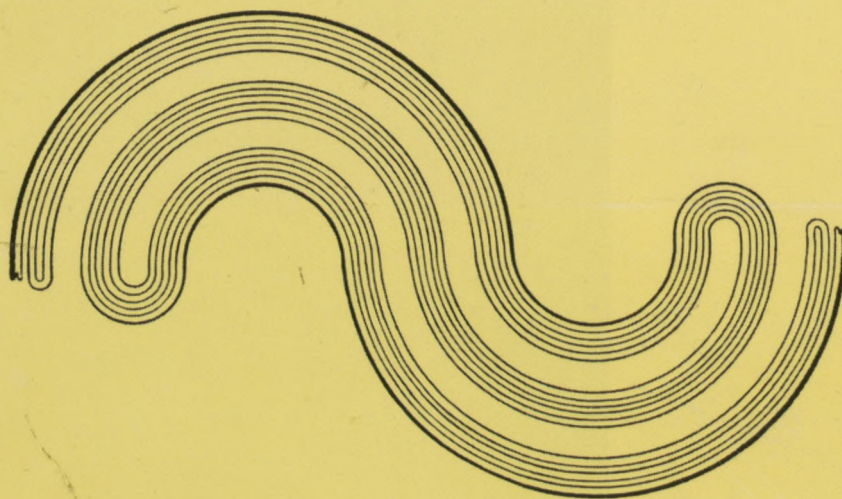


# STUDIA COPERNICANA



WIESŁAW WÓJCIK

---

NOWOŻYTNE WIZJE NAUKI UNIWERSALNEJ  
A POWSTANIE TEORII KONTINUÓW

\*\*\*

MODERN VISIONS  
OF *MATHESIS UNIVERSALIS*  
AND THE ORIGIN  
OF THE CONTINUUM THEORY

VIII

530

138

STUDY COPY  
JAN 1935

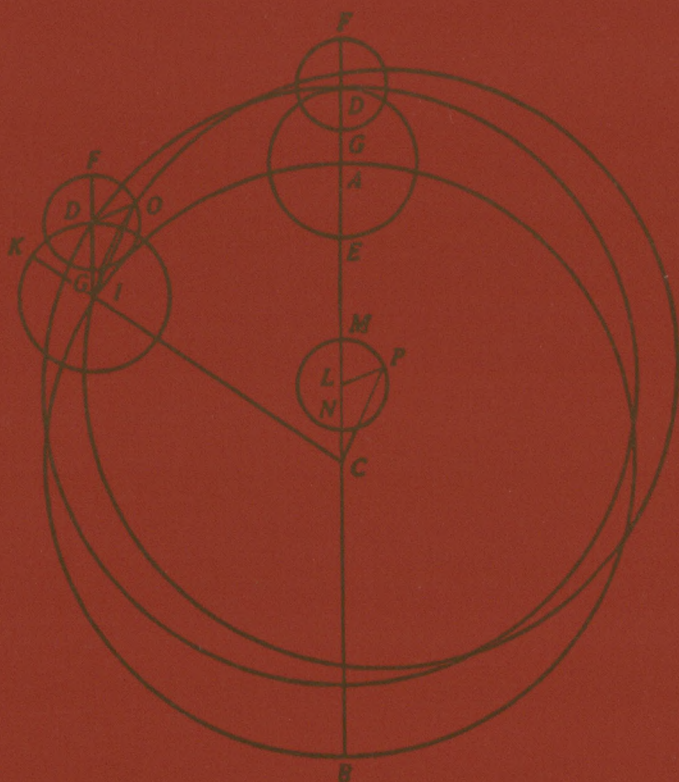
STUDY COPY

JAN 1935



POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT HISTORII NAUKI

# STUDIA COPERNICANA XXXVIII





## STUDIA COPERNICANA

wydawane przez Polską Akademię  
Nauk dotyczą postaci wielkiego  
astronoma i jego czasów, jak również  
szeroko pojętej problematyki dziejów  
nauki przed Kopernikiem i recepcji  
jego dzieła.

Na obwolucie: „Podkowa  
Smile'a” il. z *Fundamenta  
Mathematica* III, 1922, s. 216

Na okładce: rysunek z  
*De revolutionibus* III, 20

**Nowożytne wizje nauki uniwersalnej  
a powstanie teorii kontinuumów**

**Modern Visions of *Mathesis Universalis*  
and the Origin of the Continuum Theory**

Modern Visions of *Mathesis Universalis*  
and the Origin of the Continuum Theory

WYDAWCTWA BIAŁY  
WARSZAWA 2001



POLISH ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE FOR THE HISTORY OF SCIENCE  
CENTRE FOR COPERNICAN STUDIES

Nowożytna wizja nauki uniwersalnej  
a powstanie teorii kontinuum  
Modern Visions of Mathesis Universalis  
and the Origin of the Continuum Theory

STUDIA COPERNICANA  
XXXVIII

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT HISTORII NAUKI  
ZAKŁAD BADAŃ KOPERNIKAŃSKICH

**WIESŁAW WÓJCIK**

**Nowożytnie wizje nauki uniwersalnej  
a powstanie teorii kontinuumów**

**Modern Visions of *Mathesis Universalis*  
and the Origin of the Continuum Theory**

WYDAWNICTWA IHN PAN  
WARSZAWA 2000



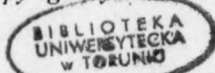
KOMITET REDAKCYJNY

MARIAN BISKUP, JERZY BURCHARDT, PAWEŁ CZARTORYSKI  
(redaktor naczelny) JERZY B. KOROLEC, STANISŁAW MOS-  
SAKOWSKI, JOHN D. NORTH, GRAŻYNA ROSIŃSKA (zastępca re-  
daktora naczelnego) ALAIN SEGONDS, PAVEL SPUNAR, SABETAI  
UNGURU, WITOLD WRÓBLEWSKI (obecny redaktor naczelny)

Redaktor tomu:  
GRAŻYNA ROSIŃSKA

© Copyright by Studia Copernicana

© Copyright by Wiesław Wójcik



PL ISSN 0081-6701  
ISBN 83-86062-86-X

814819

sept. Pom

WYDAWNICTWA IHN PAN

STUDIA COPERNICANA: Pałac Staszica, ul. Nowy Świat 72, pok. 4  
PL 00-330 Warszawa, tel. (22) 6572836, fax (22) 826 61 37

WYDAWNICTWA IHN PAN: Pałac Staszica, ul. Nowy Świat 72, pok. 17  
PL 00-330 Warszawa, tel. (22) 6572748, fax (22) 826 61 37 Poland

Skład: Wydawnictwo Retro-Art., ul. Em. Plater 25,  
PL 00-688 Warszawa, tel. 625 45 04

Druk: Paper&Tinta, ul. Bardowskiego 4, Warszawa, tel. 679 20 26

K. 310/01

## SPIS TREŚCI:

|                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Przedmowa.....                                                                                                            | IX |
| Wstęp.....                                                                                                                | 1  |
| 1. Metody badań historii matematyki.....                                                                                  | 15 |
| § 1. Wartość historii nauki.....                                                                                          | 15 |
| § 2. Kontekst historii nauki.....                                                                                         | 18 |
| § 3. Metoda Lakatosa analizy powstawania i rozwoju pojęć matematycznych.....                                              | 21 |
| § 4. Konsekwencje twierdzeń Tarskiego dla badań historii matematyki.....                                                  | 23 |
| § 5. Fakt historyczny a teoria prawdziwości zdań Fregego.....                                                             | 32 |
| § 6. Ogólny schemat badań historii matematyki.....                                                                        | 34 |
| 2. Problem <i>continuum</i> .....                                                                                         | 39 |
| § 1. Próba intuicyjnego określenia pojęcia <i>continuum</i> .....                                                         | 39 |
| § 2. Pojęcie <i>continuum</i> w topologii.....                                                                            | 41 |
| § 3. Połączenie idei z materią u Platona a problem <i>continuum</i> .....                                                 | 50 |
| § 4. Analiza pojęcia <i>continuum</i> u Arystotelesa.....                                                                 | 53 |
| § 5. Paradoksy dotyczące <i>continuum</i> .....                                                                           | 55 |
| 3. Filozofia jako poszukiwanie pewności.....                                                                              | 67 |
| § 1. Wprowadzenie podstawowych pojęć filozoficznych.....                                                                  | 67 |
| § 2. Sokrates i odkrycie racjonalnej struktury świata.....                                                                | 68 |
| § 3. Odkrycie przez Platona cyrkularnej struktury wiedzy prowadzącej do prawdy.....                                       | 69 |
| § 4. Prawda jako ostateczny argument rozumu w rozumieniu Arystotelesa.....                                                | 70 |
| § 5. Odkrycie Mikołaja Kuzańczyka – symbole matematyczne jako narzędzia umożliwiające niesprzeczne poznawanie świata..... | 71 |
| § 6. Kartezjusz – doświadczenie podmiotu myślącego jako generatora i gwaranta obiektywnej wiedzy.....                     | 73 |
| § 7. Dwie nieskończoności Leibniza.....                                                                                   | 74 |
| § 8. Kant a znaczenie czystych idei rozumu.....                                                                           | 75 |
| § 9. Popper i odkrycie autonomicznej i obiektywnej wiedzy jako elementu istoty człowieka.....                             | 76 |
| § 10. Koncepcja prawdy Heideggera.....                                                                                    | 78 |
| § 11. Fakty filozoficzne i absolut poznawczy.....                                                                         | 79 |
| § 12. Miejsce matematyki w strukturze wiedzy u Arystotelesa.....                                                          | 82 |
| § 13. Platońska koncepcja nauki uniwersalnej.....                                                                         | 83 |
| § 14. Pitagorejska koncepcja nauki uniwersalnej.....                                                                      | 86 |
| § 15. Metoda Archimedejska.....                                                                                           | 89 |

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 15. Metoda Archimedejska.....                                                            | 89  |
| 4. Nowożytne koncepcje <i>mathesis universalis</i> .....                                   | 95  |
| § 1. Kartezjańskie kryteria prawdy.....                                                    | 95  |
| § 2. Kartezjański absolut poznawczy.....                                                   | 98  |
| § 3. Kartezjański schemat nauki uniwersalnej.....                                          | 101 |
| § 4. Leibnizjańska wizja nauki uniwersalnej.....                                           | 103 |
| § 5. Program Leibniza .....                                                                | 107 |
| § 6. Program Kartezjusza.....                                                              | 108 |
| 5. Nowy program matematyzacji wiedzy.....                                                  | 117 |
| § 1. Filozofia poznania Riemanna.....                                                      | 117 |
| § 2. Filozofia naturalna.....                                                              | 122 |
| § 3. Bolzano i podstawy nowej idei nauki uniwersalnej.....                                 | 127 |
| § 4. <i>Continuum</i> geometryczne Bolzano.....                                            | 130 |
| § 5. Rozmaitość Riemanna a idea <i>continuum</i> .....                                     | 136 |
| § 6. Powstanie <i>continuum</i> arytmetycznego - Dedekind.....                             | 139 |
| § 7. Pojęcie <i>continuum</i> a teoria mnogości.....                                       | 146 |
| § 8. Nowa idea nauki uniwersalnej.....                                                     | 154 |
| 6. Powstanie <i>continuum</i> topologicznego.....                                          | 169 |
| § 1. Filozofia matematyki Zygmunta Janiszewskiego.....                                     | 169 |
| § 2. Wprowadzenie topologicznych pojęć spójności i zwartości.....                          | 174 |
| § 3. Konstrukcja Brouwera pierwszego<br>nierozkładalnego <i>continuum</i> .....            | 179 |
| § 4. Charakteryzacja łuku i powierzchni metodami<br>topologicznymi.....                    | 184 |
| § 5. Idea konstrukcji <i>continuum</i> dziedzicznie nierozkładalnego.....                  | 189 |
| § 6. <i>Continuum</i> jako absolut poznawczy.....                                          | 201 |
| 7. Znaczenie powstania teorii <i>continuum</i> ów dla filozofii i historii matematyki..... | 211 |
| § 1. Nowe kryterium prawdy.....                                                            | 211 |
| § 2. Nowe kryterium prawdy a niektóre współczesne<br>koncepcje filozoficzne.....           | 218 |
| § 3. Analiza niestandardowa Abrahama Robinsona.....                                        | 225 |
| § 4. Matematyka a rzeczywistość.....                                                       | 228 |
| § 5. Historia matematyki.....                                                              | 232 |
| Bibliografia.....                                                                          | 243 |
| Summary.....                                                                               | 249 |
| Indeks nazwisk.....                                                                        | 261 |



## Contents:

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Preface.....                                                                                                            | IX |
| Introduction.....                                                                                                       | 1  |
| 1. Methods at research in the history of mathematics.....                                                               | 15 |
| § 1. The value of the history of science.....                                                                           | 15 |
| § 2. The context of the history of science.....                                                                         | 18 |
| § 3. Lakatos' method of analysing the birth and development<br>of mathematical concepts.....                            | 21 |
| § 4. The consequences of Tarski's theorems in the history<br>of mathematical research.....                              | 23 |
| § 5. A historical fact and the theory of truthfulness of sentences<br>according to Frege.....                           | 32 |
| § 6. A general pattern of research in the history of mathematics .....                                                  | 34 |
| 2. The problem of <i>continuum</i> .....                                                                                | 39 |
| § 1. An attempt at intuitive characteristics of <i>continuum</i> .....                                                  | 39 |
| § 2. The concept of <i>continuum</i> in topology.....                                                                   | 41 |
| § 3. The union of idea and matter in Plato and the problem<br>of <i>continuum</i> .....                                 | 50 |
| § 4. The analysis of the <i>continuum</i> concept in Aristotle.....                                                     | 53 |
| § 5. <i>Continuum</i> paradoxes.....                                                                                    | 55 |
| 3. Philosophy as a search for certitude.....                                                                            | 67 |
| § 1. The introduction of basic philosophical notions.....                                                               | 67 |
| § 2. Socrates and the discovery of the rational structure<br>of the world.....                                          | 68 |
| § 3. The Plato's discovery the circular structure of knowledge<br>leading to truth.....                                 | 69 |
| § 4. Truth as the final argument of the mind according<br>to Aristotle.....                                             | 70 |
| § 5. Nicholas of Cusa's discovery.....                                                                                  | 71 |
| § 6. Descartes – the experience of the thinking subject as a generator<br>and guarantor of the objective knowledge..... | 73 |
| § 7. Two infinities of Leibniz .....                                                                                    | 74 |
| § 8. Kant and the meaning of the pure ideas of reason.....                                                              | 75 |
| § 9. Popper and the discovery of autonomous and objective<br>knowledge.as an element of the esence of man.....          | 76 |
| § 10. Heidegger's conception of truth.....                                                                              | 78 |
| § 11. Philosophical facts and cognitive absolute.....                                                                   | 79 |
| § 12. The place of mathematics in Aristotle's structure<br>of knowledge.....                                            | 82 |
| § 13. The Platonic conception of <i>mathesis universalis</i> .....                                                      | 83 |
| § 14. The Pythagorean conception of <i>mathesis universalis</i> .....                                                   | 86 |
| § 15. The Archimedean method .....                                                                                      | 89 |

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. Two modern visions of <i>mathesis universalis</i> .....                                     | 95  |
| § 1. The Cartesian criteria of truth.....                                                      | 95  |
| § 2. The Cartesian cognitive absolute.....                                                     | 98  |
| § 3. The Cartesian scheme of <i>mathesis universalis</i> .....                                 | 101 |
| § 4. The Leibnizian vision of <i>mathesis universalis</i> .....                                | 103 |
| § 5. Leibniz's programme.....                                                                  | 107 |
| § 6. Descartes' programme.....                                                                 | 108 |
| 5. A new program of mathematization of knowledge.....                                          | 117 |
| § 1. Riemann's epistemology.....                                                               | 117 |
| § 2. Natural philosophy.....                                                                   | 122 |
| § 3. Bolzano and the basics of a new idea of <i>mathesis universalis</i> ....                  | 127 |
| § 4. Bolzano's geometrical <i>continuum</i> .....                                              | 130 |
| § 5. Riemann's manifold and the idea of <i>continuum</i> .....                                 | 136 |
| § 6. The origin of the arithmetical <i>continuum</i> – Dedekind.....                           | 139 |
| § 7. The concept of <i>continuum</i> and Set Theory.....                                       | 146 |
| § 8. The new idea of <i>mathesis universalis</i> .....                                         | 154 |
| 6. Generating topological <i>continuum</i> .....                                               | 169 |
| § 1. Janiszewski's philosophy of mathematics.....                                              | 169 |
| § 2. The introduction of topological concepts of connectedness<br>and compactness.....         | 174 |
| § 3. Brouwer's construction of the first indecomposable<br><i>continuum</i> .....              | 179 |
| § 4. A characteristic of an arc and sphere by means<br>of topological methods.....             | 184 |
| § 5. An idea of the construction of the hereditarily<br>indecomposable <i>continuum</i> .....  | 189 |
| § 6. <i>Continuum</i> as a cognitive absolute .....                                            | 201 |
| 7. The impact of <i>Continuum</i> Theory for the philosophy and history<br>of mathematics..... | 211 |
| § 1. A new criterion of truth.....                                                             | 211 |
| § 2. The new criterion of truth and some contemporary<br>philosophical conceptions.....        | 218 |
| § 3. Robinsons' Non-standard Analysis.....                                                     | 225 |
| § 4. Mathematics and reality.....                                                              | 228 |
| § 5. The history of mathematics.....                                                           | 232 |
| Bibliography.....                                                                              | 243 |
| Summary.....                                                                                   | 249 |
| Index of names.....                                                                            | 261 |

## Przedmowa

*Nowożytne wizje nauki a powstanie teorii kontinuum* Wiesława Wójcika stanowi pierwszą próbę ukazania, w wielu płaszczyznach: matematycznej, metodologicznej, historycznej, filozoficznej, uwarunkowań dla pojawienia się w topologii pojęcia *continuum*, tak znaczącego następnie dla ewolucji opisu matematycznego rzeczywistości fizycznej, począwszy od przełomu wieku XIX i XX oraz w wieku XX.

Autor ukazuje cechy, które zadecydowały o możliwości użycia w matematyce – i w sposób matematyczny – pojęcia, wprawdzie znanego w kulturze Zachodu od Starożytności, głównie jednak funkcjonującego jako uwikłane w filozoficzne koncepcje bytu. Stąd podjęta próba prześledzenia jak „intuicyjno-filozoficzne” rozumienie *continuum* było „przetwarzane” dla potrzeb matematyki i wpływało na jej rozwój w XIX i XX wieku, począwszy od Bolzano. Wiadomo bowiem, że już tzw. „geometryczny problem Bolzano” wymagał wypracowania pewnych nowych teorii i struktur matematycznych, wśród nich „topologicznego pojęcia wymiaru” oraz związanej z tym konieczności stworzenia teorii *continuum* geometrycznego. Natomiast próby skonstruowania *continuum* arytmetycznego skłoniły Dedekinda do poszukiwania odpowiedniości między prostą geometryczną a liczbami wymiernymi i w rezultacie dalszych prac do koncepcji liczby obejmującej poza liczbami wymiernymi także niewymierne, pomyślanej jako „narzędzie” dla realizacji *continuum* arytmetycznego. Poszukiwanie narzędzi matematycznych opisujących rzeczywistość fizyczną wyraziło się w podjętych przez Riemanna próbach skonstruowania pojęcia „wielkości wielokrotnie rozciągłej” a poprzedzone było ustaleniem „logicznych związków” między geometrią rozumianą jako czysta matematyka i jej zastosowaniem do wyrażenia przestrzeni fizycznej. Także w tym kierunku szły prace Cantora nad teorią liczb rzeczywistych, zainspirowane poszukiwaniem narzędzia matematycznego właściwego dla wyrażenia ciągłości procesów fizycznych (por. s.203). Pojęcie *continuum* topologicznego będzie kształtowane, z początkiem wieku XX, w pracach Brouwera i Janiszewskiego.

