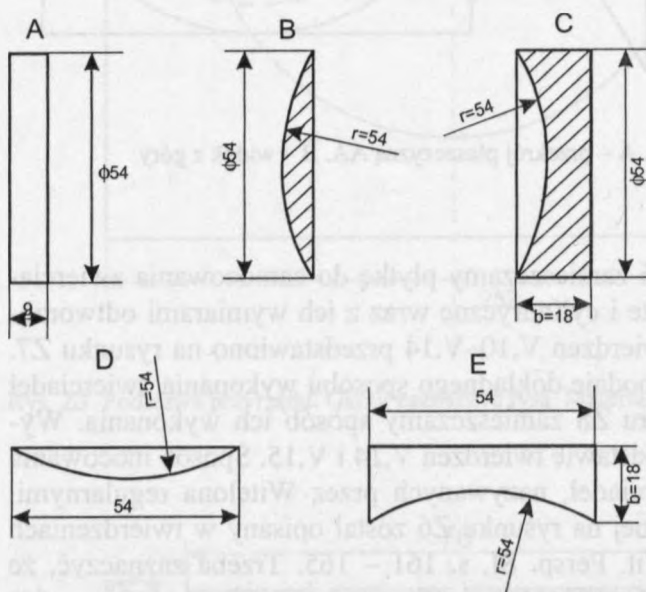


Rys. Z5. Widok przyrządu. A – przekrój płaszczyzną AA. B – widok z góry

Na rysunku Z6 zamieszczamy płytkę do zamocowania zwierciadeł. Zwierciadła kuliste i cylindryczne wraz z ich wymiarami odtworzonymi na podstawie twierdzeń V,10–V,14 przedstawiono na rysunku Z7. Ponieważ Witelo nie podaje dokładnego sposobu wykonania zwierciadeł stożkowych na rysunku Z8 zamieszczamy sposób ich wykonania. Wymiary podajemy na podstawie twierdzeń V,14 i V,15. Sposób mocowania poszczególnych zwierciadeł, nazywanych przez Witelona regularnymi, do płytki przedstawionej na rysunku Z6 został opisany w twierdzeniach V,10–V,15 oraz w Wit. Persp. SI, s. 161 – 165. Trzeba zaznaczyć, że podane przez A. Smitha (Wit. Persp. SI s. 164 rys. 62 i s. 165 rys. 64) schematyczne rysunki przedstawiające mocowanie zwierciadeł stożkowych do listwy są mylące. Ponieważ w wyniku przecięcia stożka obroto-

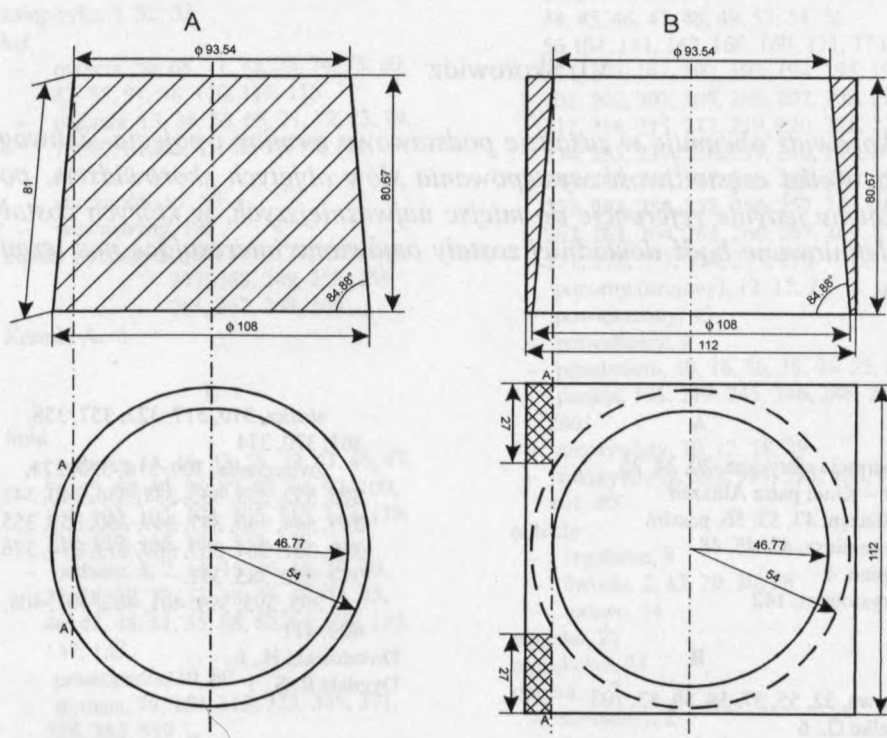


Rys. Z6. Listwa do mocowania zwierciadeł. Linie PB, XX, CQ, YY zaznaczyć rysą. Zaznaczyć punkt Z (można przewiercić wiertłem 0,6 mm). Wymiaru „a” Witeło nie precyzuje. Materiał drewno twarde