Rozprawa Wiesława Wójcika, członka zespołu Zakładu Badań Koper-nikańskich Instytutu Historii Nauki PAN, została przyjęta do serii *Studia Copernicana* – podobnie jak rozprawa ukazująca się w tej serii jako tom kolejny, XXXIX (Michała Kokowskiego: *Thomas S. Kuhn a „rewolucja koperni-*



kowska”) – przez Profesora Pawła Czartoryskiego, twórcę serii i jej redaktora naczelnego w ciągu ponad trzydziestu lat. Wśród wielu spraw, które *Studia* zawdzięczają swemu Twórcy, jest także otwarcie na problematykę obu wymienionych tomów. Odczytujemy je jako wynik szacunku dla historycznej ciągłości rozwoju ludzkiej myśli, postrzeganej także z perspektywy osiągnięć nauki współczesnej.

Z pewnością seria nie mogłaby dalej istnieć, gdyby zabrakło życzliwej gotowości do współpracy całego Komitetu Redakcyjnego oraz zrozumienia dla dzieła, połączonego z uczestnictwem w finansowaniu, ze strony Dyrekcji IHN PAN.

Grażyna Rosińska

### Foreword

The „Modern visions of science and the origin of *continuum* theories” from Wiesław Wójcik is devoted to the philosophical and mathematical background of the concept of topological *continuum*, created at the beginning of the 20<sup>th</sup> century.

Mr. Wójcik’s study, as well as the study that will appear as volume XXXIX of *Studia Copernicana* (Michał Kokowski, Thomas S. Kuhn and the ‘copernican revolution’) was accepted for publication by Professor Paweł Czartoryski, the creator of the *Studia Copernicana* series and its editor for more than thirty years.

Continuation of the *Studia Copernicana* would not be possible without the help of the Editorial Board and the financial support of the Direction of the Institute of the History of Science, Polish Academy of Sciences.

Grażyna Rosińska

## Wstęp

Niniejszą książkę tylko częściowo można potraktować jako historię powstania i rozwoju topologicznej teorii *continuumów*. Koncentruje się ona bowiem na samych narodzinach tej teorii i jej początkowym okresie rozwoju. Główny nacisk położony jest na ukazaniu wzajemnych zależności między pewnymi zagadnieniami filozoficznymi z teorii poznania i z teorii wiedzy (idea nauki uniwersalnej, definicja prawdy) a wprowadzaniem pojęcia *continuum* do matematyki.

Samo pojęcie *continuum* (przypisywane bardzo często strukturze przestrzeni i czasu) posiada znaczącą rangę filozoficzną i pojawiło się już na początku rozwoju filozofii europejskiej, głównie w paradoksach Zenona z Elei, megarejczyków i w rozważaniach Arystotelesa. Rozwój matematyki europejskiej, niemal od początku jej istnienia, był związany z pojęciem *continuum*. Miało to miejsce np. w związku z odkryciem odcinków niewspółmiernych przez pitagorejczyków, przy wprowadzaniu teorii stosunków Eudoksosa czy metody wyczerpywania Archimedesesa. Ten związek ujawnił się w sposób szczególny w czasach nowożytnych, kiedy Leibniz zaczął używać pojęcia wielkości nieskończenie małej, gdy odkryto rachunek różniczkowy i całkowy, gdy w końcu Dedekind i Cantor wprowadzili i zdefiniowali pojęcie *continuum* rzeczywistego. Nie dziwi też fakt, że również topologia (będąca swoistą filozofią geometrii) zetknęła się w swoim rozwoju z pojęciem *continuum*.

Główną inspiracją do podjęcia badań nad pojęciem *continuum* w kontekście filozoficzno-matematycznym były dwie książki Hermana Weyla: *The Continuum: a Critical Examination of the Foundation of Analysis* oraz *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Również artykuły René Thoma: *Czy możliwa jest matematyka kontinuum* i *Matematyka a rozumienie* oraz praca Dale M. Johnsona wydana w latach 1977-1980: *The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology* miały znaczący wpływ na podjęcie tych badań oraz ich kształt. Praca Johnsona w sposób szczegółowy analizuje źródła powstania topologicznej teorii wymiaru. Dostrzega bogatą ilość powiązań odkryć matematycznych z zagadnieniami i refleksją filozoficzną. Podjęta tam analiza historyczna pojęcia rozciągłości (ściśle związanego z pojęciem *continuum*) stała się punktem wyjścia dla badań zawartych w tej pracy. Chciałem ukazać, że funkcjonujące w matematyce pojęcie *continuum* niesie ze

sobą, jak sugeruje René Thom, usprawiedliwienie niektórych zagadnień filozoficznych, m.in. ukazując niesprzeczność nieskończoności aktualnej.

W różnych podręcznikach topologii można znaleźć (umieszczone głównie w przypisach) uwagi historyczne związane z powstaniem pojęć spójności, zwartości czy samego *continuum* topologicznego. Najwięcej informacji źródłowych znajduje się w książce K. Kuratowskiego *Topologie* wydanej w 1952 r. oraz G. T. Whyburna *Analytic topology* z 1942 r. W 1998 r. ukazał się drugi tom *Handbook of the History of General Topology* pod redakcją C. E. Aulla i R. Lowena, w którym znajduje się obszerny rozdział (napisany przez J. J. Charatonika) poświęcony historii teorii *continuu*ów. W małym stopniu dotyczy on jednak jej wczesnej historii. Ponadto, nie jest tam wykorzystywana metoda Lakatosa badań historyczny pozwalająca połączyć kontekst filozoficzny i matematyczny w jednej historycznej analizie.

Po książce I. Lakatosa *Proofs and Refutations* z 1976 r. dopiero T. Kestier w 1991 r. przeprowadził analizy historyczne (dotyczące m.in. pojawienia się pojęcia ciągłości u Cauchy'ego) w pełni wykorzystujące metodę Lakatosa. Praca niniejsza również stosuje tę metodę badań.

W rozdziale I, wykorzystując koncepcje prawdy Tarskiego oraz Fregego, nieco modyfikuję metodę Lakatosa, aby pełniej ukazać powiązania filozofii i matematyki. Jest to rozdział metodologiczny, w którym analizowane są różne sposoby podejścia do historii matematyki. Na początku naświetlony jest krótko spór między zwolennikami internalistycznej oraz eksternalistycznej koncepcji rozwoju nauki ze zwróceniem szczególnej uwagi na pozytywne strony obu koncepcji. Pokazana jest rola jaką niektórzy historycy matematyki (Kästner, M. Cantor, Tannery, Eneström, Loria i Vetter) przyznawali różnym elementom kulturowym w rozwoju matematyki. Podkreślona jest koncepcja **historii genetycznej** Vettera, jako zasługująca na szczególną uwagę ze względu na ukazanie, że historia matematyki jako taka ma swoje specyficzne zadania i swój własny kontekst. Badania w ramach tak rozumianej historii polegają na szukaniu wszystkich składników danego zjawiska, z jednoczesnym uwzględnieniem właściwej hierarchii rangi rozpatrywanych zdarzeń i wpływów (tego dotyczy § 1). Paragraf 2 poświęcony jest analizie pojęcia kontekstu historii nauki. Pokazane jest, że historia nauki ma sens jedynie wtedy, gdy bada „logikę rozwoju” teorii naukowych niezależną (przynajmniej w pewnym stopniu) od samej rozwijającej się teorii. W innym wypadku historia nauki zajmuje się powtórным odkrywaniem faktów, które dana teoria już kiedyś w przeszłości odkryła, a które zostały zapomniane lub nie są w dostatecznym stopniu doceniane – historia nauki traktowana jest zatem wtedy wyłącznie jako sztuka właściwego rozkładania akcentów. Jako przykład poszukiwania logiki rozwoju matematyki podana jest koncepcja Lakatosa. Pozwala ona zrozumieć w jaki sposób możemy mówić o kontekście historii nauki bez równoczesnego relatywizowania samej nauki i uzależniania jej od zmiennych okoliczności historycznych.

Dokładniej analizowana jest metoda Lakatosa w § 3, w oparciu o analizy zawarte w książce *Proofs and Refutations* dotyczące pojawienia się w matematyce pojęcia jednostajnej zbieżności. Te analizy można traktować przede wszystkim jako argument za istnieniem wewnętrznej logiki rozwoju teorii matematycznych. Nie tyle ważny jest rzeczywisty czas pojawienia się jakiegoś odkrycia naukowego, co „czas wewnętrzny”, który ukazuje kierunki rozwoju i zależności danych struktur matematycznych. Celem badań w ramach historii matematyki jest nie tyle wskazanie kiedy dane odkrycie miało miejsce i jak do niego doszło, lecz ukazanie jak nowo odkryte pojęcia czy metody dowodowe skupiają wokół siebie różnorodne problemy i zagadnienia (*stricte* matematyczne jak i filozoficzne) oraz naświetlają sposoby ich rozumienia i rozwiązywania. Lakatos analizując odkrycie pojęcia jednostajnej zbieżności nie koncentruje się na jego odkryciu (nie ważny jest również czas jego pojawienia się), lecz ukazuje mechanizm (logikę rozwoju) odpowiedzialny za powstanie tego pojęcia – jest to tzw. metoda *dowodów i kontrprzykładów*. Jest ona ogólnym schematem matematycznego odkrycia lub rozwoju matematycznych teorii.

Kolejna część rozdziału poświęcona jest uogólnieniu metody Lakatosa i próbie zobaczenia w niej również schematu badań w ramach historii matematyki. Głównymi narzędziami, które służą do tego uogólnienia są twierdzenia Tarskiego, związane z jego definicją prawdy, jak i twierdzenie o dedukcji oraz koncepcja prawdziwości zdań Fregego. Twierdzenie Tarskiego o prawdzie mówi, że nie istnieje możliwość sformułowania poprawnej definicji prawdy, jeśli metajęzyk, w którym tę definicję formułujemy, nie jest istotnie bogatszy od języka przedmiotowego. Próba zinterpretowania definicji prawdy w języku przedmiotowym prowadzi nieuchronnie do pojawienia się paradoksu kłamcy, natomiast bogactwo metajęzyka daje możliwość uniknięcia takiej konsekwencji.

Analogicznie możemy założyć, że modele teoretyczne, w ramach których badamy naukę, winny być bogatsze od świata opisywanych faktów historycznych. Muszą pojawić się w tym modelu pewne byty teoretyczne nie mające przełożenia na fakty historii nauki – istnienie tych bytów jest konieczne do tego, aby pojęcie prawdy miało sens i było niesprzeczne. Ponadto, dowód (czyli analizy historyczne) nie jest wystarczający do uchwycenia sensu i znaczenia pewnych faktów. Trzeba mieć inne narzędzia opracowane w metajęzyku, czyli osiągalne poprzez skonstruowany model rozwoju nauki. Gdy chodzi natomiast o wniosek z twierdzenia o dedukcji, to prowadzi on do następującej analogii. Jeśli analizujemy daną teorię naukową w danym momencie jej rozwoju, to odkryte zależności oraz znaczenia pojęć i struktur zachowują swoją rangę i wartość w innym kontekście historycznym. Raz odkryte zależności pozwalają na patrzenie na inne związane z nimi (i określone przez nie) wydarzenia z historii nauki jako na wydarzenia „sensowne” i racjonalne. Dowodzi to niezależności nauki od uwarunkowań historycznych, a zarazem ukazuje sens i potrzebę analiz historycznych dla zrozumienia istoty i rangi danych struktur i pojęć nauki. Natomiast analiza koncepcji Fregego (której centralnym punktem jest pojęcie „treści pojęciowej”



zdania), pozwala na „desubiektywację” zdań – treść zdania nie zależy od wyboru części zdania pełniącej rolę podmiotu. Ponadto otrzymujemy zbiór faktów jako faktów samych w sobie, o których nic nie orzekamy. Możemy więc zrezygnować z założenia, że istnieje jakaś „zewnętrzność” (warunki psychiczne, kulturowe, socjologiczne itp.), która ten fakt wyjaśnia. Cała treść mieści się w tym fakcie i aby to w pełni zobaczyć trzeba go tylko odpowiednio sformułować i poddać analizie. Do ukazania faktów służy bieżący stan nauki. Tylko przez jego pryzmat możemy patrzeć na historię – bez niego żadna nowa treść ani nowy fakt historyczny nie może zostać odkryty, gdyż jest po prostu niewidoczny. W ostatnim 6 paragrafie, w oparciu o wcześniejsze uwagi, sformułowany jest schemat badania dziejów struktur matematycznych (pojęć, dowodów). Zgodnie z tym schematem prowadzone są analizy w dalszej części pracy.

W oparciu o przedstawiony w rozdziale I schemat badań historycznych w rozdziale II mają miejsce analizy dotyczące pojęcia *continuum*. Intuicja *continuum* opiera się na dwóch własnościach: nieskończonej podzielności oraz przylegania sąsiadujących części do siebie. Po krótkiej ogólnej charakterystyce ukazany jest związek problemu istnienia *continuum* z zagadnieniem poszukiwania *arché*. Rozważania jońskich filozofów zwróciły uwagę na konieczność istnienia w rzeczywistym świecie elementu, który byłby niewyczerpywalny i charakteryzowałby się „pełnością”. *Continuum* przejawia cechy *arché* w dwóch zasadniczych punktach: jest niezniszczalne w przypadku podziału (każda najmniejsza cząstka *continuum* jest nadal *continuum*) oraz wypełnia sobą całą zajmowaną przestrzeń (jest tak położone, że nie ma w nim miejsca na byt innego rodzaju). Podział *continuum* na części oraz umiejscowienie poszczególnych części *continuum* w całości i względem siebie, są to kwestie, które pozwalają widzieć w strukturze *continuum* kontynuację problemu *arché*.

W celu „wzmocnienia” pierwotnych intuicji pokazane jest następnie (w paragrafie 2) jak w topologii zostało zdefiniowane pojęcie *continuum* (topologicznego). Wyjaśnia się jak części składowe topologicznego pojęcia *continuum* (zwartość i spójność) odpowiadają intuicyjnemu rozumieniu tego pojęcia.

„Techniczny” problem platońskiego Demiurga polegający na połączeniu idei z materią (tak zasadniczo różnych elementów) stał się okazją w paragrafie 3 do ukazania znaczenia struktur matematycznych dla zrozumienia problemu *continuum*. W szczególności teoria stosunków Eudoksosa naświetla metodę łączenia obiektów, z natury od siebie oddzielonych, przy pomocy odpowiednich struktur matematycznych. Jak bowiem połączyć liczby w jedno *continuum*, jak użyć liczb do mierzenia wielkości geometrycznych? Czy wystarczy ta ich własność, że w ciągu liczb wymiernych nie ma liczb kolejno po sobie następujących? Czy możliwe jest przejście między dowolnymi liczbami  $p$  i  $q$ ? Problem uległ szczególnemu zaostreniu, gdy odkryto istnienie wielkości geometrycznych, których nie da się wyrazić przy pomocy stosunku liczb. Chodzi o stosunek długości przekątnej kwadratu do długości jego boku. Okazało się, że brak jest pewnej „spoistości” w strukturze liczb wymiernych. Dopiero zasada

Archimedesesa okazała się właściwym narzędziem do nadania liczbom wymiernym spoistości.

Sytuacja komplikuje się w miarę dołączania kolejnych zagadnień filozoficznych, które wiążą się z problemem *continuum*. Szczególną moc i aktualność zdają się mieć analizy Arystotelesa (przedstawione w paragrafie 4) i paradoksy Zenona z Elei (paragraf 5), ukazujące trudność w zrozumieniu pojęcia *continuum* i atakujące realność tego pojęcia. Wiele kluczowych zagadnień podjętych przez starożytnych zdaje się ogniskować w tym pojęciu. Może jest tak, że założenie o istnieniu *continuum* jest konieczne, aby rozwiązać czy zrozumieć podjęte problemy. Sprzeczności, na które napotykamy przy analizie *continuum*, są wskaźnikiem niezrozumienia niektórych zdawałoby się oczywistych kwestii, a nie dowodem „nieracjonalności” *continuum*. Okazuje się, że ani formalne, ani intuicyjne rozumienie nie wystarcza, aby wyjaśnić te kwestie. I w ten sposób pojawia się pierwotna hipoteza jako komentarz do paradoksów eleackich.

Rozważania rozdziału III tworzą klimat filozoficzny, w którym będą przebiegały dalsze analizy. Wprowadzone pojęcia „faktu filozoficznego” i „absolutu poznawczego”, wraz z przykładami ich pojawiania się u różnych filozofów (§1-§11), zostaną w ostatnim rozdziale wykorzystane do ukazania wpływu matematyki na rozstrzygnięcia teoriopoznawcze w filozofii. Już na początku, jako wstęp do dalszych rozważań, wykorzystany jest fakt filozoficzny odkryty przez Sokratesa. Stwierdza on, że możliwe jest odsłonięcie racjonalnej struktury bytu poprzez demaskowanie fałszywych mniemań i pozorów wiedzy. Dzieje się to przy pomocy metody oczyszczania i rodzenia pojęć. Absolut poznawczy odkryty przez Sokratesa chyba najpełniej jest „realizowany” w matematyce. To właśnie refleksja filozoficzna wyłaniająca się z obszaru matematyki podjęła najbardziej fundamentalne zagadnienia teoriopoznawcze i ontologiczne. Rozstrzygnięcia dokonywane w matematyce miały znaczący wpływ na kierunek i rodzaj rozpatrywanych zagadnień w filozofii. Już na początku rozwoju myśli europejskiej okazało się, że prawdy matematyki mają najwyższy stopień pewności spośród wszystkich prawd odkrywanych przez człowieka. Wyłonił się zasadniczy problem sprzeczności między jasnością i jednoznacznością prawd matematyki a charakterem rzeczywistości, do której te prawdy się odnoszą. Już wielkie systemy i koncepcje starożytnej filozofii próbowały ten dylemat rozwiązać. W przypadku filozoficznych refleksji pitagorejczyków i Platona te próby zaowocowały stworzeniem idei matematyki jako nauki uniwersalnej (*mathesis universalis*). Miała być ona źródłem wszelkiej prawdziwej wiedzy i podstawą innych nauk – tylko matematyka wyznaczała zakres tego co realne. Opozycyjna wobec takiego rozumienia matematyki była koncepcja Arystotelesa, który poprzez podział kompetencji i zadań poszczególnych nauk rozwiązywał problem ukazanej wcześniej sprzeczności. Nawiązaniem do idei *mathesis universalis* była metoda opracowana przez Archimedesesa. Różniła się ona jednak od koncepcji zarówno pitagorejczyków jak i platończyków i w sposób kompetentny przeciwstawiała się „podziałowi ról” zaproponowanemu przez Arystotelesa.

Te trzy wizje *mathesis universalis* są analizowane w drugiej części rozdziału (§12-§15). Pojawiają się tym samym trzy koncepcje rozumienia matematyki jako nauki uniwersalnej: platońska, pitagorejska i archimedejska. W odróżnieniu od koncepcji Arystotelesa, w której istnieje podział rzeczywistości na odrębne obszary i przyporządkowanie ich ustalonym naukom, te trzy powyższe koncepcje zakładają jedność nauki o świecie. Oprócz zasadniczego podobieństwa istnieją między tymi koncepcjami ważne różnice, które sprawiają, że możemy mówić o trzech różnych modelach nauki uniwersalnej.

Rozdział IV poświęcony jest ukazaniu narodzin w okresie nowożytnym dwóch nowych koncepcji nauki uniwersalnej: kartezjańskiej i leibnizjańskiej. Są one nawiązaniem do wielkich wizji starożytnych. Rola matematyki w tych koncepcjach, nie mniejsza niż poprzednio, została podbudowana dodatkowo gwałtownym rozwojem nauk przyrodniczych. Kartezjusz i Leibniz różnili się w zasadniczych punktach, jeśli chodzi o sposób konstrukcji nauki uniwersalnej. Materia, jako substancja rozciągła, dzieląca się w nieskończoność, nie mogła stanowić podstawy konstrukcji wiedzy w przypadku Kartezjusza. Dzieląc daną część materii na coraz mniejsze części, nigdy nie otrzymamy części „prostszej”. Podstawą całej konstrukcji dla Kartezjusza miały być czyste, proste metody wzięte z ówczesnej matematyki, czyli algebry i geometrii. Tylko przejścia rozumowe pomiędzy elementami ciągu rozumowania miały strukturę dyskretną. Najpierw określamy dwa różne obszary, następnie odkrywamy, czy tworzymy, metody pozwalające przechodzić z jednego obszaru do drugiego. Pierwotne elementy poszczególnych obszarów pojawiają się jako efekt działania tych metod. Przy pomocy metod łączących te posiadane już elementy można dojść do zrozumienia nowych bytów i pojęć – jest to proces stopniowy. Istotną rolę w koncepcji nauki uniwersalnej pełni absolut poznawczy. Dla Kartezjusza *cogito* jest „wytworem” procesu radykalnego wątpienia. Dopiero po doświadczeniu *cogito* rozpoczyna się poznawanie rzeczywistości. Samo radykalne wątpienie jest istotą *cogito* i warunkiem jego istnienia, ono więc jest absolutem poznawczym. Dzięki działaniu metody radykalnego wątpienia zostaje odkryty, czy utworzony, nowy byt – substancja myśląca. Kolejnym generatorem substancji jest dowód na istnienie Boga – dzięki temu dowodowi docieramy do substancji rozciągłej. Tym samym kartezjański dowód na istnienie Boga jest kolejnym absolutem poznawczym. Mamy więc dwa (pierwotnie) rozłączne obszary wygenerowane i połączone przy pomocy absolutów poznawczych (metody radykalnego wątpienia, różnorodnych metod naukowych oraz dowodu na istnienie Boga). Absoluty poznawcze pełnią rolę nośników prawdy i wyznaczają metody konstrukcji wiedzy. Ponadto są wskaźnikami ukazującymi stopień rozwoju nauki.

Inaczej wygląda ta kwestia u Leibniza. Materia też dzieli się u niego w nieskończoność, jednak na pewnym etapie podziału otrzymujemy nową monadę (patrząc z zewnątrz dalszy podział tej monady jest niemożliwy, teraz już od wewnętrznej aktywności monady zależy możliwość wchodzenia „w głąb”

bytu). W każdej z nich odbija się mniej lub bardziej wyraźnie cały świat. W oparciu o pewną ilość monad (przyjętych jako alfabet) można odtwarzać wszystkie inne byty. Wybór alfabetu (czyli związany z nim etap podziału rzeczywistości) jest w znacznej mierze kwestią formalną. Dla Leibniza wzorem przy konstrukcji nauki uniwersalnej była sylogistyka Arystotelesa. Chciał w analogiczny sposób opracować inne reguły rozumowań i dedukcji. W tym celu należy, według niego, poprzez analizę pojęć istniejących w umyśle, opracować katalog pojęć pierwotnych (alfabet myśli) i nadać im status formalny przypisując im pewne symbole. Leibniz oczywiście zakładał, że każde pojęcie można rozłożyć na skończoną ilość pojęć pierwotnych. Jak przy pomocy dziesięciu cyfr można otrzymać każdą liczbę (mimo, iż z tych liczb jest nieskończenie wiele) tak samo przy pomocy alfabetu myśli będzie można utworzyć dowolne pojęcie. Wszystkie pojęcia będzie więc można otrzymać poprzez odpowiednią kombinację tych pierwotnie wybranych symboli. Automatycznie, ta procedura będzie zawierała dowody wszystkich możliwych faktów. Inaczej niż w przypadku Kartezjusza, dla Leibniza metody naukowe (prawa logiki, zasada ciągłości, metoda wyczerpywania) nie są efektem pewnego procesu granicznego (jak np. radykalne wątplenie), lecz istnieją uprzednio wobec intelektualnej działalności człowieka. W wyniku procesu granicznego (redukcji bytu do elementów najprostszych) otrzymujemy podstawowe pojęcia, na których budowany jest gmach wiedzy. Rozumienie tych właśnie pojęć oparte jest na przed-matematycznej intuicji. Program Leibniza nawiązuje do koncepcji pitagorejskiej – konstrukcja nauki ma strukturę wertykalną: pojęcia dołączane do matematyki mają sens same w sobie, są jednością-substratem, z którego budowane są nowe pojęcia. Jedynym kryterium łączenia poszczególnych elementów jest spójność i logiczność budowanej struktury. Ogólny schemat konstrukcji nauki jest u Leibniza inny niż w przypadku projektu Kartezjusza. Absolutami poznawczymi są prawa logiki, zasada ciągłości oraz dalsze zasady (między innymi zasada wyczerpywania Archimedesesa) – są one generatorami wszystkich bytów i, inaczej niż u Kartezjusza, są elementem poznawanej rzeczywistości. Zasady te nie są od siebie niezależne, lecz są kolejno na sobie nadbudowane (poczynając od logiczno-ontologicznej zasady tożsamości). Dzięki temu rzeczywistość poznawana charakteryzuje się jednością (nie ma kartezjańskiego rozdarcia bytu).

W ostatnich dwóch paragrafach rozdziału jest pokazana różnica między kartezjańskim a leibnizjańskim programem matematyzacji wiedzy na przykładzie wykorzystywania pojęcia różniczki (i granicy) przez różnych matematyków (de l'Hospitala, Bolzano i Cauchy'ego, w duchu programu Leibniza oraz d'Alemberta, Simona Lhuillier i Lagrange'a zgodnie z koncepcją Kartezjusza). Pojęcie różniczki (czyli nieskończenie małej Leibniza) było podstawą definicji pochodnej i całki, przynajmniej w przypadku Leibniza. Pojęcie to, które traktowano z powodu jego nieścisłości i tajemniczości związanej z nieskończonością, jako pojęcie metafizyczne (w pejoratywnym znaczeniu) budziło wiele emocji. Można się było go pozbyć, ale za cenę znacznego skomplikowania rachunków;



z drugiej strony, operowanie czymś nieuchwytnym i niezrozumiałym wydawało się być niegodnym matematyki. Zobaczymy, dlaczego w duchu programu Leibniza włączenie do matematyki nowego, lecz nieściśłego pojęcia było czymś dopuszczalnym, natomiast program kartezjański zasadniczo się temu sprzeciwiał? W trakcie analiz i dyskusji związanych z prawomocnością użycia pojęcia różniczki nastąpiło pełniejsze zrozumienie problemów związanych z uchwyceniem przez matematykę idei rozciągłości (a w konsekwencji włączenia w jej struktury pojęcia *continuum*).

W rozdziale V analizowana jest sformułowana w XIX wieku przez Bolzano, a następnie rozwinięta przez Riemanna, nowa idea nauki uniwersalnej. Była to idea na wzór *mathesis universalis* Kartezjusza lub Leibniza, jednak różniła się od tamtych w kilku punktach. Dzięki tej nowej idei stało się możliwe w konsekwencji głębsze wniknięcie w zagadnienie *continuum*. Przełom, który dokonał się za sprawą tych dziewiętnastowiecznych matematyków doprowadził do powstania nowych jakościowo teorii matematycznych, lecz przede wszystkim był związany ze zmianą mentalności – ta nowa mentalność zaczęła ogarniać kolejne obszary nauki.

W pierwszej części rozdziału (§ 1 i częściowo § 2) ukazana jest refleksja filozoficzna Riemanna nad nauką. Będzie to stanowiło podstawę analiz różnic między nowożytną wizją nauki uniwersalnej (określoną głównie przez Kartezjusza i Leibniza) a paradygmatem, który wyłania się z refleksji Bolzano i Riemanna. Faktami naukowymi są dla Riemanna nie tylko wyniki nauk szczegółowych, lecz również przemyślenia i refleksje filozoficzne m.in. Kanta i Herberta. Nie istnieją w pracy Riemanna aprioryczne ustalenia dotyczące zakresu i znaczenia omawianych pojęć. Uzyskują one znaczenie poprzez kontekst nauki, w który są uwikłane. Nie jest to powszechny sposób uprawiania filozofii, gdyż bez rozumienia wyników nauk szczegółowych stanowiących bazę danych rozważań, te rozważania mogą zgubić swój sens. Dlatego ważną częścią tego rozdziału, pozwalającą uchwycić koncepcję filozoficzną Riemanna, są te fragmenty, w których pokażę kontekst filozofii Riemanna tzn. niektóre jego idee i pomysły w obszarze matematyki (jest to realizowane w § 2 i 5).

Mimo, iż raczej nie było bezpośredniego oddziaływania prac Bolzano na Riemanna, to jednak można traktować idee Riemanna jako kontynuację pomysłów Bolzano w zakresie przebudowy podstaw matematyki i budowy nowej koncepcji *mathesis universalis*. W ramach tej nowej koncepcji rodzą się pomysły prowadzące do teorii wymiaru, *continuum* rzeczywistego Dedekinda czy teorii mnogości Cantora. W projekcie Bolzano pojawia się bardzo wyraźnie idea przebudowy podstaw logicznych matematyki. Miała ona duże znaczenie dla powstania nowych działów matematyki, chociaż ten wpływ dokonał się głównie za sprawą prac Riemanna. Analizie idei Bolzano poświęcony jest § 3 i 4.

Oczywiście konieczność przebudowy podstaw matematyki, w szczególności analizy, dostrzegana była i postulowana również przez innych matematyków, między innymi przez Cauchy'ego, Dirichleta, Dedekinda i Weier-

strassa. Wszyscy oni byli niezadowoleni z braku solidnych podstaw analizy – chodziło głównie o sprecyzowanie lub wyeliminowanie takich pojęć jak granica, ciągłość, funkcja czy nieskończenie mała. Weierstrass np. proponuje, w swoim inauguracyjnym wykładzie na posiedzeniu Berlińskiej Akademii Nauk, podjąć badania nad głębszym zrozumieniem relacji między matematyką a naukami przyrodniczymi – w tych badaniach upatruje szansę uzdrowienia analizy matematycznej. Natomiast Dedekind stwierdza, że należy odrzucić błyskotliwą intuicję jako podstawę nowych matematycznych odkryć. Do zapewnienia matematyce właściwego rozwoju wystarczający jest rygor prostych algebraicznych prawd. Brak jest jednak u tych matematyków tak śmiałej wizji przebudowy całego gmachu wiedzy, jaką można dostrzec w pracach Bolzano oraz Riemanna, a także oparcia tej przebudowy na nowych teoriach matematycznych, które należy dopiero stworzyć.

W kolejnych paragrafach (4, 5, 6, 7) zajmiemy się analizą początków powstałych w XIX wieku teorii, które miały kluczowe znaczenia dla zrozumienia matematycznego sensu pojęcia *continuum*. Tymi teoriami są: teoria wymiaru (§ 4), teoria liczb rzeczywistych (§ 6) oraz teoria mnogości (§ 7). Wraz z nimi pokażemy pewne istotne dla uchwycenia problemu *continuum* pomysły Riemanna w zakresie jego teorii rozmierności (§ 5). O ile, w przypadku Bolzano, dążenie do uściślenia podstaw geometrii i podania „właściwych” definicji kluczowych pojęć geometrii doprowadziło go do konieczności sformułowania definicji *continuum* geometrycznego, to program uściślenia podstaw analizy i podania ścisłych definicji takich pojęć jak np. ciągłość, granica, szereg, całka, nieskończenie mała doprowadził do zdefiniowania przez R. Dedekinda liczb rzeczywistych przy pomocy metod algebraicznych. Te wysiłki zostały zwieńczone sformułowaniem *continuum* algebraicznego. Dedekind dostrzegł podobieństwo między strukturą liczb wymiernych a strukturą prostej geometrycznej. Okazuje się jednak, że na prostej jest nieskończenie więcej punktów niż liczb wymiernych, mają więc one inny rodzaj ciągłości. Jeśli chcemy wyrazić arytmetycznie wszystkie własności *continuum* geometrycznego (a takie było pragnienie Dedekinda), to absolutnie konieczną rzeczą staje się skonstruowanie „narzędzia” w postaci liczb obejmujących, oprócz liczb wymiernych, nowe liczby niewymierne. Ma to się dokonać w oparciu o liczby wymierne i ich własności – i wtedy „nowe liczby” będą miały taką samą ciągłość jak prosta geometryczna. Ta ciągłość jest wyznaczona arytmetycznie przez odpowiedni podział liczb wymiernych (aksjomat Dedekinda). Tym samym każdemu punktowi prostej geometrycznej odpowiada pewna liczba rzeczywista (prosta rzeczywista zostaje pozbawiona „luk”, staje się zupełna) – zamiast badać prostą geometryczną i punkty leżące na niej wystarczy rozpatrywać prostą rzeczywistą i tworzące je liczby. Nowym liczbom nadano nazwę „rzeczywiste”. Badania Cantora doprowadzają go do sformułowania podstawowych pojęć topologicznych. W celu precyzyjnego uchwycenia tych pojęć trzeba było jednak zająć się pojęciem zbioru i uczynić go bytem matematycznym. To z kolei oparte było na rozwiązaniu problemu przedstawiania

funkcji przy pomocy szeregów trygonometrycznych. W konsekwencji wprowadził Cantor definicję liczb rzeczywistych, pojęcie punktu skupienia, wnętrza, spójności, zbioru doskonałego a w końcu pojawia się definicja *continuum* jako zbioru, który jest doskonały i spójny. W przypadku domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni euklidesowej definicja Cantora pokrywa się ze współczesnym rozumieniem *continuum* topologicznego.

Te teorie są podstawą, na której oparło się powstanie topologii geometrycznej, w szczególności teorii *continuumów*, mającej bliski związek z nową wizją nauki uniwersalnej. W oparciu o rozważania i wyniki naukowe Bolzano, Riemanna, Dedekinda i Cantora poddamy analizie w § 8 nową wizję *mathesis universalis* (jest ona najbardziej zbliżona do koncepcji Archimedesesa) i sformulujemy podstawowe, charakteryzujące ją własności.

Narodzenie się w matematyce topologicznego pojęcia *continuum* (i powstanie teorii *continuumów*) jest tematem rozdziału VI. W istotnej mierze pojawienie się tego pojęcia przebiegło zgodnie z nową ideą nauki uniwersalnej powstałą w XIX wieku. Najważniejszy impuls dla powstania teorii *continuumów* i uzyskanie pierwszych istotnych wyników miał miejsce w pracach Brouwera i Janiszewskiego w latach 1910-1912.

Pierwszy paragraf rozpoczyna się od przybliżenia filozofii matematyki Janiszewskiego i pokazania jej zgodności z nową wizją nauki uniwersalnej. W kolejnym paragrafie jest naszkicowane pojawienie się topologicznych pojęć „spójności” i „zwartości”, które są podstawowymi elementami definicji pojęcia *continuum*. Stało się to na przełomie wieku XIX i XX.

W paragrafie 3 analizowane jest skonstruowanie przez Brouwera pierwszego nierozkładalnego *continuum*. Ta konstrukcja jest przykładem realizacji intuicjonizmu Brouwera. Z dużą śmiałością metoda uniwersalizmu matematyki, nakreślona przez Bolzano i Riemanna, jest przez Brouwera realizowana. Skonstruowanie przez Brouwera pierwszego *continuum* nierozkładalnego miało miejsce w 1909 r. Brouwer poddał analizie twierdzenia sformułowane i udowodnione przez Schoenfliesa, dotyczące podstaw topologii płaszczyzny i będące próbą scharakteryzowania krzywych płaskich, i zauważył ich fałszywość a utworzone *continuum* (nierozkładalne) było kontrprzykładem do tych twierdzeń. Do czasu Brouwera wydawało się, że każde *continuum* jest rozkładalne, czyli można go przedstawić jako sumę jego dwóch właściwych (czyli różnych od całości) pod-*continuumów*. Ukształtowana na doświadczeniu potocznym intuicja nie jest w stanie wyobrazić sobie *continuum* nierozkładalnego. Taka nierozkładalność wydaje się wręcz przeczyć istocie *continuum* jako zbioru, który można dzielić na dowolnie małe części (pod-*continua*).

W paragrafie 4 analizowane są twierdzenia charakteryzacyjne dotyczące łuku oraz sfery podane przez Janiszewskiego. Podobnie jak Bolzano, zajął się Janiszewski, zgodnie ze swoją ideą badań matematycznych, badaniem podstawowych figur geometrycznych, aby znaleźć ściśle podstawy geometrii. Podane przez niego charakterystyki łuku (każde *continuum* lokalnie spójne i nieprzywiedlne

między dwoma punktami jest łukiem) oraz sfery (jeśli suma dwóch dowolnych *continuu*ów, których przekrój nie jest spójny, rozcina daną przestrzeń, która jest ponadto lokalnie spójna i bez punktów rozspajających, to ta przestrzeń jest homeomorficzna ze sferą  $S^2$ ) były istotnym krokiem w kierunku zrozumienia matematycznej rangi pojęcia *continuum*. Badając np. własność nieprzywiedlności skonstruował (korzystając z metody Brouwera) *continuum* (nierozkładalne) i wskazał w nim takie trzy punkty, że pomiędzy każdą parą z nich *continuum* to było nieprzywiedlne. Ta cecha okazała się cechą charakteryzującą *continua* nierozkładalne.

Paragraf 5 poświęcony jest analizie referatu Janiszewskiego, wygłoszonego na Kongresie Matematyków w Cambridge w 1912 r., oraz ukazaniu najważniejszych wyników rozpoczynających rozwój teorii *continuu*ów (prace Kuratowskiego, Janiszewskiego, Mazurkiewicza, Knastera, Binga, Moise'a). Kluczowe znaczenie miała druga część referatu Janiszewskiego, w której podaje on przykład *continuum* nie zawierającego żadnego łuku. Czyni to w celu wykazania słabości używanych w jego czasach definicji krzywych i powierzchni. Ma na uwadze skonstruowanie takiego *continuum*, aby każda jego część zawierała *continua* zagęszczenia. To *continuum* otrzymuje się jako graniczny efekt kondensacji osobliwości na odcinku. Również zasadnicze dla rozwoju teorii *continuu*ów były dwa pytania postawione przez polskich matematyków. Pytanie sformułowane przez Knastera i Kuratowskiego w 1920 dotyczyło topologicznej charakteryzacji krzywej zwykłej zamkniętej i odpowiadało programowi Janiszewskiego. Było ono następujące: czy każde jednorodne leżące na płaszczyźnie *continuum* musi być krzywą zwykłą zamkniętą? Równie ważny problem tkwił w pytaniu postawionym w 1921 r. przez Mazurkiewicza: czy każde płaskie *continuum* o tej własności, że jest homeomorficzne z dowolnym swoim niezdegenerowanym (niejednopunktowym) pod*continuum*em, musi być łukiem? Doprowadziło to do skonstruowania przez Knastera (1922) i Moise'a (1948) *continuum* dziedzicznie nierozkładalnego nazwanego pseudolukiem (był on kontrprzykładem do postawionych wcześniej pytań).