Rys. Z7. Zwierciadła: A – płaskie, B – kuliste wypukłe (przekrój), C – kuliste wklęsłe (wymiaru b autor nie podaje), D – cylindryczne wypukłe, E – cylindryczne wklęsłe. Wysokość zwierciadeł cylindrycznych 54 mm. Materiał: żelazo

wego płaszczyzną nie przechodzącą przez jego wierzchołek nigdy nie otrzymamy trójkąta, jak to przedstawia A. M. Smith. Dowód podaje Witelto w twierdzeniu I,98, por. Wit. Persp, UI s. 115 (tekst łaciński s. 273) oraz wyd. R s. 37. W przypadku opisywanym przez Witelona jest to hiperbola.



Rys. Z8. Wykonanie zwierciadeł stożkowych. A – wypukłego, B – wklęsłego. Materiał żelazo

Zwierciadło stożkowe wypukłe otrzymujemy przecinając stożek ścięty, przedstawiony na rysunku Z8A w płaszczyźnie AA. Zwierciadło stożkowe wklęsłe otrzymujemy przecinając bryłę przedstawioną na rysunku Z8B w płaszczyźnie AA i usuwając części oznaczone $\times\times\times\times$

VI. Skorowidz

Skorowidz obejmuje w zasadzie podstawowe terminy i pojęcia. Z uwagi na wielką częstotliwość występowania słów objętych skorowidzem, podajemy jedynie referencje do miejsc najważniejszych, w których zostały zdefiniowane bądź dokładnie zostały omówione interesujące nas terminy.

A

aberracja sferyczna, 20, 24, 25
Al – Kindi patrz Alhazen
Alhazen, 43, 53, 56, passim
Antemiusz, 42, 45, 48
Apień, 4
Arystoteles, 142

B

barwa, 32, 55, 57, 58, 59, 83, 103
Belke G., 6
Bieganowski L., 1, 27, 31
Bielski A., 1, 4, 6, 9, 27, 31, 55
Birkenmajer A., 2, 7
Buffon, 154
Burchardt J., 2, 3, 8
Bystrzycki J., 5, 6, 38, 42

C

cień, 10
chropowatość, 34, 58
Cuvier J., 6
Czartoryski P., 7
Czech J., 35

D

dioptryka, 2
długość fali światła, 32
– linii odbicia, 35
– – padania, 35

– stożka, 310, 317, 322, 357, 358,
365, 370, 374
– zwierciadła, 309, 316, 323, 324,
325, 332, 333, 335, 337, 338, 340, 342,
343, 344, 346, 347, 349, 350, 353, 355,
359, 361, 364, 367, 369, 373, 374, 376,
377, 382, 385, 391,
393, 395, 399, 401, 402, 407, 408,
409, 411

Drozdowski H., 6

Dygdała R. S., 1

E

Euklides, 4, 36, 39, passim

F

Fermat P., 13, 14, 33, 35
forma, 96, 104, 108, 109, 118, 120, 133,
134, 135
– padająca, 82, 83, 93, 104
– punktu, 82, 321, 336, 337, 338, 339,
340, 342, 344, 347, 349, 353, 354, 355,
356, 361, 364, 366, 369, 372, 375, 389,
390, 391, 393, 396, 399, 404, 407
– rzeczy, 55, 86, 103

G

gładkość, 55
granica obrazu, 204, 309
Grotowski, 20, 21

H

Helmholtz M., 1, 21
 Heron z Aleksandrii, 39, 40
 Herzberger M., 30

K

katoptryka, 2, 52, 53
 kąt
 – odbicia, 56, 68, 71, 72, 73, 74, 75, 80, 82, 88, 91, 98, 110, 111, 115
 – padania, 13, 34, 56, 68, 71, 72, 73, 74, 75, 80, 81, 82, 85, 88, 91, 98, 110, 111, 112, 115
 – styczności, 81, 88
 – wewnętrzny, 195
 koniec styczności, 156, 171, 172, 220, 238, 247, 248, 249, 252, 258, 261, 267, 268, 309