W 6 paragrafie pokazane jest znaczenie konstrukcji *continuu*ów nierozkładalnych i dziedzicznie nierozkładalnych oraz ich własności na przejście przez pojęcie *continuum* roli absolutu poznawczego.

W ostatnim VII rozdziale ukazują znaczenie przeprowadzonych badań historycznych dla filozofii, w szczególności pokazują, w jaki sposób sformułowane w matematyce pojęcie *continuum* rozjaśnia kwestie związane z relacją między matematyką a rzeczywistością oraz jak nowa idea nauki uniwersalnej jest realizowana w filozofii. W oparciu o przedstawione w poprzednich rozdziałach analizy historyczne ma miejsce analiza nowego kryterium prawdy, które jest związane z nowym programem *mathesis universalis*. W paragrafie 1 zostaną wykorzystane własności odkryte wraz z powstaniem teorii *continuu*ów dla pełniejszego zrozumienia ukazanych w rozdziale III faktów filozoficznych. Jeśli chodzi np. o fakt filozoficzny Kuzańczyka, to *continua* nierozkładalne



stały się przykładem „minimalnych symboli” realizujących sprzeczne (na podstawie potocznej wiedzy) własności. Pokazany jest również związek nowego kryterium prawdy z jej tzw. klasyczną definicją.

W 2 paragrafie analizowane są niektóre współczesne koncepcje prawdy (Peirce, Heidegger, Lakatos, Wittgenstein) jako przykład realizacji nowego kryterium prawdy. Heidegger np. uważa, że nie chodzi o wykazanie zgodności poznawania i przedmiotu lub wręcz czegoś psychicznego z czymś fizycznym, ale także nie o wykazanie zgodności pomiędzy treściami świadomości. Wykazane ma być wyłącznie „bycie-odkrytym” samego bytu, on sam w „jak” swej odkrytości. To, że wypowiedź jest prawdziwa, znaczy, iż odkrywa ona byt sam w sobie. Według niego, to nie wypowiedź jest zasadniczym „miejscem” prawdy, lecz na odwrót, wypowiedź opiera się na otwartości bytu.

Paragraf 3 poświęcony jest przybliżeniu idei analizy niestandardowej Abrahama Robinsona w celu pokazania możliwości dalszego rozszerzenia *continuum* (rzeczywistego) w ramach nowej wizji nauki uniwersalnej. Robinson wychodzi od zasadniczej sprzeczności między tym, co intuicyjnie oczywiste i nieściśle, a tym, co ściśle, jednak pozbawione intuicyjnej oczywistości. Aby pogodzić tę sprzeczność proponuje wykorzystać logikę i uzupełnia prostą rzeczywistością „nieskończenie małymi” jako nowymi liczbami. Wiąże się to z „częściowym” zakwestionowaniem zasady Archimedesesa. Z tego powodu analiza niestandardowa bada większą ilość bytów i własności niż analiza standardowa. Między innymi okazuje się, że uzupełnienie liczb wymiernych o liczby niewymierne nie powoduje usunięcia „luk” na prostej rzeczywistej oraz że istnieją zbiory spójne na prostej, nie będące odcinkami. Może to mieć doniosłe znaczenie filozoficzne – brak jakiegoś rodzaju bytów może wynikać z niedostatecznych narzędzi logicznych.

Ostatnie dwa paragrafy pracy to pokazanie nietrywialności problemu matematyczności przyrody w ramach nowej wizji nauki uniwersalnej. Istotne jest wykorzystanie przeprowadzonych w tej pracy analiz historycznych, ponieważ wagę tego problemu można zrozumieć dopiero w szerszym kontekście. Matematyka w wielu momentach swojej historii, mniej lub bardziej świadomie, odkrywała teorie, które zdawały się być lekarstwem na odwieczne problemy filozoficzne. Kiedy np. Platon poznał zaskakujące twierdzenie geometryczne mówiące, że istnieje tylko pięć wielościanów foremnych uznał, że w nim tkwi rozwiązanie zagadki pierwszych elementów rzeczywistości. Musi być pięć elementów, z których zbudowana jest cały świat i muszą one odpowiadać w swojej podstawowej strukturze odpowiednim wielościanom foremnym. Podanych jest kilka argumentów świadczących, że problem matematyczności jest nietrywialnym zagadnieniem filozoficznym a najważniejszym z tych argumentów jest fakt istnienia w matematyce „nieredukowalnych” pojęć mających odniesienie do innych dziedzin wiedzy. Są to kanały łączące matematykę z tymi dziedzinami wiedzy – również z filozofią. Tych pojęć nie można zredukować ani do samej logiki, ani do konstrukcji mentalnych czy faktów empirycznych. Dla Riemanna

takim nieredukowalnym bytem matematycznym było pojęcie rozmaitości, dla Dedekinda zasada ciągłości a dla Cantora pojęcie zbioru nieskończonego. Poincare uważał, że prawdziwość każdego istotnego twierdzenia w matematyce opiera się na zasadzie indukcji matematycznej. Możliwość stosowania matematyki w naukach przyrodniczych również wiąże się, według niego, z działaniem tej zasady (uważa, że ta zasada to sąd syntetyczny a priori w sensie Kanta). Ukazany jest również fakt „nieredukowalności” pojęcia *continuum*.

Wiele pomysłów i idei, które znalazły się w tej pracy, zrodziło się podczas dyskusji na seminarium z filozofii nauki prowadzonym przez ks. prof. Michała Hellera w Krakowie. Pragnę w tym miejscu złożyć gorące podziękowania wszystkim uczestnikom tego seminarium, z którymi dane mi było wymieniać poglądy, szczególnie samemu ks. prof. Michałowi Hellerowi, któremu bardzo wiele zawdzięczam. Tam po raz pierwszy, na seminariach interdyscyplinarnych i konferencjach naukowych, miałem okazję, bezpośrednio z ust wybitnych współczesnych uczonych, dowiedzieć się jakie są kluczowe problemy i zagadnienia filozofii nauki. Niezmiernie inspirujące były dla mnie m.in. referaty prof. Romana Dudy z filozofii matematyki. Właśnie prof. Romanowi Dudzie chciałbym złożyć serdeczne podziękowanie za szczegółowe przeczytanie niniejszej pracy i wiele ważnych i wnikliwych uwag. Wielokrotnie podczas pisania pracy konsultowałem się z panią doc. Grażyną Rosińską. Za poświęcony mi czas, istotne wskazówki i spostrzeżenia pragnę serdecznie Jej podziękować. Kilkakrotnie na seminarium naukowym prowadzonym przez prof. Alinę Motycką i prof. Stefana Zameckiego w pałacu Staszica w Warszawie miałem okazję przedstawić referaty dotyczące pewnych fragmentów tej pracy. Dziękuję serdecznie za żywą dyskusję i uwagi, z których szczególnie sobie cenię uwagi dr Michała Kokowskiego.



## Rozdział I

### Metody badań historii matematyki

#### 1. Wartość historii nauki.

Problem nauki pojawił się w starożytności, gdy przyjęto rozróżnienie na wiedzę potoczną, pozorną (*doxa*) oraz wiedzę pewną (*episteme*). Nauka (jako realizacja *episteme*) ma posiadać walor racjonalności, intersubiektywności i obiektywności oraz operować ponadczasowymi prawdami. W najpełniejszy sposób ideał ujęty słowem *episteme* realizują nauki matematyczno-przyrodnicze powstałe w czasach nowożytnych. Inne obszary wiedzy, w tym, jak zobaczymy, historia nauki, mogą być również w pewnym stopniu zaliczone do nauki.

Czy tak rozumiana nauka może być uzależniona od zmiennych okoliczności historycznych; czy przypisanie jej historyczności nie jest uderzeniem w samą istotę nauki? Jaki jest sens zanurzania nauki w kontekst historyczny?

Sądzę, że czynność zanurzania nauki w jej historię jest próbą ognia dla racjonalnych kanonów i obiektywnych norm. Z tej próby mają szansę wyjść jedynie autentyczne wartości – wszystko, co zależne jest od czasowej mody i lokalnych uwarunkowań zostanie wydobyte na światło dzienne i zdemaskowane. Jeśli weźmiemy wartościowe pomysły i teorie naukowe, to po takim badaniu okaże się, że w tym, co istotne nie ma zależności nauki od procesów historycznych, czy społecznych – w tym sensie nauka nie jest zjawiskiem historycznym ani społecznym. Ten brak „istotnej zależności” nie oznacza jednak, że nie istnieją powiązania między nauką a innymi dziedzinami życia. Nauka jest jednym z elementów kultury, podlega również procesowi rozwoju. Ma jednak swoje specyficzne kryteria rozwojowe oraz wewnętrzne, autonomiczne normy regulujące. I to one są ważniejsze od norm historycznych, społecznych, psychicznych czy innych.

Będąc zapatrzonym w obiektywność i autonomię nauki można łatwo wpaść w pułapkę ahistoryczności i bezkrytycznego uznania jej racjonalności. Dlatego właśnie warto badać dzieje nauki, co w głównej mierze ma polegać na umieszczaniu współczesnych problemów i zagadnień, którymi żyje nauka, w różnych kontekstach historycznych.

W znacznej mierze, pod wpływem znanych osiągnięć nauki nowożytnej, aż do połowy dwudziestego wieku dominujące było traktowanie nauki jako zjawiska ahistorycznego, którego racjonalność jest oczywista i niepodważalna.



Dopiero ostre wystąpienie Thomasa Kuhna<sup>1</sup> zwróciło większą uwagę na rolę pozanaukowych metod i struktur w powstawaniu nauki. Wzorce racjonalności się zmieniają, czasem w sposób gwałtowny i po kolejnej rewolucji to, co wcześniej uznawano za naukowe i racjonalne, zostaje zepchnięte poza obszar naukowych uzasadnień. Naukę należy analizować przy pomocy standardów i wzorców obowiązujących w danym okresie historycznym. Nawet, jeśli są pewne uniwersalne i niezmiennie wzorce naukowości, to są one niewystarczające do zrozumienia badanej sytuacji problemowej. Często, bez uwzględnienia lokalnego kontekstu, kluczowe momenty i problemy w dziejach nauki wydają się być mało ważne i trywialne.

Uzależnienie wartości faktów naukowych od czasu zdaje się podważać jej obiektywność i racjonalność. Próbą wyjścia z tej sytuacji jest koncepcja K. Poppera, który sądzi, że dla oceny poprawności teorii i wysuwanych przez nią hipotez ważna jest wewnętrzna struktura teorii (która warunkuje zdolność wysuwania predykcji poddawanych pod osąd doświadczenia), a nie czas, w którym predykcje są potwierdzane. W koncepcji Poppera nauka nie staje się więc zjawiskiem historycznym. Obszarem, w którym dokonujemy oceny wartości dowodowej danych obserwacji, jest świat obiektywnej wiedzy (trzeci świat Poppera), w którym mamy do czynienia ze swoistym wewnętrznym „czasem” wyznaczonym przez zależności między teoriami oraz przez logikę ich rozwoju. Ten czas nie musi mieć wiele wspólnego z czasem, w którym konkretna osoba (czy grupa osób) uznaje daną teorię za prawdziwą – jej prawdziwość wynika z „miejsca” zajmowanego przez nią w trzecim świecie.

Interesujące jest to, iż o ile kwestia powiązań nauki i kultury, w przypadku ogólnie traktowanej historii nauki, była pełniej analizowana i rozumiana dopiero w połowie XX wieku, to w przypadku historii matematyki już sto lat wcześniej pojawili się historycy, którzy podkreślali związek między rozwojem matematyki a stanem cywilizacji i kultury. W książce *Geschichte der Mathematik*<sup>2</sup> A. G. Kästner mówi o ścisłej wzajemnej zależności matematyki i kultury duchowej człowieka oraz ukazuje w jaki sposób rozwój metod matematycznych odzwierciedla rozwój historii cywilizacji. Na Kongresie Matematycznym w Paryżu w 1900 r. M. Cantor w referacie *Sur l'Historiographie des mathématiques*<sup>3</sup> ukazał potrzebę rozwijania nowej szkoły historii matematyki, która miałaby za cel poddać analizie i krytyce wpływ ogólnych teorii rozwoju (np. ewolucji czy historyczno-genetycznych) na rozumienie matematyki i jej rozwój oraz ukazać zależność nauki (na przykładzie matematyki) od kultury.

Już na początku XX wieku historycy matematyki dostrzegli hermeneutyczną zależność hipotez i faktów. Według P. Tannery'ego<sup>4</sup> historia danego pojęcia matematycznego nigdy się nie kończy, gdyż tworzenie hipotez wyjaśniających pociąga za sobą badanie konkretnych faktów historycznych, a te z kolei zmieniają hipotezy. Również ścisły związek historii matematyki i historii świata jest podkreślany w pracach włoskiego historyka G. Lorii<sup>5</sup> – nie można oddzielać historii pojęć matematycznych od historii idei oraz historii praktycznej, gdyż

historia matematyki jest próbą „konstrukcji” przeszłości przy pomocy wszystkich istniejących źródeł informacyjnych.

Rozwijając tę myśl, H. G. Eneström podejmuje jednocześnie polemikę z Loria i wskazuje, w pracach wychodzących od roku 1900 w *Biblioteca mathematica*, na hierarchię faktów wykorzystywanych w badaniach historii matematyki: na ile to możliwe należy budować historię matematyki z elementów ściśle matematycznych i dopiero w przypadku braku takowych uzupełnić braki naturalnym rozsądkiem lub prądami idei środowiska kulturowego. Nie wolno pisać historii matematyki z punktu widzenia kultury, gdyż jest to ilustracja faktów matematycznych przy pomocy obcych jej okoliczności. Jedynie historia literatury i filologia mogą stanowić pomoc dla badań historii matematyki. W pierwszym etapie badań historycznych należy dzieła matematyczne uporządkować chronologicznie i poczynić uwagi na temat autorów i treści (jest to etap rzeczowy i jedynie w nim korzystamy z elementów poza-matematycznych). Natomiast etap drugi (ściśle naukowy) jest badaniem historii teorii i metod matematycznych. W tym etapie do minimum są ograniczone treści biograficzne (dotyczące matematyków i odkryć); w tym przypadku historia staje się nauką matematyczną, gdyż nieomal dedukcyjnie wyprowadza fakty historyczne z warunków w jakich powstała matematyka.

Czeski historyk matematyki Q. Vetter<sup>6</sup> zachowuje podany przez Eneströma podział pracy historyka na dwa etapy, jednak nie zgadza się z ograniczaniem obszarów badań. Uważa, że drugi etap polega na dowodzie postawionej hipotezy dotyczącej kultury w ogólności. Trzeba odpowiedzieć na pytania o warunki rozwoju zdarzeń matematycznych i ich naturę oraz wskazać związek między faktami nauki a stanem cywilizacji. Jednak nigdy nie należy dawać pierwszeństwa obcym elementom, trzeba zachować zasadę „nauka dla nauki”. W ten sposób buduje się tzw. *historię genetyczną* polegającą na szukaniu wszystkich składników danego zjawiska, z jednoczesnym uwzględnieniem właściwej hierarchii rozpatrywanych zdarzeń i wpływów.

Myślę, że dla racjonalnego złączenia i wykorzystania poglądów zwolenników historycznego traktowania nauki należy rozwijać ideę historii genetycznej Vettera i przyjąć tezę, że kontekst nauki i kontekst historii nauki to dwa odrębne konteksty, między którymi istnieją jednak odpowiednie powiązania – te powiązania mają zasadnicze znaczenie. Należy odrzucić tezę, że kontekst historii nauki zawiera się, w tym co istotne dla nauki, całkowicie w kontekście nauki bieżącej, jak również tezę rozbijającą kontekst nauki na poszczególne konteksty historyczne. Zanurzanie nauki współczesnej w odpowiedni kontekst historii nauki jest wyłącznie operacją metodologiczną, jednak właśnie dzięki tej operacji jesteśmy w stanie odzyskać utracone prawdy. Również nie do przyjęcia jest teza, że historia nauki jest wyłącznie teoretyczną konstrukcją historyka i nie istnieje nic takiego jak historia nauki jako taka. Pojęcie racjonalności można przypisać nie tylko nauce w jej obecnym kształcie oraz koncepcjom metodologicznym, lecz także samej historii nauki. Oczywiście te tezy wyma-

gają uzasadnienia w oparciu o konkretny materiał historyczny i analizę aktualnego stanu nauki.

## 2. Kontekst historii nauki.

Spróbujmy przeanalizować samo pojęcie kontekstu historii nauki. Sądzę, że sprawą istotną dla uchwycenia tego pojęcia jest zbadanie czy odkrycie jest sprawą przypadku, czy wynika z jakiejś „logicznej” konieczności tzn. czy kontekst odkrycia jest zbiorem nieuporządkowanych zdarzeń, czy ma postać teorii naukowej? W pierwszym przypadku historia nauki (poruszająca się w kontekście odkrycia) nie byłaby nauką, natomiast w drugim mamy dwie możliwości:

1. Logiczna konieczność jest wyłącznie sprawą teorii naukowej, której ten kontekst dotyczy. W ten sposób rozumiał historię matematyki Hilbert, dla którego była ona wyłącznie częścią matematyki;

2. Istnieje jakaś „logika rozwoju” teorii naukowych niezależna (przynajmniej w pewnym stopniu) od samej rozwijającej się teorii.

Sądzę, że jedynie w tym drugim przypadku tak naprawdę możemy mówić o kontekście historii nauki i wtedy możemy traktować historię nauki jako naukę. Dlaczego?

Podczas analizy rzeczywistości dana teoria naukowa odkrywa fakty, które uzyskują status elementów tej teorii. W pierwszym przypadku historia nauki zajmuje się powtórным odkrywaniem faktów, które dana teoria już kiedyś w przeszłości odkryła, a które zostały zapomniane lub nie są w dostatecznym stopniu doceniane – historia nauki traktowana jest zatem wyłącznie jako sztuka właściwego rozkładania akcentów.

Natomiast w drugim przypadku, rzeczy odkrywane przez historię nauki mają swoją specyficzną rzeczywistość i obiektywność, pojawia się logika rozwoju teorii naukowych niezależna w pewnym stopniu od samej teorii. Naturalną konsekwencją takich badań historycznych jest refleksja filozoficzna (i to nie tylko metodologiczna) nad nauką i nad samym poznaniem pozwalająca odkryć „logikę” rozwoju teorii naukowych.

Nie należy jednak sądzić, aby ta logika rozwoju miała jako całość status formalny. Każda pojawiająca się w nauce prawda rodzi się z udziałem uczuć poetyckich i pewnego rodzaju „uniesienia metafizycznego”. Kontekst odkrycia, a więc kontekst ogarniający z natury różne obszary rzeczywistości, musi siłą rzeczy korzystać z tego co wydarza się w różnych obszarach. Oprócz czysto logicznej analizy (równania matematyczne są mądrzejsze od ich twórców) oraz wykorzystania faktów z innych dziedzin nauki czy działalności człowieka (np.



pewnych refleksji metafizycznych), do odkrycia prowadzi często właśnie uniesienie metafizyczne (odróżniam go od założeń metafizycznych), poetyckie czy religijne.

Zaskakującą i ważną rzeczą przy badaniu kontekstu historycznego jest „praca” podświadomości. Kwestią tą zajmowali się m.in. H. Poincaré i J. Hadamard<sup>7</sup>. Kiedy uczony rozważa jakieś problemy, to zostają one przekazane automatycznie podświadomości, która dokonuje różnych kombinacji bez udziału świadomej myśli. Prowadzi to do inkubacji teorii w podświadomości, a rozwiązanie pojawia się w nagłym olśnieniu.

Czy wobec powyższych uwag nie można by sądzić, że łączenie odkrycia naukowego z logiką jest pewnym nadużyciem? Logika daje przecież ogólny schemat pozwalający na jednoznaczne znajdowanie konsekwencji na podstawie istniejących danych czy założeń. Gdzie w przypadku tak rozumianego odkrycia mamy tę jednoznaczność? Skoro jednak stan metafizycznego uniesienia może stanowić „metodę” dochodzenia do prawdy (poprzez otwieranie prowadzących do niej drzwi) a podświadomość przez niektórych uczonych jest z powodzeniem wykorzystywana do dokonywania odkryć, to czy nie wynika z tego, że musi istnieć pewien logiczny schemat, który tłumaczy tę nieprzypadkowość odkryć, mimo wykorzystywania tak egzotycznych narzędzi.

Bronienie istnienia logiki odkrycia naukowego może prowadzić jednak do zatarcia różnic między odkryciem i uzasadnieniem. W obu przypadkach mamy do czynienia z pewnym schematem logicznym, którego status nie jest do końca jasny (szczególnie, jak uczynimy spostrzeżenie, że i samo uzasadnienie nie musi mieć tak absolutnie formalnego i ścisłego charakteru).

Uważam, że kontekst historii nauki pozwala na zachowanie rozdziału między kontekstem odkrycia a kontekstem uzasadnienia. Zauważmy, że w przypadku analiz historycznych Lakatosa, przedstawionych w jego książce *Proofs and Refutations*<sup>8</sup>, mechanizm indukcji (quasi-empirycznej) jest generatorem pojęć i twierdzeń matematycznych, a więc określa kontekst odkrycia; jednak z punktu widzenia dzisiejszej matematyki, pojawienie się w danym okresie historycznym danego twierdzenia wiązało się z podaniem jego dowodu, czyli wiązało się z kontekstem uzasadnienia. Mamy tu pozorne wymieszanie kontekstów, które wynika z niedostrzegania „historycznej logiki rozwoju”, zasadniczo odrębnej od logiki badanej teorii naukowej – „logiczne” rozróżnienie między kontekstami odkrycia i uzasadnienia musi wiązać się z „logicznym” odróżnieniem nauki od jej historii.

Pojawiające się w tych rozważaniach pojęcie „kontekstu historii nauki” ma zasadniczo nowy i odrębny od kontekstów odkrycia i uzasadnienia sens – od kontekstu odkrycia, gdyż jak wspomniałem wcześniej, to właśnie kontekst historii nauki pozwala na logiczne rozróżnienie (w sensie logiki rozwoju) obu „klasycznych” kontekstów i pokazuje zarazem, że w zależności od perspektywy historycznej, pewne fakty naukowe mogą tworzyć kontekst odkrycia albo też uzasadnienia. Nie należy jednak sądzić, że prowadzi to do relatywizmu – tak jak



twierdzenia nauki mają postać warunkową, a jednak ma sens stwierdzenie, że są one prawdziwe lub nie, tak również mimo tego, że to czy dany fakt tworzy kontekst odkrycia, czy kontekst uzasadnienia, uwarunkowane jest przez kontekst historii nauki, możemy mówić o tym czy dany fakt był przyczyną odkrycia, czy stanowił uzasadnienie teorii naukowych (z chaosem mamy do czynienia wówczas, gdy nie traktujemy kontekstu historii nauki jako struktury pierwotnej, lecz szukamy innych warunkujących go struktur i kontekstów np. kulturowych, psychicznych czy socjologicznych). Z drugiej strony, można by sądzić, że prowadzi to do traktowania kontekstu historii nauki jako Absolutu, tak jak traktuje logikę procesów historycznych Hegel. Jednak kontekst historii nauki jest pierwotny nie w sensie ontologicznym, lecz wyłącznie w sensie logicznym, jako przesłanka rozumowania.

Pięknym przykładem odtwarzania logiki rozwoju teorii, a więc ukazywania i tworzenia kontekstu historycznego, w którym dopiero nabierają sensu i znaczenia dwa pozostałe konteksty, są analizy zawarte we wspomnianej książce I. Lakatosa *Proofs and Refutations*<sup>9</sup>. Według Lakatosa Matematyka (pisana przez duże „M”, gdyż jest to jej imię własne) stanowi nierozdzielłą całość. Zawiera w sobie całą swoją historię, jak również wszelkie możliwe interpretacje filozoficzne. Jeśli matematyk jest posłuszny jej wewnętrznej logice rozwoju, wtedy staje się płodny, odkrywa twierdzenia i prawa, tworząc matematykę (przez małe „m” jako jedną z niedoskonałych realizacji Matematyki). Linia podziału przebiega nie między podejściem historycznym a ahistorycznym, lecz między traktowaniem i uprawianiem jej na sposób euklidesowy (dedukcyjny) a heurystyczny. W stylu euklidesowym twierdzeń się nie odgaduje, nie ważne są metody prowadzące do ich odkrycia. Z ustalonej (nikt nie wie, w jaki sposób i na jakiej podstawie) listy aksjomatów i definicji wynikają twierdzenia. W sposób jednoznaczny twierdzenie jest wyznaczone przez jego dowód. Styl euklidesowy ukrywa trudności i zagadki, matematyka przestaje być przygodą, drogą w nieznanne uprzednio obszary. Jediną metodą odkrywania nowych twierdzeń i jedyną logiką odkrycia jest dedukcja. W ramach stylu euklidesowego każde odkrycie nie poddające się schematowi dedukcji uważa się za całkowicie nieracjonalne – każda heurystyka jest albo racjonalna i zarazem dedukcyjna, albo niededukcyjna i tym samym nieracjonalna.

Lakatos uważa, że istnieją takie aspekty matematycznej działalności, które podlegają racjonalnym metodom heurystycznym innym niż dedukcja. Są to aspekty wykraczające poza obszar zainteresowania psychologii, socjologii czy historii jako takich. Matematyka jest autonomicznym organizmem, który żyje i rozwija się w oparciu o swoje własne, wewnętrzne prawa wzrostu. Najważniejsze, co można odkryć badając ten organizm, to mechanizmy tworzące wewnętrzną strukturę Matematyki, a więc w konsekwencji nowe schematy i sposoby myślenia, czyli nowe teorie, które zawierają w sobie reguły dowodzenia i wszelkich uzasadnień. Heurystyka jako taka dotyczy autonomicznej dialektyki matematyki, a nie jej historii, gdyż historia matematyki jest tylko daleko

niedoskonałą realizacją tej dialektyki. Jednak tylko badania historyczne mimo, iż nie ukazują w sposób jasny i dokładny wglądu w strukturę matematyki, pozwalają dostrzec całość tego żywego, rozwijającego się organizmu. Aby mieć jasność co jest odkryciem, a co uzasadnieniem, należy uznać Matematykę za rzeczywistość pierwotną. Wtedy, z jednej strony, odkrywane mechanizmy rządzące matematyką stają się po pewnym czasie regułami dowodzenia (kontekst odkrycia przechodzi więc w kontekst uzasadnienia), a z drugiej strony, w rozszerzającym się kontekście historycznym nauki, pewne stare dowody okazują się błędne, co prowadzi w konsekwencji do generowania nowych pojęć (kontekst uzasadnienia staje się więc kontekstem odkrycia).

Nie istnieje w tej interpretacji ryzyko absolutyzowania któregoś z kontekstów, gdyż w sensie ontologicznym pierwotne okazuje się odkrycie lub uzasadnienie i dopiero ten „schemat ontologiczny” (*odkrycie*  $\rightarrow$  *uzasadnienie* lub *uzasadnienie*  $\rightarrow$  *odkrycie*) wytwarza kontekst historii nauki. Jednakże schemat logicznego uwarunkowania jest dokładnie przeciwny - dopiero poprzez kontekst historii nauki możemy odkryć ten wspomniany powyżej schemat i w konsekwencji rozróżnić logicznie kontekst odkrycia od kontekstu uzasadnienia. I w tym „kontekście” nabiera szczególnego sensu stwierdzenie Lakatosa, że filozofia matematyki bez historii jest pusta (gdyż dopiero poprzez badania historyczne można poznać „*ontologiczny schemat*”, który jest treścią kontekstu historycznego), natomiast historia matematyki bez filozofii jest ślepa (gdyż bez opracowywanego filozoficznie kontekstu historycznego, wszelkie rozumowanie, próbujące rozdzielić kontekst odkrycia od kontekstu uzasadnienia, załamuje się; te konteksty zlewają się ze sobą tworząc nie schemat ontologiczny, lecz pojęciowy chaos). Widać stąd, że ten proces jest procesem ciągłym, nie kończącym się, a przyjmując postać koła hermeneutycznego sprawia, że historia nauki-filozofia nauki jest w stanie zbliżać się do prawdy o samej nauce, którą bada.

### 3. Metoda Lakatosa analizy powstawania i rozwoju pojęć matematycznych.

Jak zauważyliśmy poprzednio, analizy Lakatosa, zawarte w książce *Proofs and Refutations*, dotyczące pojawienia się w matematyce pojęcia jednostajnej zbieżności, można traktować przede wszystkim jako argument za istnieniem wewnętrznej logiki rozwoju teorii matematycznych.<sup>10</sup> Nie tyle ważny jest rzeczywisty czas pojawienia się jakiegoś odkrycia naukowego, co „czas wewnętrzny”, który ukazuje kierunki rozwoju i zależności danych struktur matematycznych. Celem badań w ramach historii matematyki jest nie tyle wskazanie, kiedy dane odkrycie miało miejsce i jak do niego doszło, lecz ukazanie jak nowo odkryte pojęcie czy metody dowodowe skupiają wokół siebie różnorodne problemy i zagadnienia (*stricte* matematyczne jak i filozoficzne) oraz naświetlają metody ich zrozumienia i rozwiązania.

Lakatos mówiąc o odkryciu pojęcia jednostajnej zbieżności nie odkrywa tego pojęcia ani czasu jego pojawienia się, lecz mechanizm (logikę rozwoju) odpowiedzialny za powstanie tego pojęcia – jest to tzw. metoda dowodów i kontrprzykładów (*proofs and refutations*). Metoda dowodów i kontrprzykładów jest ogólnym schematem matematycznego odkrycia lub rozwoju matematycznych teorii. Można wyróżnić siedem charakterystycznych etapów działania tej metody:

- I. Sformułowanie pierwotnej hipotezy C.
- II. Rozbicie pierwotnej hipotezy na elementarne części składowe (lematy  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ) prowadzące do jej dowodu, co można formalnie zapisać  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C$ .
- III. Pojawienie się kontrprzykładów do pierwotnej hipotezy.
- IV. Dokładna analiza dowodu, w celu znalezienia odpowiedzialnego za fałsz lematu. Po znalezieniu takiego ukrytego lematu  $P_{n+1}$  okazuje się, że kontrprzykłady nie obalają całego rozumowania, lecz tylko jego część, co znaczy, że mają jedynie rangę lokalną. Winny fałszu lemat (który nie był wcześniej sformułowany) zostaje wbudowany w pierwotną hipotezę jako dodatkowy warunek ograniczający jej zasięg. Tym samym pojawia się twierdzenie postaci:  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge P_{n+1} \rightarrow C$ . W tym nowym dowodzie kontrprzykłady przeczą zarówno wnioskowi C, jak i przesłankom  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge P_{n+1}$ , czyli schemat logiczny rozumowania jest poprawny. Z lematem  $P_{n+1}$  związane jest nowe pojęcie (lemat ten można traktować jako definicję tego pojęcia), które jest tym samym pojęciem wygenerowanym przez nowy dowód.
- V. Badanie innych twierdzeń i dowodów pod kątem występowania w nich odkrytego lematu i pojęcia. Jeśli to nowe pojęcie zostanie odnalezione wśród innych dowodów, to potwierdzi swoje szczególne znaczenie jako pojęcie, w którym krzyżują się różne dowody.
- VI. Badanie konsekwencji hipotezy C. Te badania mogą dotyczyć różnych dziedzin wiedzy.
- VII. Zwrócenie uwagi, poprzez kontrprzykłady, na nowe przykłady, a w konsekwencji otwarcie nowych obszarów badań<sup>11</sup>.

Szczególnie interesująca i trudna sytuacja ma miejsce, gdy po etapie II, w którym w ramach przeprowadzanego dowodu ma miejsce uściślenie niektórych pojęć, następuje odkrycie kontrprzykładu do dopiero co udowodnionego twierdzenia. Otrzymujemy następującą konkluzję: podanie ścisłej definicji in-

tuicyjnie oczywistego pojęcia (włączenie tego pojęcia do matematyki) prowadzi do wewnętrznej sprzeczności. Podanie dowodu twierdzenia (wcześniej uznawanego za oczywiste bez dowodu a teraz zaprzeczonego przez kontrprzykłady) jeszcze pogłębia tę trudność. Teraz sprzeczność dosięga samej istoty matematyki: twierdzenie, które posiada ścisły dowód, jest w tym samym momencie zaprzeczone przez kontrprzykłady. Zbyt drastyczną wydaje się sugestia, aby ograniczyć zasięg twierdzeń tylko do tych przypadków, które nie generują kontrprzykładów, gdyż prowadzi to do zbyt dużego ograniczenia zasięgu twierdzenia, a problemu nie rozwiązuje. Przecież to dowód ma ustalić zakres prawdziwości twierdzenia, a nie jakieś inne badania.

Sytuacja wydaje się być bez wyjścia. Można zauważyć jednak, że mamy tutaj do czynienia z trzema elementami ściśle ze sobą powiązanymi: dowód twierdzenia, kontrprzykład do tego twierdzenia oraz definicje pojęć użytych w twierdzeniu. Wygląda na to, że żaden z tych elementów nie ma sensu sam w sobie. Jako obiekt matematyczny mający swoją ontologiczną tożsamość istnieje dopiero układ tych trzech elementów  $\{P, C, D\}$ , gdzie  $P$  oznacza dowód twierdzenia,  $C$  kontrprzykład do niego a  $D$  definicję nowego pojęcia wygenerowanego przez dowód i kontrprzykład.

Dowód oczywistego twierdzenia jest odrzuceniem wartości intuicji jako narzędzia rozumienia podstawowych pojęć matematyki. Intuicję trzeba zastąpić nowymi obiektami matematycznymi – i tak rodzą się nowe pojęcia. Trzeba jednak dostrzec sprzeczności w matematycznej strukturze i rozpocząć próbę likwidacji tych sprzeczności przez nowe konstrukcje i definicje.

Chciałbym uogólnić powyższy schemat logiki odkrywania i rozwoju pojęć matematycznych i zobaczyć w nim również schemat badań historii matematyki. Głównymi narzędziami, które posłużą do tego uogólnienia, będą twierdzenia Tarskiego związane z jego definicją prawdy oraz koncepcja Fregego prawdziwości zdań.

#### 4. Konsekwencje twierdzeń Tarskiego dla badań historii matematyki.

Chciałbym rozpocząć przybliżenie koncepcji prawdy Tarskiego od przypomnienia dwóch antynomii starożytnych, które mają ścisły związek z tą właśnie koncepcją. Całe rozumowanie Tarskiego jest w dużym stopniu polemiką z tymi antynomiami i próbą obrony możliwości posługiwania się pojęciem prawdy w nauce.

##### A1. Argument megarejczyków

Każda istniejąca rzecz musi znajdować się w jakimś miejscu. Jeśli to miejsce jest miejscem w jakiejś przestrzeni, to sama ta przestrzeń musiałaby się również znajdować w jakiejś innej przestrzeni. Otrzymujemy więc nieskończony ciąg różnych przestrzeni, co jest niemożliwe. Świadczy to o tym, że prze-



strzeń nie istnieje. W tym paradoksie znajdują się przynajmniej dwa kluczowe problemy:

1. Problem sensowności odwzorowań (zanurzeń) różnych rzeczywistości w siebie. „Rzecz” i „miejsce” są to byty mające inny status ontologiczny. Jeśli założymy, że możliwe jest umieszczenie rzeczy w „jakiejs” przestrzeni, która jest bytem innego rodzaju, niż ta rzecz, to nic nie stoi na przeszkodzie, aby tę przestrzeń znów umieścić w innej przestrzeni itd. Pojęcie przestrzeni staje się więc „rozmyte”, ma nieskończenie wiele znaczeń. Czy nie mamy do czynienia z podobną sytuacją w przypadku nauki, która jest próbą umieszczenia w ramach swoich struktur doświadczanego i poznawanego świata? Jeśli świat domaga się poznawczego i racjonalnego uzupełnienia, to dlaczego nie przenieść takich wymagań na konstruowaną naukę?

Wprowadzenie zakazu „zanurzania” obiektów w obiekty o innym statusie ontologicznym mogłoby ten paradoks rozwiązać. Wtedy założenie, że obiekt *A* jest „zanurzalny” w obiekcie *B* prowadzi do wniosku, że obiekt *A* jest częścią obiektu *B*, jako jego część składowa. Pozornie w matematyce ten zakaz został złamany, gdy wprowadzono odwzorowania pomiędzy np. zbiorem punktów i zbiorem funkcji. Zauważmy jednak, że stało się to dopiero wówczas, gdy pojawiło się ogólne pojęcie zbioru – dzięki temu odwzorowania są dokonywane pomiędzy obiektami o tym samym statusie ontologicznym tj. zbiorami. W przypadku nauki, aby przekroczyć tę antynomię, musimy założyć, że struktura ontologiczna świata jest identyczna ze strukturą nauki.

2. Opis, czyli mówienie o rzeczywistości, wiąże się z wprowadzeniem poziomu „meta”, a więc nowej „rzeczywistości” posiadającej swoją strukturę i specyfikę. Prawda rzeczywistości jest więc zależna od tej nowej struktury, jej spójności, logiczności itp. Jednak ocena tej nowej rzeczywistości musi dokonywać się z pozycji nowego „meta”. Prawda o rzeczywistości umyka więc, oddala się do nieskończoności. Czy można ten nieskończony łańcuch „meta” zamknąć, sprawić, aby kolejne „meta” stało się jedną z wcześniej rozpatrywanych rzeczywistości? Czy istnieje taka nauka, że w oparciu wyłącznie o jej struktury można zbudować jej meta-naukę?

#### A2. Argument Eulidesa.

Jeśli kłamca mówi, że kłamie, to, zakładając fałszywość jego wypowiedzi, dochodzimy do wniosku, że mówi prawdę, a znów zakładając prawdziwość jego słów stwierdzamy w konsekwencji, że jego wypowiedź jest fałszywa. W tym przypadku prawda i fałsz okazują się równoważne. Jeśli więc tworzymy pojęcie (np. pojęcie „kłamcy”), które użyte w jakiejś sytuacji prowadzi do sprzeczności, to czy należy odrzucić (lub zmienić) to pojęcie, czy może zakazać używania go w „niedozwolonych” sytuacjach. W historii nauki raczej dominowała ta druga tendencja.