Kremer A., 6

L

linia
 – odbicia, 15, 16, 33, 38, 39, 43, 46, 47, 51, 55, 62, 69, 86, 87, 93, 94, 97, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 115, 117, 119, 121, 127, 135, 136, 137, 138
 – padania, 5, 7, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 28, 29, 33, 37, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 55, 88, 62, 69, 107, 135, 137, 138
 – prostopadła, 10, 80
 – styczna, 79, 157, 315, 323, 349, 371, 378, 382, 389

Ł

łuk koła, 156, 158, 162, 175, 194, 195, 208, 211, 212, 243, 252, 255, 263, 265, 266, 270
 – koncentryczny, 249, 251, 254
 105, 115, 120, 130, 137

M

Massahala, 40
 miejsce obrazu, 37, 192, 197, 199, 201, 202, 03, 205, 206, 210, 212, 216, 219, 234, 246, 249, 266, 387, 388, 389, 391, 394, 399, 406

N

natężenie
 – światła odbitego, 35
 światła padającego, 34

– światła pochłoniętego, 34
 – światła przechodzącego, 34
 natura światła 30

O

obraz, 5, 6, 10, 12, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 53, 54, 55, 56, 104, 131, 167, 168, 169, 171, 173, 174, 177, 191, 192, 193, 194, 195, 199, 201, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 210, 212, 214, 215, 217, 219, 220, 221, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276
 – pozorny (urojony), 12, 17, 21
 – powiększony, 45
 – prawidłowy, 9
 – przedmiotu, 10, 18, 26, 38, 44, 55, 56
 – punktu, 191, 219, 245, 246, 248, 249, 266
 – rzeczywisty, 10, 12, 18, 29
 – zakrzywiony, 392, 393, 395, 396, 400, 401, 407
 odbicie
 – regularne, 8
 – światła, 2, 13, 20, 30, 58
 – prawo, 14
 ognisko, 21
 ogniskowa, 21
 optyka, 1, 2
 – atmosfery, 2
 – fizjologiczna, 1, 2
 – geometryczna, 11, 14, 15
 oś, 309, 310, 312, 318, 319, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 331, 332, 333, 334, 336, 337, 339, 340, 343, 344, 345, 346, 348, 350, 357, 361, 364, 367, 369, 371, 373, 378, 382, 385, 391, 392, 393, 395, 396, 398, 400, 401, 402, 406, 408, 410
 – optyczna, 26
 – główna, 26
 – zwierciadła cylindrycznego, 309
 – – stożkowego, 309

P

Pieńkowski, 11, 14, 26
 płaszczyzna, 38
 – horyzontu, 310
 – odbicia, 56, 87, 88, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 108, 113, 116, 117, 118, 119, 123, 157, 164, 166, 169, 170, 171, 173, 177,

179, 180, 181, 183, 184, 191, 193, 194,
195, 197, 201, 206, 207, 208, 211, 212,
213, 218, 220, 221, 237, 238, 239, 242,
247, 250, 254, 309, 311, 312, 313, 315,
316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323,
324, 325, 326, 327, 328, 329, 331, 334,
335, 338, 350, 358, 362, 376, 387, 388,
389, 392, 393, 396, 410

– padania, 250, 253

– styczna, 56, 87, 88, 94, 101, 314, 318,
321, 328, 329, 330, 336, 338, 340, 349,
350, 353, 362, 367, 372, 373, 378, 380,
381, 385, 386, 402

powierzchnia

– odbicia, 56

– padania, 56, 91, 92, 100, 102, 104,
105, 115, 120, 130, 137, 309

– zwierciadła, 55, 56, 76, 77, 78, 81,
83, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 96,

97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 108, 109

prawo odbicia, 14

prostopadła do płaszczyzny, 56, 65, 88

– odbicia, 309

przezroczystość, 32, 34

Ptolemeusz, 3, 39, 42, 113, 114, *passim*

punkt, 12, 17, 21, 22, 23, 28, 30, 39, 42, 44,

45, 46, 47, 49, 51, 52, 53

– odbicia, 18, 20, 29, 40, 44, 45, 52

– padania, 55

– przecięcia, 372, 377

– rzeczy widzianej, 217, 243, 309, 316,
318, 319, 321, 322, 326, 327, 329, 331,
337, 338, 339, 349, 353, 357, 360, 363,
364, 365, 369, 370, 371, 372, 376, 388,
389

– styczności, 160, 175, 200, 207, 211,
212

R

Risner F., 2, 3, 4, 56, *passim*

S

Sawicki K., 6

Smith A. M., 5, 7, 33, 42, 142, 143, 144,
passim

Szczeniowski S., 13

Szokalski W., 7

Ś

średnica, 47

– widzenia, 156, 157, 179, 249, 251, 309

– zwierciadła, 160, 200

– – kulistego, 156

środek oka, 39, 44, 45, 51, 52, 54, 77, 79,

84, 85, 89, 93, 95, 98, 111, 115, 118,

123, 125, 129, 133, 134, 135, 139, 156,

161, 164, 165, 167, 173, 177, 180, 181,

184, 192, 194, 200, 204, 207, 220, 226,

243, 245, 246, 250, 255, 261, 262, 263,

264, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315,

316, 318, 322, 323, 326, 327, 328, 332,

333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 342,

343, 344, 347, 349, 353, 354, 355, 357,

360, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369,

370, 371, 372, 373, 376, 388, 389, 391,

393, 395, 396, 397, 398, 401, 407, 408,

411

światło, 57, 58, 59, 60, 62, 84

– odbite, 57, 59, 60, 71

T

Tanstetter, 4

Trzynadłowski J., 25

U

Unguru S., 4, 5, 36

W

widzenie, 1

– przez odbicie, 1

– przez załamanie, 2

Wilde E.,

Witelo, Witelon, *passim*

Wituski L., 6

Wiszniewski M., 6

Wojciechowski, 6, 23

Wróblewski W., 1, 2, 4, 6, 9, 27, 31, 51, 55

wypukłość, 119

Z

zasada Fermata, 14, 15, 36

zwierciadła, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 20,

21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32,

35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46,

47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55

– cylindryczne, 309, 310, 312, 314,

315, 320, 325, 326, 329, 331, 335, 337,

338, 339, 343, 344, 376, 377, 391, 392,

395, 396, 400, 401, 410

– – wypukłe, 313, 314, 315, 316,

317, 318, 324, 327, 332, 337, 376, 387,

388, 389, 410

– kuliste wklęsłe, 7, 155

– – wypukłe, 2, 6, 19, 25, 28, 43,

44, 45, 53, 74, 79, 80, 119

- płaskie, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56
 - wypolerowane, 2, 34, 54, 57, 58, 75, 105
 - stożkowe, 6, 15, 31, 37, 50, 74, 75, 309, 317, 320, 321, 322, 323, 347, 349, 353, 356, 357, 363, 372, 380, 384, 401
 - wypukłe, 321, 410
 - zapalające, 137
- zniekształcenie obrazu 24, 28

STUDIA COPERNICANA

- I. Aleksander Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences et de la philosophie du Moyen Age*, Wrocław, 1970.
- II. Mieczysław Markowski, *Burydanizm w Polsce w okresie przedkopernikańskim*, Wrocław, 1971.
- III. Barbara Bieńkowska, *Kopernik i heliocentryzm w polskiej kulturze umysłowej do końca XVIII wieku*, Wrocław, 1971.
- IV. Aleksander Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences en Pologne*, Wrocław, 1972.
- V. *Colloquia Copernicana I. Études sur l'audience de la théorie héliocentrique* (Toruń, 1973), Wrocław, 1972.
- VI. *Colloquia Copernicana II. Études sur l'audience de la théorie héliocentrique* (Toruń, 1973), Wrocław, 1973.
- VII. Marian Biskup, *Regesta Copernicana*, Wrocław, 1973.
- VIII. Marian Biskup, *Regesta Copernicana, Calendar of Copernicus' Papers*, Wrocław, 1973.
- IX. Bronisław Biliński, *Najsraszy życiorys Mikołaja Kopernika z roku 1588 pióra Bernardina Baldiego*, Wrocław, 1973.
- X. Karol Górski, Łukasz Watzenrode. *Życie i działalność polityczna (1447–1512)*, Wrocław, 1973.
- XI. Grażyna Rosińska, *Instrumenty astronomiczne na Uniwersytecie Krakowskim w XV wieku*, Wrocław, 1974.
- XII. Zofia Wardęska, *Teoria heliocentryczna w interpretacji teologów XVI wieku*, Wrocław, 1975.
- XIII. *Colloquia Copernicana III. Proceedings of the Joint Symposium of the IAU and the IAHS. Astronomy of Copernicus and Its Background* (Toruń, 1973), Wrocław, 1975.
- XIV. *Colloquia Copernicana III. Conférences des Symposia: l'audience de la théorie héliocentrique. Copernic et le développement des sciences exactes et sciences humaines* (Toruń, 1973), Wrocław, 1975.
- XV. *Witelonis Perspectivae Liber Primus*. Book I of Witelo's, *Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary, and Latin Edition of the Mathematical Book of Witelo's *Perspectiva* by Sabetai Unguru. Wrocław, 1977.
- XVI. *Science and History. Studies in Honor of Edward Rosen*, Wrocław, 1978.
- XVII. *Nicholas Copernicus. Quincentenary Celebrations. Final Report*, edited by Zofia Wardęska, Wrocław, 1977.
- XVIII. Jerzy Drewnowski, *Mikołaj Kopernik w świetle swej korespondencji*, Wrocław, 1978.
- XIX. Jerzy Burchardt, *List Witelona do Ludwika we Lwówku Śląskim. Problematyka teoriopoznawcza, kosmologiczna i medyczna*, Wrocław, 1979.
- XX. *Georgii Joachimi Rhetici Narratio Prima*. Édition critique, traduction française et commentaire par Henri Hugonnard-Roche et Jean-Pierre Verdet, avec la collaboration de Michel Lerner et Alain Segonds, Wrocław, 1982.
- XXI. Erna Hilfstein, *Starowolski's Biographies of Copernicus*, Wrocław, 1980.
- XXII. Grażyna Rosińska, *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracow. A Census of Manuscript Sources, 14–16th Centuries*, Wrocław 1984.
- XXIII. *Witelonis Perspectivae Liber Quintus*. Book V of Witelo's *Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary, and Latin Edition of the First Catoptrical Book of Witelo's *Perspectiva* by A. Mark Smith, Wrocław, 1983.