Co wynika z faktu, że zdanie „Ja teraz kłamię” prowadzi do sprzeczności? Jest wiele konsekwencji tej antynomii i wiele wersji. Współcześnie jej nerw wykorzystany jest w antynomii klas niezwrrotnych Russela. Chciałbym zwrócić uwagę tylko na jedną z konsekwencji, która będzie wykorzystana w dalszej części: są takie obszary rzeczywistości, których nie można zanegować. Zawsze zostaje coś, co zostaje nietknięte, gdzie może schronić się prawda. W tym przypadku tym miejscem schronienia się prawdy jest samoodniesienie się - może być ono tylko samopotwierdzeniem, a nigdy samozaprzeczeniem! Zdanie „Kłamca mówi, że kłamię” prowadzi do analogicznej konkluzji. Sprzeczność, która jest wynikiem tej wypowiedzi, pokazuje, że pojęcie kłamcy nie jest „absolutne” tzn. muszą istnieć takie sytuacje, gdy kłamca przestaje być kłamcą - tylko prawdę można „rozciągnąć” na całą rzeczywistość, natomiast fałszu nie! Przecież zdania „Ja teraz mówię prawdę” nie można zaprzeczyć bez popadnięcia w sprzeczność.

Wnioski z powyższych analiz można sformułować następująco:

1. Nie wolno przyporządkowywać sobie obiektów o różnym statusie ontologicznym. Jak zobaczymy poniżej Tarski uzasadnia, że pojęcie dowodliwości ma inny status (ontologiczny) niż pojęcie prawdy. Dowód nie może być jedynym argumentem za prawdziwością danego zdania. Prawda domaga się innych („bogatszych”) argumentów.

2. Musi istnieć nauka, która zawiera w sobie zarazem prawdę o świecie jak i o sobie samej – tylko wtedy unikniemy sprzeczności lub *regressus ad infinitum*. Tarski konstruuje metajęzyk, który zawiera w sobie, jako część właściwą, język przedmiotowy. Właśnie w tym metajęzyku możemy dopiero zdefiniować prawdę.

3. Jedynie prawda (a nie fałsz) ma odniesienie do każdego fragmentu rzeczywistości – również do całości. Wręcz ta „całość” jest potrzebna, aby pojęcie prawdy miało sens. Tarski pokazuje, że poprawna definicja prawdy musi odpowiadać pewnemu ogólnemu schematowi, dającemu możliwość rozstrzygnięcia prawdziwości wszystkich zdań podpadających pod ten schemat. Ta kwestia będzie wyjaśniona w dalszej części.

Powyższe antynomie były w znacznym stopniu bodźcem do czynienia prób sformułowania definicji prawdy oraz podania kryterium prawdy w ramach danych teorii naukowych. Ukazywały też kierunki ewentualnych rozstrzygnięć. Istotnym głosem w tej kwestii są dwa twierdzenia A. Tarskiego, które podejmują sugestie wynikające z istoty tych antynomii.

Jedno z nich mówi, że w przypadku dostatecznie „bogatych” systemów dedukcyjnych zbiór zdań prawdziwych jest istotnie większy od zbioru zdań, które posiadają dowód, czyli nie może istnieć, w ramach tej teorii, ogólne kryte-

rium prawdy (w przypadku każdej „bogatej” teorii wymyka się nam możliwość formalnego „zadekretowania” prawdy).

Kolejnie mówi, że jeśli zdanie jest prawdziwe w jednym modelu danego systemu aksjomatycznego, to w każdym innym modelu tego systemu jest ono również prawdziwe. To sugeruje, że prawda ma w pewnym sensie walor absolutny – nie zależy ona od sposobu zapisu oraz interpretacji.

### Definicja prawdy

W swoich analizach Tarski korzysta z klasycznej definicji prawdy. Jest ona według niego jedyną definicją prawdy wypracowaną przez filozofię, na której można oprzeć analizy logiczne. W przypadku klasycznej definicji prawdy (a drogi filozofii pokazują, że trudno jest uwolnić się od tej właśnie definicji – wszelkie inne próby zdefiniowania muszą w konsekwencji wykorzystać definicję klasyczną) chodzi o zgodność treści sądu i rzeczy, do której ten sąd się odnosi. W przypadku, gdy treść sądu ma inną strukturę ontologiczną niż odpowiadający temu sądowi stan rzeczy, to uzgodnienie stanowi zasadniczą trudność. W przypadku praw rozumowania, treść sądu i rzecz przedstawiana posiadają ten sam rodzaj istnienia. Ponieważ stwierdzenia nauk szczegółowych w znaczącej mierze korzystają ze schematu zdań warunkowych (jeśli  $x$  to  $y$ ), więc (może) dlatego ma sens mówienie w nauce o pewności i prawdziwie.

Tarski stawia zasadnicze pytanie: czy zbiór wszystkich zdań formalnie dowodliwych pokrywa się ze zbiorem wszystkich zdań prawdziwych? Na gruncie logiki formalnej dokładnie zdefiniowane jest pojęcie zdania formalnie dowodliwego (w ramach danej teorii). Jest to zdanie, które jest konsekwencją przyjętych aksjomatów, czyli zdanie, które można udowodnić w oparciu o przyjęte aksjomaty i reguły dowodzenia. Co oznacza jednak termin *zdanie prawdziwe*? Jak sądzi Arystoteles: *Jest fałszem powiedzieć o tym, co jest, że nie jest, lub o tym, co nie jest, że jest; jest prawdą powiedzieć o tym, co jest, że jest, lub o tym, co nie jest, że nie jest.*<sup>12</sup>

Do tej właśnie definicji prawdy (tzw. klasycznej, na której oparta jest korespondencyjna teoria prawdy) nawiązuje Tarski uznając jej poprawność z intuicyjnego punktu widzenia. Jednak brak jej poprawności i ścisłości formalnej.

Tarski ogranicza, zgodnie z konwencją logiczną, stosowanie terminu „prawdziwy” do zdań. Wiąże się z tym fakt, że pojęcie prawdy ograniczone jest do określonego języka, w którym zdanie jest sformułowane i dopiero tam nabiera sensu i znaczenia. Droga, która doprowadziła Tarskiego do podania definicji prawdy, utwierdzona jest na dwóch faktach filozoficznych odkrytych przez Starożytnych: koncepcji prawdy Arystotelesa oraz paradoksie kłamcy Eublideasa. Chodzi o ścisłe sformułowanie, przy pomocy narzędzi logicznych, arystotelesowskiej definicji prawdy, która byłaby w stanie ominąć pułapkę zastawioną przez antynomię kłamcy.

Istotę koncepcji prawdy Arystotelesa sprowadza Tarski do następującej formuły:

*Prawdziwość zdania polega na jego zgodności (lub korespondencji) z rzeczywistością;*

lub, jeśli uznamy, że stan rzeczy jest desygнатem zdania,

*Zdanie jest prawdziwe, jeśli oznacza istniejący stan rzeczy.*

Są to jednak tylko intuicje, którym brak jasności i ścisłości. Istnieje zasadnicza trudność w uchwyceniu sensu oznaczania przez zdanie istniejącego stanu rzeczy: „zdanie” nie może być identyczne ze „stanem rzeczy”, nie może też się od niego zasadniczo różnić. Nie mogą więc te pojęcia prowadzić do zadowalającej definicji prawdy.

W celu uniknięcia używania nieścisłych pojęć dokonajmy formalnej analizy powyższego sformułowania. Rozważmy konkretne zdanie  $p$ . Wówczas powyższe definicje prowadzą do następującej równoważności:

*Zdanie „ $p$ ” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$ .*

Oczywiście „ $p$ ” oznacza nazwę zdania  $p$ . Oznaczmy nazwę zdania  $p$  literą  $X$ . Wtedy powyższa równoważność przyjmuje postać:

(T)  *$X$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$ .*

Powyższa równoważność nie jest zdaniem, tylko formą zdaniową; można ją traktować jako definicję prawdy, jeśli, dla wszystkich możliwych podstawień za zmienne  $p$  i  $X$ , w oparciu o nią będzie można rozstrzygnąć, na czym polega prawdziwość tego zdania. Takich możliwych podstawień jest nieskończenie wiele. Zobaczmy, co na ten temat pisze Tarski:

*„Podkreślić trzeba, że ani samego wyrażenia (T) (które nie jest zdaniem, tylko schematem zdania), ani żadnego poszczególnego podstawienia schematu (T) nie można uważać za definicję prawdy. Możemy jedynie powiedzieć, że każdą równoważność postaci (T) uzyskaną przez zastąpienie 'p' określonym zdaniem, a 'X' nazwą tego zdania, uważamy za cząstkową definicję prawdy, wyjaśniającą, na czym polega prawdziwość tego konkretnego zdania. Ogólna definicja musi być w pewnym określonym sensie logiczną koniunkcją wszystkich takich cząstkowych definicji”<sup>13</sup>.*

W celu sprostania temu zadaniu proponuje Tarski traktować pojęcie prawdy jako pojęcie semantyczne tzn. opisujące relacje między wyrażeniami



języka, a odnoszącymi się do nich przedmiotami. Wydaje się to na pierwszy rzut oka niemożliwe, gdyż słowo „prawdziwy”, w sensie logicznym, wyraża własność zdań. Zdania jednak są zbudowane z wyrażen, które właśnie odnoszą się do pewnych stanów rzeczy. Dlatego do zdefiniowania prawdy zostanie użyte kluczowe pojęcie semantyczne „spełniania”. Jak jednak uniknąć antynomii kłamcy, skoro za jej wystąpienie wydaje się być odpowiedzialne właśnie użycie pojęć semantycznych. W celu rozwiązania problemu zdefiniowania prawdy w sposób ścisły i jednoznaczny należy ściśle określić strukturę języka, w którym pojęcie prawdy zostanie zdefiniowane. Realizacja następujących warunków sprawi, że struktura języka będzie ściśle określona:

1. Należy jednoznacznie scharakteryzować klasę słów i wyrażen uważanych za sensowne i w jej ramach wskazać wyrażenia niedefiniowalne.

2. Należy podać reguły definiowania terminów nowych.

3. Należy ustalić zasady wyróżniania wyrażen zwanych „zdaniami”. Należy sformułować warunki uznawania zdań, a w szczególności wskazać zdania przyjmowane bez dowodu tzw. aksjomaty.

4. Należy podać reguły dowodzenia, czyli wyprowadzania nowych zdań (czyli „zdań dowodliwych”) ze zdań już wcześniej uznanych.<sup>14</sup>

Spróbujmy teraz dotrzeć do założeń, które są odpowiedzialne za sprzeczność w antynomii kłamcy. W celu ograniczenia się wyłącznie do założeń istotnych Tarski proponuje następującą modyfikację antynomii kłamcy:

„Niech  $S$  będzie dowolnym zdaniem zaczynającym się od słów „Każde zdanie”. Zdaniu  $S$  przyporządkowujemy nowe zdanie  $S^*$ , poddając  $S$  następującym dwóm modyfikacjom: usuwamy z  $S$  słowo „każde” i po słowie „zdanie” wstawiamy całe zdanie  $S$  ujęte w cudzysłów. Umówmy się nazywać  $S$  „samostosowalnym” bądź „niesamostosowalnym” w zależności od tego, czy przyporządkowane mu zdanie  $S^*$  jest prawdziwe, czy fałszywe. Rozważmy teraz następujące zdanie: *Każde zdanie jest niestosowalne*. Łatwo można wykazać, że zdanie właśnie napisane musi być zarówno stosowalne, jak i niestosowalne; a więc otrzymujemy sprzeczność”<sup>15</sup>!

Analiza antynomii w powyższej postaci prowadzi do wyszczególnienia następujących założeń:

1. Język, w którym sformułowana jest antynomia kłamcy, zawierać musi, wraz z występującymi w nim wyrażeniami, ich nazwy.

2. Elementami tego języka muszą być terminy semantyczne takie jak np. „prawdziwy”.

3. Wszystkie zdania określające trafny sposób użycia terminu „prawdziwy” są uznane w tym języku.

4. W języku tym obowiązują zwykłe prawa logiki.<sup>16</sup>

Język, który spełnia założenia 1-3, nazywamy *językiem semantycznie zamkniętym*. I, o ile nie będziemy odrzucać praw logiki, musimy odrzucić języki semantycznie zamknięte, aby uniknąć antynomii kłamcy oraz innych tego typu antynomii. Przy definiowaniu prawdy należy więc używać dwóch języków: *języka przedmiotowego* (o którym się mówi i do którego ma stosować się definicja prawdy) oraz *metajęzyka* (w którym mówimy o języku przedmiotowym i w którym będzie sformułowana definicja prawdy).

Podana wcześniej równoważność (T) ma być konsekwencją przyjętej definicji prawdy (oczywiście w metajęzyku). Ponieważ symbol ' $p$ ' (z metajęzyka) jest nazwą dowolnego zdania wziętego z języka przedmiotowego, więc metajęzyk zawiera język przedmiotowy jako swoją część. Ponadto symbole  $X$  zostają wprowadzone do metajęzyka, aby reprezentować nazwy zdań zastępowalnych przez ' $p$ '. Konieczne jest więc odpowiednie bogactwo metajęzyka, aby pomieścić te wszystkie symbole. Oprócz terminów odnoszących się do języka przedmiotowego oraz terminów logicznych, metajęzyk może zawierać terminy wyłącznie zdefiniowane (dotyczy to w szczególności pojęć semantycznych).

Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym zdefiniowania pojęcia prawdy bez popadania w antynomię kłamcy jest to, aby metajęzyk był „istotnie bogatszy” od języka przedmiotowego (oznacza to, że pewne symbole typu ' $p$ ' zawarte w metajęzyku, gdzie  $p$  jest zdaniem języka przedmiotowego, nie mogą być elementami tego języka ani posiadać w nim odpowiedników). Jeśli warunek powyższy nie jest spełniony, to metajęzyk jest zanurzalny w języku i sformułowana w nim definicja prawdy jest przekładalna na zdanie języka przedmiotowego, co w znany sposób pozwala na rekonstrukcję antynomii kłamcy.

W przypadku odrzucenia założenia o „istotnym bogactwie” metajęzyka, trzeba również zrezygnować z podania definicji prawdy. Termin „prawdziwy” należy traktować wtedy jako pojęcie pierwotne, a użycie wyrażeń zawierających ten termin określić w sposób aksjomatyczny.

Opierając się na powyższych założeniach Tarski definiuje pojęcie prawdy wykorzystując pojęcie *spełniania*. Spełnianie jest relacją zachodzącą między funkcjami zdaniowymi (są to wyrażenia mające postać zdań, jednak zamiast nazw mogą występować w nich zmienne wolne) a przedmiotami: *dane przedmioty spełniają daną funkcję zdaniową, jeśli staje się ona zdaniem prawdziwym po zastąpieniu w niej wszystkich zmiennych nazwami tych przedmiotów*. Ponieważ w przypadku określonej formy zdaniowej istnieje określony zbiór przedmiotów (dziedzina formy zdaniowej), które można podstawiać za zmienne wolne tej formy, więc spełnianie można rozumieć jako relację między formą zdaniową a jej dziedziną. Zdanie jest szczególnego rodzaju formą zdaniową, w której nie występują zmienne wolne. Stosuje się więc do niego również definicja spełniania. W przypadku zdania nie jest możliwe, aby było ono spełnione tylko przez część przedmiotów ze swojej dziedziny (bo te przedmioty są nazwami występującymi aktualnie w tym zdaniu) — zdanie jest spełnione przez

wszystkie przedmioty, albo nie jest spełnione przez żaden przedmiot. I tym samym otrzymujemy definicję prawdy i fałszu:

*Zdanie jest prawdziwe, jeśli jest spełnione przez wszystkie przedmioty, a fałszywe, gdy żaden przedmiot go nie spełnia.*

Zwróćmy uwagę na konsekwencje powyższej definicji. W oparciu o tę definicję można łatwo udowodnić *prawo niesprzeczności* (niemożliwe jest, aby dwa zdania sprzeczne były spełnione przez tę samą klasę przedmiotów) oraz *prawo wyłączonego środka* (z dwóch zdań sprzecznych jedno musi być spełnione przez wszystkie przedmioty dziedziny, gdyż ta dziedzina jest wspólna dla obu zdań i tylko dla nich).

Rozpatrzmy dwa zbiory: zbiór zdań dowodliwych  $D$  (tzn. zdań, które można otrzymać z aksjomatów przez zastosowanie reguł wnioskowania: podstawiania i odrywania) oraz zbiór zdań prawdziwych  $P$ . Okazuje się, że zbiór  $D$  zawiera się w zbiorze  $P$  (wynika to z tego, że dowód przeprowadzony w języku przedmiotowym ma swój odpowiednik w metajęzyku, a relacja spełniania jest zachowywana przy operacjach logicznych), jednak odwrotnie być nie musi (wynika to z istotnego bogactwa metajęzyka, gdyż pojęcie dowodliwości może być zdefiniowane wyłącznie przy pomocy języka przedmiotowego, natomiast pojęcie prawdy nie – musi być sformułowane w metajęzyku). Czyli z dwóch zdań sprzecznych co najwyżej jedno jest dowodliwe, jednak istnieje para zdań sprzecznych niedowodliwych.

Możliwość sformułowania poprawnej definicji prawdy dla danego języka sformalizowanego jest więc dowodem jego niesprzeczności (gdyż  $D \subset P$ ). Zarazem jednak, ponieważ podanie definicji prawdy jest możliwe tylko w przypadku metajęzyka bogatszego od odpowiadającego mu języka przedmiotowego (co wiąże się z faktem, że  $D \neq P$ ), sformułowanie definicji prawdy dla danego języka jest dowodem jego niezupełności (istnieją zdania prawdziwe, które nie są dowodliwe).

#### Twierdzenie o dedukcji

Mając dowolną teorię dedukcyjną (tzn. zawierającą logikę klasyczną) zastępujemy terminy pierwotne zmiennymi. Prawa teorii stają się funkcjami zdaniowymi. Jedynymi stałymi są stałe należące do logiki, czyli logika jest jedyną nauką przyjętą jako podstawa tej teorii. Dla dowolnego zbioru obiektów (przedmioty, klasy, relacje) możemy sprawdzać czy spełniają funkcje zdaniowe tej teorii tzn. czy po podstawieniu nazw tych obiektów w miejsce zmiennych wolnych otrzymamy zdania prawdziwe. W przypadku pozytywnego wyniku sprawdzenia zbiór tych obiektów nazywamy realizacją systemu aksjomatycznego czy modelem teorii. Okazuje się, że w tak ogólnym przypadku:

*Każde twierdzenie danej teorii dedukcyjnej spełnione jest przez dowolny model systemu aksjomatycznego tej teorii*<sup>17</sup>.

Jak można znaleźć inne modele danej teorii dedukcyjnej  $T$ ? Wystarczy np. wybrać pewne wyrazy stałe (mogą to być terminy pierwotne lub zdefiniowane) z innej teorii dedukcyjnej  $T_1$  wstawić je do aksjomatów w miejsce terminów pierwotnych teorii  $T$ . Następnie należy pokazać, że tak otrzymane zdania są prawdziwe w  $T_1$ . W analogiczny sposób przekształcamy wszystkie twierdzenia teorii  $T$  poprzez zastąpienie w nich terminów pierwotnych wyrazami stałymi użytymi do podstawień w aksjomatach. W takim przypadku mówimy, że znaleźliśmy interpretację teorii  $T$  w teorii  $T_1$ . Otrzymujemy następujący wniosek:

*Wszystkie twierdzenia udowodnione w oparciu o dany system aksjomatyczny pozostają słuszne dla dowolnej interpretacji tego systemu*<sup>18</sup>.

Obecnie spróbujemy wykorzystać powyższe fakty do pełniejszego zrozumienia przedstawionej w paragrafie 3 metody badań historycznych. Oczywiście twierdzenia Tarskiego mają zastosowanie do teorii dedukcyjnych, więc w przypadku badań historycznych chodzi tylko o pewne analogie.

Twierdzenie Tarskiego o prawdzie mówi, że nie istnieje możliwość sformułowania poprawnej definicji prawdy, jeśli metajęzyk, w którym tę definicję formułujemy, nie jest istotnie bogatszy od języka przedmiotowego. Próba zinterpretowania definicji prawdy w języku przedmiotowym prowadzi nieuchronnie do pojawienia się paradoksu kłamcy – bogactwo metajęzyka daje możliwość uniknięcia takiej interpretacji.

Analogicznie możemy założyć, że modele teoretyczne, w ramach których badamy naukę, winny być bogatsze od świata opisywanych faktów historycznych. Muszą pojawić się w tym modelu pewne byty teoretyczne nie mające przełożenia na fakty historii nauki – istnienie tych bytów jest konieczne do tego, aby pojęcie prawdy miało sens i było niesprzeczne. Ponadto, dowód (czyli analizy historyczne) w przypadku pewnych faktów nie wystarczy, aby zrozumieć ich sens i znaczenie. Trzeba mieć inne narzędzia, opracowane w metajęzyku, czyli osiągalne poprzez skonstruowany model rozwoju nauki.

Natomiast wniosek z twierdzenia o dedukcji prowadzi do następującej analogii. Jeśli analizujemy daną teorię naukową w danym momencie jej rozwoju, to odkryte zależności oraz znaczenia pojęć i struktur zachowują swoją rangę i wartość w innym kontekście historycznym. Raz odkryte zależności pozwalają na patrzenie na inne związane z nimi (i określone przez nie) wydarzenia z historii nauki jako na wydarzenia „sensowne” i racjonalne. Dowodzi to niezależność nauki od uwarunkowań historycznych, a zarazem ukazuje sens i potrzebę analiz historycznych dla zrozumienia istoty i rangi danych struktur i pojęć nauki.



## 5. Fakt historyczny a prawdziwość zdań Fregego

Jak ocenić prawdziwość zdania ogólnego, w jaki sposób można je najpewniej uzasadnić, czyli jak ująć je w logiczną strukturę lub powiązać je ze zbiorem konkretów, faktów? Czy czyste myślenie może być ujęte w ramy języka formalnego? Frege w swojej *Ideografii*<sup>19</sup>, stawiając powyższe pytania i pragnąc na nie odpowiedzieć, koncentruje się nie tyle na zdefiniowaniu prawdy (co czyni Tarski), lecz zakładając jej rozumienie jako stan pierwotny badającego umysłu, próbuje podać kryterium prawdziwości. Jest to odważna kontynuacja programu Leibniza opracowania formalnego rachunku pozwalającego rozstrzygać wszelkie możliwe kwestie.

W celu przybliżenia się do odpowiedzi na powyższe pytania Frege wprowadza pojęcie *treści pojęciowej* (*begrifflicher Inhalt*) odnoszącej się do treści zdania, która nie zależy od tego czy dana część zdania pełni rolę podmiotu, czy orzeczenia. Na przykład zdanie *A* – *Jan pije kawę* oraz zdanie *B* – *Kawa jest pita przez Jana* mają tę samą treść pojęciową. Odróżnienie podmiotu i orzeczenia jest zabiegiem sztucznym, czysto konwencjonalnym i nie wpływa na treść pojęciową zdania. Powyższe zdania można zapisać jeszcze w inny sposób: *C* – *Picie kawy przez Jana jest faktem*, gdzie pojawia się uniwersalne orzeczenie *jest faktem*. Przez wprowadzenie uniwersalnego orzeczenia *jest faktem* opis stanu (np. picia kawy przez Jana) staje się sądem. Ten zabieg pozwala uniknąć niejasności związanych z użyciem np. funktora negacji „–”. Zdania  $\neg A$  i  $\neg B$  mają inną treść pojęciową mimo, iż zdania *A* i *B* mają tę samą treść. W jakiś niejasny sposób na treść zdania negowanego ma wpływ budowa tego zdania. Aby uniknąć zamieszania umawiamy się, że wszystkie zdania są postaci *C*, a negacja stwierdza jedynie, że dana treść nie zachodzi.

Powyższe ustalenia pozwalają na „desubiektywację” zdań – treść zdania nie zależy od wyboru części zdania pełniącej rolę podmiotu. Ponadto, ponieważ wszystkie zdania posiadają uniwersalne, wspólne orzeczenie (*jest faktem*), więc tym samym otrzymujemy zbiór faktów jako faktów samych w sobie, o których nic nie orzekamy. Możemy więc zrezygnować z założenia, że istnieje jakaś „zewnętrzność” (warunki psychiczne, kulturowe, socjologiczne itp.), która ten fakt wyjaśnia. Cała treść mieści się w tym fakcie i, aby to w pełni zobaczyć, trzeba go tylko odpowiednio sformułować i poddać analizie. „Dopisanie” jakiegoś orzeczenia nic nie daje, bo i tak trzeba uzasadnić prawomocność przypisania podmiotowi tego właśnie orzeczenia. To nie fakt historyczny jest nośnikiem prawdy, lecz sam „czysty fakt”. Natomiast samo umieszczanie twierdzeń i pojęć w różnych kontekstach historycznych pozwala jedynie wydobyć z tych matematycznych struktur treść i znaczenie.

Czy więc sąd tworzy się w sposób uniwersalny przy pomocy jednego ustalonego zwrotu – a zatem czy prawda faktu z historii nauki jest ukazywana przy pomocy jednego uniwersalnego „odsłonięcia”, a umieszczanie tego faktu

w innych kontekstach historycznych służy raczej do rozjaśniania tego kontekstu, niż do ukazania faktu?

Zauważmy, że każde zdanie w naturalny sposób rozpada się na dwie części:

1. Część stałą przedstawiającą całokształt stosunków oraz
2. znak, który można wymieniać z innymi, i który oznacza przedmiot pozostający w tych właśnie stosunkach z innymi przedmiotami.

Frege część stałą nazywa *funkcją* a wymienną (znak) *argumentem*. Wprowadza następujące oznaczenie:

$\vdash \Phi(a)$  — funkcja  $\Phi(a)$  jest faktem

W powyższym przykładzie funkcją może być *picie ..... przez Jana*, a argumentem *kawa* (wymienialna np. na inny napój); lecz również można przyjąć, że funkcją jest *picie kawy przez .....*, gdzie wymiennym znakiem jest imię *Jan*. Może to być również funkcja dwóch argumentów tzn. *picie ..... przez ..... .* Ważne jest, aby ustalić, co w danej wypowiedzi jest funkcją, a co argumentem. W trakcie analizy danego zdania nie można zmieniać tego ustalenia, bo prowadzi to do relatywizacji prawdy. Dane pojęcie ma sens i znaczenie tylko poprzez funkcję, której jest argumentem. Funkcją jest więc pewna ogólna forma, która sama w sobie nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa. Jednak to właśnie ona nadaje sens różnym znakom, gdyż o znaczenia słów należy pytać w ich związkach zdaniowych, nie zaś oddzielnie. Definicje danych znaków mają nadawać im sens już na początku konstrukcji i dowodów. Nie można zakładać, że dowód i otrzymane wyniki uprawomocnią przyjęte definicje mimo braku rozumienia i sensu występujących w tych definicjach znaków. Jest to niebezpieczne uzależnianie teorii matematycznej od doświadczenia - aby uniknąć ewentualnych sprzeczności trzeba uzyskać znaczenie używanych słów niezależnie od dowodu na drodze ogólnej i formalnej definicji.

Jaki jest więc sens dowodu? Ma on uwolnić prawdziwość zdania od wszelkich wątpliwości oraz pokazać zależność jednych prawd od innych. Treść danego sądu nie musi mieć więc wiele wspólnego z dowodem tego sądu. Dowód jedynie pokazuje uprawnienie do wydania danego sądu. Jak to się dzieje?

Według Fregego dowód może operować wyłącznie ogólnymi prawami logicznymi i definicjami – wtedy mamy do czynienia z sądem analitycznym; jeśli trzeba w dowodzie odwołać się do jakiegoś szczególnego obszaru wiedzy, nie mającego charakteru ogólnych prawd logicznych, to jest to sąd syntetyczny. Sądy *a priori* znów, to sądy, które mogą być całkowicie wyprowadzone z prawd ogólnych nie wymagających dowodu. I w ten sposób dowód stanowi

kryterium rozróżniania między różnego typu zdaniami i wskazuje na źródło uzasadnienia zdania.

Wykorzystajmy powyższe uwagi do ukazania analogii z badaniami w ramach historii nauki. Śledzenie danych „faktów” i struktur nauki w różnych kontekstach historycznych jest odpowiednikiem dowodu i ma ono za cel nie tyle wykazanie, że dany fakt historyczny rzeczywiście miał miejsce, lecz wskazanie argumentów czy struktur, które pokazują miejsce i zasięg tych faktów w dziejach nauki. To oczywiście wskazuje na to, że ten fakt (lub fakt o zbliżonej strukturze) rzeczywiście miał miejsce. Do ukazania treści służy bieżący stan nauki. Tylko przez jego pryzmat możemy patrzeć na historię – bez niego żadna nowa treść ani nowy fakt historyczny nie może zostać odkryty, gdyż jest po prostu niewidoczny.

## 6. Ogólny schemat badań historii matematyki

Możemy teraz spojrzeć na etapy rozwoju teorii matematycznych wskazane przez Lakatosa nieco szerzej, wykorzystując analizy koncepcji Tarskiego i Fregego, przedstawione w poprzednich paragrafach.

Sformułowanie danej hipotezy oznacza, że została ona przyjęta i uwiarygodniona w oparciu o pewne argumenty, o których się *explicite* nie mówi. Pochodzą one spoza teorii a ich sens nie jest do końca przejrzysty z matematycznego punktu widzenia; ponadto, nie wiadomo jaka jest ranga i miejsce tej hipotezy w strukturze matematyki. Stąd pojawia się etap drugi, czyli dowód (rozbiecie hipotezy na mniejsze części – lematy i doprecyzowanie pojęć).

Wyjście poza obszar pierwotnej oczywistości rodzi problemy i pojawiają się sprzeczności. Zostają dostrzeżone kontrprzykłady do pierwotnej hipotezy, które pokazują, że istnieje konflikt między tymi intuicjami, które wygenerowały hipotezę, a ustaloną strukturą matematyki (próba „okiełznania” intuicji nie udaje się). Trzeba wskazać tę część dowodu (rozłożonej na części hipotezy), która skupia w sobie istotę używanych dotychczas intuicji (czyli jest odpowiedzialna za sprzeczność). Następuje więc przesunięcie rangi i znaczenia pierwotnej hipotezy do wskazanej części dowodu. Ta część (winny sprzeczności lemat) zawiera zarazem definicję nowego matematycznego pojęcia.

W przypadku badania dziejów struktur matematycznych (pojęć, dowodów) analogicznie wykorzystujemy powyższy schemat.

1. Rozpoczynamy od istniejącej aktualnie w matematyce definicji danej matematycznej struktury i analizujemy intuicje związane z tym pojęciem (pierwotna hipoteza). Następuje umieszczenie tej struktury w „kontekście filozoficznym” tzn. ukazanie jej powiązania z ważnymi problemami filozoficznymi. Ma miejsce podanie narzędzi filozoficznych (istotnie bogatszych od świata opisy-

wanych faktów – analogia z twierdzeniem Tarskiego), które będą służyć do porównania istniejącej definicji z rozumieniem definiowanego bytu w różnych momentach historii matematyki.

2. Analiza historyczna powstania danej struktury matematycznej i ukazanie różnych prób jej uchwycenia i zrozumienia w matematyce.

3. Dotarcie do takiego momentu w rozwoju danej teorii, który wydaje się podważać sens zachowania jej związku z zagadnieniami filozoficznymi, z których wyrosła.

4. Analizując powstanie danej struktury zauważamy co decyduje o tym, że ma ona określony sens i jest „niesprzeczna” przy jednoczesnym zachowaniu powiązań z odpowiednimi zagadnieniami filozoficznymi. Okazuje się, że raz odkryte zależności pozwalają patrzeć na związane z nimi fakty historii jako na wydarzenia sensowne i racjonalne. W tym momencie wyłania się nowe rozumienie danego pojęcia (jest to równocześnie odkrycie problemu filozoficznego), które można traktować jako jego istotę. Dostrzegamy, że w gruncie rzeczy ma miejsce jedno kluczowe odsłonięcie danego bytu (przy ostatecznym sformułowaniu matematycznej definicji i podaniu podstawowych twierdzeń), a kolejne umieszczanie go w różnych kontekstach historycznych służy raczej do rozjaśnienia tego kontekstu, czyli sytuacji problemowej, z którą jest związany.

5. Kolejny etap (odpowiadający etapom 5, 6, 7 metody Lakatos), to próba odnajdywania odkrytego problemu filozoficznego w innych zagadnieniach filozoficznych i naukowych. Im więcej takich miejsc i im większa ich ranga, tym większe znaczenie ma odkryty problem. Trzeba dokonać również analizy wpływu zbadanego problemu na rozumienie innych zagadnień filozoficznych. Tym samym otwierają się nowe obszary badań.

W powyższym schemacie badań historycznych w ramach systemu, na początku badań mamy do czynienia z oczywistymi prawdami, które nie wydają się potrzebować żadnych analiz. Te prawdy składają się z pojęć, których sens określony jest przez strukturę danej teorii. W rozdziale II rozpocznę badania dotyczące pojęcia *continuum* i różnorodnych problemów z nim związanych. Ukażę jak w topologii zostało zdefiniowane pojęcie *continuum* (topologicznego) i jak to pojęcie odpowiada pierwotnym intuicjom. Ta zgodność w miarę prostej, formalnej struktury z czymś co ma tak ogólny i uniwersalny charakter jest czymś zastanawiającym. Sytuacja komplikuje się w miarę dołączania kolejnych zagadnień filozoficznych, które wiążą się z problemem *continuum*. Szczególną moc i aktualność zdają się mieć analizy Arystotelesa dotyczące zagadnienia *continuum* i paradoksy Zenona z Elei, ukazujące trudność w zrozumieniu pojęcia *continuum*. Ani formalne, ani intuicyjne rozumienie nie wystarcza, aby wyjaśnić tę kwestię. I w ten sposób pojawia się pierwotna hipoteza ujęta językiem paradoksów eleackich. Wiele kluczowych zagadnień podjętych przez Starożytnych zdaje się ogniskować w pojęciu *continuum*. Może jest tak, że założenie o istnieniu *continuum* jest konieczne, aby rozwiązać czy zrozumieć podjęte



problemy. Sprzeczności, na które napotykamy przy analizie *continuum*, są wskaźnikiem niezrozumienia niektórych zdawałoby się oczywistych kwestii, a nie dowodem „nieracjonalności” *continuum*. Jak pisze René Thom: „To nie *continuum* stanowi problem, lecz *continuum*, dzięki realizacji nieskończoności aktualnej, usprawiedliwia nieskończoność przeliczalną; przecież Achilles prze-gania żółwia”<sup>20</sup>.

W rozdziale III wprowadzam pojęcie *absolutu poznawczego* oraz analizuję trzy koncepcje nauki uniwersalnej jakie pojawiły się w starożytności: platońską, pitagorejską i archimedejską. Podjęcie zagadnienia *continuum* w matematyce nowożytnej i współczesnej było ściśle związane z ideą nauki uniwersalnej.

W czasach nowożytnych sformułowano jednak co najmniej dwie nowe wizje nauki uniwersalnej – kartezjańską i leibnizjańską – które nawiązywały do koncepcji starożytnych (tym zajmuję się w rozdziale IV).

W oparciu o te idee (i w pewnej opozycji do nich) w XIX wieku została sformułowana nowa koncepcja nauki uniwersalnej wypracowana głównie przez Bolzano i Riemanna. Samo *continuum* zaczęło pełnić rolę absolutu poznawczego i uzyskało kilka konkretnych matematycznych realizacji m.in. jako *continuum rzeczywiste* Dedekinda i Cantora (tego dotyczy rozdział V).

Te badania dały też podstawę wypracowania pojęć (rozciągłości, otwartości, zwartości, spójności, rozmaitości), które legły u podstaw sformułowania w latach 1910-1922 topologicznego pojęcia *continuum*. Samo narodzenie się tego pojęcia (i początek rozwoju teorii *continuuów*) miało miejsce w pracach Brouwera i Janiszewskiego w latach 1910-1912 a pełne znaczenie uzyskało dzięki wynikom Knastera, Mazurkiewicza, Kuratowskiego, Sierpińskiego i innych. Istotne, dla dostrzeżenia znaczenia tego pojęcia i powstania nowej samodzielnej teorii matematycznej, było skonstruowanie *continuuów nierozkładalnych*, które zdawały się generować sprzeczności z wcześniejszym rozumieniem pojęcia *continuum*. W konsekwencji jednak pozwoliło głębiej wnikać w sens samego *continuum* i ukazało jego matematyczną rangę i znaczenie. Jest to temat VI rozdziału niniejszej pracy.

W ostatnim VII rozdziale ukazuję znaczenie przeprowadzonych badań historycznych dla filozofii, w szczególności pokazuję, w jaki sposób sformułowane w matematyce pojęcie *continuum* rozjaśnia kwestie związane z relacją między matematyką a rzeczywistością oraz jak nowa idea nauki uniwersalnej jest realizowana w filozofii.

## Przypisy:

- <sup>1</sup> Do zwolenników poglądu historycznego we wcześniejszym okresie można zaliczyć, między innymi: Pierre Gassendiego, Giambattiste Vico, Williama Whewella.
- <sup>2</sup> A. G. Kästner, *Geschichte der Mathematik, seit der widerherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Göttingen 1796.
- <sup>3</sup> M. Cantor, *Sur l'Historiographie des mathematiques*, „Compte Rendu du Deuxième Congrès International” 1902 s. 27-42.
- <sup>4</sup> P. Tannery, „Bulletin des sciences mathématiques”, część I, 1905.
- <sup>5</sup> G. Loria, „Bulletin des sciences mathématiques”, 1885 s. 114.
- <sup>6</sup> Q. Vetter, *O metodyce historii matematyki*, „Wiadomości Matematyczne”, t. XXX (1928), s. 175-182.
- <sup>7</sup> J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*. Warszawa 1964.
- <sup>8</sup> I. Lakatos, *Proofs and Refutations*. Cambridge 1976.
- <sup>9</sup> Tamże, s. 142-154.
- <sup>10</sup> Tamże, 127-134.
- <sup>11</sup> W. Wójcik, *Imre Lakatosa filozofia matematyki*. „Roczniki Filozoficzne” 1991-92 T. 39 z. 3 s. 77-89.
- <sup>12</sup> Arystoteles, *Kategorie* 14 b.
- <sup>13</sup> A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, T. 1 *Prawda*, Warszawa 1995, s. 236.
- <sup>14</sup> Tamże, s. 239.
- <sup>15</sup> Tamże, s. 242-243.
- <sup>16</sup> Tamże, s. 242.
- <sup>17</sup> A. Tarski, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Oxford 1994. Tłum. M. Sujczyńska, *Wprowadzenie do logiki*, Filia Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku, PHILOMATH, s. 133.
- <sup>18</sup> Tamże, s. 134.
- <sup>19</sup> G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1 Aufl., Verlag von Louis Nebert, Halle 1879. Tłum. K. Rotter, *Próby gramatyki filozoficznej*, Wrocław 1997 s. 45-85.
- <sup>20</sup> R. Thom, *Les mathématiques et l'intelligible*, „Dialectica” 29 (1975), s. 71-80. Tłum. R. Duda „Wiadomości Matematyczne” XXIII (1981) s. 210



## Rozdział II

### Problem *continuum*

#### 1. Próba intuicyjnego określenia *continuum*

Pojęcie *continuum* związane jest z fundamentalnymi pojęciami czasu i przestrzeni. Stąd, między innymi, bierze się tak duże znaczenie tego pojęcia. Jeśli mówimy, że przestrzeń czy czas mają strukturę *continuum*, to co chcemy przez to wyrazić? Jaką cechę tym obiektom przypisujemy?