- XXIV. Grażyna Rosińska, *Optyka w XV wieku. Między nauką średniowieczną a nowożytną. Fifteenth-Century Optics. Between Medieval and Modern Science*, Wrocław, 1985.
- XXV. Pavel Spunar, *Repertorium auctorum Bohemorum propectum idearum post Universitatem Pragensem conditam illustrans*, vol. 1, Wrocław, 1985.
- XXVI. Jane L. Jervis, *Cometary Theory in Fifteenth-Century Europe*, Wrocław, 1985.
- XXVII. *Thomae de Wratislavia Practica medicinalis*. A Critical Edition of the Practica medicinalis of Thomas of Wrocław, Prémontré, Bishop of Sarepta (1297–c.1378) by Theodore Antry, O. Praem, Wrocław, 1989.
- XXVIII. *Witelonis Perspectivae liber secundus et liber tertius*. Book I and III od Witelo's Perspectiva. A critical Latin Edition and English translation with Introduction. Notes and Commentaries by Sabetai Unguru, Wrocław, 1991.
- XXIX. *Witelona Perspektywa księga II i księga III*. Przekład na język polski ze wstępem, opracowaniem i komentarzami. Redaktor przekładu: Witold Wróblewski. Przekład, opracowanie i komentarz: Lech Bieganowski, Andrzej Bielski, Roman S. Dygdała, Witold Wróblewski, Wrocław, 1991.
- 1(XXX). Janice Adrienne Henderson, *On the Distances between Sun, Moon, and Earth according to Ptolemy, Copernicus and Reinhold*, Leiden, 1991.
- XXXI. Jerzy Burchardt, *Kosmologia i psychologia Witelona*, Wrocław, 1991.
- XXXII. Elżbieta Witkowska-Zaremba, *Musica Muris i nurt spektakularny w muzykografii średniowiecznej*, Warszawa, 1995.
- XXXIII. *Witelona Perspektywy księga IV*. Przekład na język polski ze wstępem i komentarzami. Przekład: Witold Wróblewski. Wstęp, opracowanie przekładu i komentarz: Lech Bieganowski, Andrzej Bielski, Witold Wróblewski, Wrocław, 1991.
- XXXIV. Jacek Soszyński, *Kronika Marcina Polaka i jej średniowieczna tradycja rękopiśmienna w Polsce*, Warszawa, 1995.
- XXXV. Pavel Spunar, *Repertorium auctorum Bohemorum propectum idearum post Universitatem Pragensem conditam illustrans*, vol. 2, Varsaviae-Pragae, 1995.
- XXXVI. Jerzy Burchardt, *Higiena wedle Tomasza z Wrocławia*, Warszawa, 1997.
- XXXVII. Stefan Swieżawski, *L'univers la philosophie de la nature au XVe siècle en Europe*. Traduit du polonais par Jerzy Wolf. Texte revu par Lucien Even. Varsovie, 1999.
- XXXVIII. Wiesław Wójcik, *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuu*, Warszawa 2000.
- XXXIX. Michał Kokowski, *Thomas S. Kuhn (1922-1996) a zagadnienie rewolucji kopernikowskiej*, Warszawa 2001



Na obwolucie rysunek z:
Perspektywy Witelona V, 5;

na okładce rysunek z: dzieła
Kopernika *O obrotach* III, 20.

Biblioteka Główna UMK



300041787469

ISSN 0081 – 6701

890568