Posiadanie struktury *continuum* przez czas czy przestrzeń oznacza, że nawet najmniejszy interwał czasowy nie jest chwilą, że możliwe jest dzielenie danego obszaru przestrzennego na dowolnie małe części, że przejście z jednego miejsca w inne czy z danej chwili w inną odbywa się w sposób ciągły, że nie ma przerw między poszczególnymi obszarami przestrzeni czy odcinkami czasowymi. Możliwość nieskończonej podzielności określimy słowem *ciągłość*, natomiast przyleganie części do siebie nazwiemy *spoiistością*. *Continuum* jest to więc byt, który ma cechy ciągłości i spoiistości<sup>1</sup>. Czy oprócz czasu i przestrzeni można wskazać jeszcze inne modele *continuum*? Są to np. strumień światła czy cieczy, intensywność barwy, ruch ciała w przestrzeni.

Przeciwieństwem<sup>2</sup> struktury *continuum* (ciągłej i spoistej) jest struktura dyskretna, w której elementy są od siebie oddzielone oraz istnieją w niej elementy najmniejsze (niepodzielne), z których ona jest zbudowana.

Mimo, iż przeważający w dziejach nauki był pogląd, że przestrzeń i czas mają strukturę *continuum*, to jednak również możemy odnaleźć zwolenników poglądu przeciwnego (np. Demokryt). Mimo tak dużego zainteresowania, pojęcie *continuum* zostało włączone do matematyki dopiero w XIX wieku (w analizie matematycznej) oraz w wieku XX (w topologii). Świadczy to o zasadniczej trudności w formalnym ujęciu struktury *continuum* i o jej bogactwie.

Czy problem *continuum* pojawił się już u starożytnych Greków – jeśli tak, to z jakich zagadnień filozoficznych się wyłonił?

Już rozważania jońskich filozofów zwróciły uwagę na konieczność istnienia w rzeczywistym świecie elementu, który byłby niewyczerpywalny i charakteryzowałby się „pełnością”. Bo właśnie poszukiwania pierwszej przyczyny i zasady bytu (*arche*) mającej dać racjonalną podstawę budowy i działania świata prowadziły do takich wniosków. To poszukiwanie *arche*



przez greckich filozofów miało na celu dotarcie do takiego elementu rzeczywistości, który byłby początkiem wszystkich rzeczy, zasadą, siłą sprawczą oraz tworzywem całego kosmosu. U podstaw tych poszukiwań leżała wiara w racjonalność świata i potęgę ludzkiego rozumu. *Arche* ma okazać się immanentne wobec świata, być jego częścią, a zarazem ujmowalną rozumem strukturą, z której można skonstruować wszystkie elementy świata.

Okazuje się jednak, że tak rozumiane *arche* prowadzi w naturalny sposób do pojęć ciągłości i spoistości. *Arche* jako tworzywo wszystkich bytów musi być niewyczerpywalne i w sposób ciągły dostarczać materiału potrzebnego do ich powstania. Ponieważ jest wszędzie, nie może być przerw w jego występowaniu (spoistość) – różne formy, które przyjmuje przechodzą płynnie w siebie. Tales przecież głosił, że wszystko jest przeniknięte zasadą-wodą, apejron Anaksymandera był nieskończony i absolutnie jednorodny, a według Anaksymenesa wszystko powstaje z powietrza przez zagęszczanie i rozrzedzanie. Ogień-logos Heraklita natomiast przenika i łączy wszystko, nawet przeciwieństwa.

*Continuum* przejmuje cechy *arche* w dwóch zasadniczych punktach: jest niezniszczalne w przypadku podziału (każda najmniejsza cząstka *continuum* jest nadal *continuum*) oraz wypełnia sobą całą zajmowaną przestrzeń (jest tak położone, że nie ma w nim miejsca na byt innego rodzaju). Podział *continuum* na części oraz umiejscowienie poszczególnych części *continuum* w całości i względem siebie, są to kwestie, które pozwalają widzieć w strukturze *continuum* kontynuację problemu *arche*.

Jeśli więc przyjmiemy, że własności, które charakteryzują *continuum*, są podstawowymi elementami rzeczywistości, to *arche* powinno „nadawać się” również do zdefiniowania tych własności i odtwarzania struktury *continuum*. Docieramy tu do podstawowego kryterium oceniającego czy dany byt nadaje się do pełnienia roli *arche*, czy nie.

Filozofia grecka podała cztery główne sposoby podejścia do problemu *arche* (związane są z nimi zarazem różne sposoby podejścia do problemu *continuum*).

A. Pierwszy z nich polegał na poszukiwaniu dokładnie jednego elementu, który pozwalałby, przy pomocy odpowiednio dobranych metod, odtwarzać całą rzeczywistość. Najpoważniejszym kandydatem do pełnienia tej roli okazała się liczba z całym ładunkiem filozoficznych interpretacji podanym przez pitagorejczyków. Również eleaci wierzyli, że podstawa całej rzeczywistości (czyli to co naprawdę istnieje) może być tylko jedna. Jak zobaczymy w paragrafie 5 tego typu podejście generowało wiele paradoksów m.in. związanych z pojęciem *continuum*.

- B. Drugi z nich przyjmował, że do odtworzenia całej rzeczywistości potrzeba więcej niż jeden (lecz skończenie wiele) elementów. Należy więc znaleźć skończoną kolekcję elementów pierwotnych. Przykładem realizacji tego pomysłu była koncepcja czterech żywiołów Empedoklesa. Również w tym nurcie mieści się idea Platona (przedstawiona w paragrafie 3) o konstrukcji świata w oparciu o pięć wielościanów foremnych oraz rozwiązanie problemu odcinków niewspółmiernych przedstawione przez Eudoksosa.
- C. Kolejny sposób przyjmował istnienie jednego elementu, który wszakże musi zawierać w sobie całą nieskończoność możliwości (apeiron Anaksymandra). To tej idei nawiązano dopiero w XIX wieku w teorii granic Cauchy'ego czy zbiorów nieskończonych Cantora.
- D. Ostatni sposób związany jest z teorią zarodków Anaksagorasa – jest tyle elementów pierwotnych, ile różnych jakości; niemożliwe jest otrzymanie przy pomocy danych jakości całkiem nowych. Anaksagoras uważa, że „w stosunku do tego co jest małe, nie ma najmniejszego, lecz zawsze tylko coraz mniejsze; nie może bowiem to, co istnieje, stać się czymś, co nie istnieje. Również w stosunku do tego, co jest wielkie, jest zawsze coś większego. To, co jest wielkie, jest co do wielkości równe temu, co jest małe; natomiast każda rzecz w stosunku do siebie samej jest i duża, i mała zarazem”<sup>3</sup>. Przy analizowaniu problemu *continuum* Arystoteles posługuje się w znacznej mierze tym sposobem rozumowania i dzięki temu unika paradoksów eleackich – nieskończony podział *continuum* jest możliwy i nie prowadzi do sprzeczności, gdyż każdy kolejny element podziału jest nową jakością.

Myślę, że istotnym elementem „wspomagającym” intuicyjne rozumienie (już na „początku”) pojęcia *continuum* jest wprowadzenie matematycznej struktury, która pokazuje na ile możliwe jest formalne uchwycenie własności opisywanych tym pojęciem. Przyjrzyjmy się w tym celu kilku pojęciom i twierdzeniom topologii, które ujmują przynajmniej niektóre aspekty pojęcia *continuum*.

## 2. Pojęcie *continuum* w topologii

Badania topologiczne są próbą uchwycenia własności geometrycznych (i nie tylko) bez stosowania pomiaru. Wydawało się to niemożliwe, aż do czasu Eulera, który zauważył, że pewne zagadnienia geometryczne można rozpatrywać abstrahując od własności metrycznych.<sup>4</sup> Tego typu badania rozwijali Möbius, Listing, Gauss, Jordan, Betti i Poincare. W ten sposób powstała teoria grafów, rozmaitości orientowalnych i nieoriento-

walnych, kompleksu, czy grup homologii. Własności topologiczne są w tych teoriach badane przy pomocy pojęć i narzędzi algebraicznych.

Istnieje również drugi nurt badań topologicznych. Opiera się on na próbach uogólnienia zagadnień i pojęć analizy matematycznej (np. pojęcia zbieżności, ciągłości i odległości). Jego rozwój rozpoczął się już w 1817 roku, kiedy Bolzano zauważył, że istotny jest nie tyle związek pojęcia zbieżności z ciągiem liczb, co z nieskończonym i ograniczonym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych (każdy nieskończony i ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma punkt skupienia). Badania te kontynuował Cantor i to on właśnie wprowadził pojęcia zbioru otwartego i domkniętego. Badania te przyczyniły się do powstania topologii ogólnej, analitycznej, geometrycznej oraz mnogościowej (te obszary topologii są ze sobą ściśle powiązane i w wielu wypadkach pokrywają się). Nas w tej pracy w sposób szczególny będzie interesowała topologia geometryczna, w ramach której pojawiła się definicja i badanie *continuum* (topologicznego).<sup>5</sup>

Po ukazaniu w poprzednim paragrafie kilku intuicji związanych z pojęciem *continuum* podam teraz topologiczną definicję *continuum*. Do jej sformułowanie niezbędne są pojęcia zbioru otwartego i domkniętego oraz kilka innych podstawowych narzędzi z topologii ogólnej. Pokażę związek własności ujętych przez definicję z przedstawionymi wcześniej intuicjami. Ta aktualna definicja *continuum* topologicznego będzie stanowiła punkt odniesienia dla dalszych rozważań.

Parę  $(X, T)$ , złożoną ze zbioru  $X$  oraz z rodziny jego podzbiorów  $T$ , nazywamy *przestrzenią topologiczną*, jeśli spełnione są warunki<sup>6</sup>:

- (A<sub>1</sub>)  $\emptyset \in T, X \in T$ , gdzie  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty;
- (A<sub>2</sub>) Jeśli  $U \in T$  i  $V \in T$ , to  $U \cap V \in T$ ;
- (A<sub>3</sub>) Suma elementów dowolnej podrodziny rodziny  $T$  również należy do  $T$ .

Elementy rodziny  $T$  nazywamy zbiorami *otwartymi*. Przez zbiór *domknięty* rozumiemy dopełnienie  $X \setminus U$  zbioru otwartego  $U$ , natomiast domknięciem *cl* $A$  zbioru  $A$  nazywamy przekrój wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór  $A$ . Analogicznie, wnętrzem *int* $A$  zbioru  $A$  nazywamy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze  $A$ . Na podstawie definicji (zbioru otwartego i domkniętego) domknięcie zbioru jest zbiorem domkniętym, a wnętrze jest zbiorem otwartym.

Własności (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>) można więc traktować jako definicję otwartości. Kluczowym pojęciem jest pojęcie bazy przestrzeni topologicznej, czyli takiej rodziny zbiorów otwartych, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnych elementów tej rodziny. Bazę można rozumieć równoważnie jako „pełny” zbiór otoczeń punktów przestrzeni  $X$  (otoczeniem  $U(x)$

punktu  $x \in X$  nazywamy dowolny zbiór otwarty zawierający ten punkt) tzn. dla dowolnego otoczenia  $U$  punktu  $x$  istnieje element bazowy  $V$  taki, że  $x \in V \subset U$ . Oczywiście bazą przestrzeni jest cała rodzina zbiorów otwartych, jednak największą rolę odgrywa baza, której moc jest najmniejsza. Zgodnie z twierdzeniem o dobrym uporządkowaniu liczb kardynalnych taka liczba istnieje i nazywa się *ciężarem* przestrzeni topologicznej.

Tak ogólna definicja przestrzeni topologicznej jest jednak mało przydatna bez dodatkowych założeń. Chodzi o wykluczenie pewnych trywialnych przypadków np. rodziny składającej się wyłącznie z dwóch punktów  $(X, \emptyset)$  (topologia antydyskretna). Dąży się między innymi do tego, aby topologia była dostatecznie bogata a zarazem określała „bliiskość”. Dlatego wprowadza się tzw. aksjomaty oddzielania. Aksjomaty te mówią o możliwości oddzielania i zarazem charakteryzowania punktów i dowolnych podzbiorów przestrzeni przy pomocy zbiorów otwartych.

( $T_0$ ) Mówimy, że przestrzeń topologiczna jest  $T_0$  przestrzenią, jeśli dla pary różnych punktów  $x_1$  i  $x_2$  istnieje zbiór otwarty zawierający tylko jeden z nich.

Widać od razu, że topologia antydyskretna nie spełnia aksjomatu  $T_0$ .

( $T_1$ ) Przestrzeń topologiczna jest  $T_1$  przestrzenią, jeśli dla pary różnych punktów  $x_1$  i  $x_2$  istnieje zbiór otwarty  $U$  taki, że  $x_1 \in U$  a  $x_2 \notin U$ .

Własność ( $T_1$ ), w odróżnieniu od własności ( $T_0$ ), gwarantuje, dla pary różnych punktów, istnienie dwóch **różnych** zbiorów  $U$  i  $V$  takich, że  $x_1 \in U$ ,  $x_2 \in V$ ,  $x_2 \notin U$ ,  $x_1 \notin V$ . Dzięki własności ( $T_1$ ) topologia w sposób nietrywialny określa punkty przestrzeni. Okazuje się, że każdy punkt:

- (1) jest przekrojem wszystkich swoich otoczeń, a ponadto
- (2) jest zbiorem domkniętym.

Każda z tych własności jest równoważna własności ( $T_1$ ). Własność (1) oznacza, że każdy punkt  $x$  posiada dowolnie małe otoczenia (przy pomocy zbioru otwartego możemy dowolnie zbliżać się do punktu) czyli, dla każdego otoczenia  $U$  punktu istnieje zbiór otwarty  $V$  o tej własności, że  $x \in V \subset U$ , przy czym zbiór  $V$  jest różny od zbioru  $U$ .

Dzięki własności ( $T_1$ ) pojawia się pewnego rodzaju symetria między dowolną parą punktów – to, co jest prawdziwe dla jednego punktu, jest prawdziwe również dla drugiego. Jako przykład topologii ( $T_0$ ), która nie jest ( $T_1$ ) niech posłuży dwupunktowa przestrzeń  $X = \{x_1, x_2\}$  z następującą topologią: zbiorami otwartymi są zbiory  $X, \emptyset, \{x_1\}$ . Widać, że aksjomaty ( $A_1$ ), ( $A_2$ ), ( $A_3$ ) są spełnione, jednak między punktami  $x_1$  a  $x_2$  nie



ma symetrii – nie istnieje zbiór otwarty zawierający punkt  $x_2$  a nie zawierający punktu  $x_1$ , a odwrotnie takim zbiorem jest  $\{x_1\}$ .

Przy pomocy zbiorów otwartych możliwe jest zdefiniowanie pojęcia granicy tzn. ciąg punktów  $x_n$  zmierza do punktu  $x$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), jeśli istnieje ciąg zbiorów otwartych  $U_n$  takich, że  $\bigcap U_n = \{x\}$ ,  $U_{n+1} \subset U_n$  oraz  $x_n \in U_n - U_{n-1}$ . Jednak własność  $T_1$  jest za słaba, aby zapewnić jednoznaczność granicy.

W celu zobaczenia tego rozpatrzmy następujący przykład.

Niech  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$  będzie zbiorem liczb naturalnych, przy czym zbiorami otwartymi są wszystkie dopełnienia zbiorów skończonych. Oczywiście przestrzeń  $X$ , z tak zdefiniowaną topologią, jest przestrzenią  $T_1$ . Dla dowolnych punktów  $x, y \in X$ , zbiory otwarte  $U = X \setminus \{y\}$  oraz  $V = X \setminus \{x\}$  mają tę własność, że  $x \in U \setminus V$ , a  $y \in V \setminus U$ . Ciąg zbiorów otwartych  $U_1 = X - \{2\}, U_2 = X - \{2, 3\}, U_3 = X - \{2, 3, 4\}, \dots, U_n = X - \{2, 3, 4, \dots, n+1\}, \dots$  daje w przekroju punkt 1 tzn.  $\bigcap U_n = \{1\}$ , natomiast ciąg zbiorów otwartych  $V_1 = X - \{1\}, V_2 = X - \{1, 3\}, V_3 = X - \{1, 3, 4\}, \dots, V_n = X - \{1, 3, 4, \dots, n+1\}$  daje w przekroju liczbę 2.

Następujący ciąg  $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, \dots, x_n = n+2$  ma tę własność, że:

$$x_n \in U_n - U_{n+1} \text{ i } x_n \in V_n - V_{n+1}, \text{ czyli } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

W celu zaradzenia tej trudności rozważa się następującą węższą klasę przestrzeni topologicznych, zwanych przestrzeniami Hausdorffa.

*(T<sub>2</sub>) Przestrzeń topologiczna jest T<sub>2</sub> przestrzenią (Hausdorffa), jeśli dla każdej pary różnych punktów  $x$  i  $y$  istnieją zbiory otwarte  $U$  i  $V$  rozłączne i takie, że  $x \in U$  oraz  $y \in V$ .*

Ta własność sprawia, że domknięcia zbiorów otwartych nie mogą być zbyt duże, co jest możliwe w przypadku przestrzeni  $(T_1)$  – w powyższym przykładzie domknięciem każdego zbioru otwartego jest cała przestrzeń. Dokładniej każdy punkt, w przypadku przestrzeni Hausdorffa, jest przekrojem domknięć wszystkich swoich otoczeń. Przestrzeń topologiczna z poprzedniego przykładu nie jest przestrzenią Hausdorffa: każda para zbiorów otwartych ma część wspólną i domknięcie każdego zbioru otwartego jest całą przestrzenią. Nie ma więc w tej przestrzeni „małych” zbiorów otwartych.

Już w przypadku przestrzeni topologicznej ( $T_1$ ) możemy mówić o „kontroli” punktów przez zbiory otwarte (punkt jest przekrojem swoich otoczeń), jednak w przestrzeniach Hausdorffa ta kontrola jest dużo większa, gdyż przy pomocy zbiorów otwartych „rzeczywiście” zbliżamy się do punktu.

Podane wcześniej definicje pozwalają zdefiniować pojęcie *continuum* topologicznego. Do tego potrzebne są jednak pojęcia zwartości i spójności<sup>7</sup>.

Rodzina zbiorów  $\{U_\alpha\}$  jest nazywana *pokryciem przestrzeni  $X$* , jeśli każdy punkt tej przestrzeni należy do pewnego zbioru pokrycia.

(A) *Przestrzeń jest zwarta, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz z każdego pokrycia tej przestrzeni zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone.*

Do wprowadzenia pojęcia *continuum* topologicznego potrzebne jest, oprócz zwartości, pojęcie spójności przestrzeni.

(B) *Przestrzeń topologiczna  $X$  jest spójna, jeśli nie można jej przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów otwartych  $U$  i  $V$  takich, że*

$$\bar{U} \cap V \cup U \cap \bar{V} = \emptyset.$$

Zbiory o powyższej własności nazywamy zbiorami rozgraniczonymi. Łatwo widać, że dowolna suma zbiorów spójnych nie rozgraniczonych, jest zbiorem spójnym oraz, że domknięcie zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.

(C) *Continuum nazywamy taką przestrzeń topologiczną, która jest zarazem zwarta i spójna.*

Tak zdefiniowane *continuum* topologiczne ujmuje w pewien sposób cechy, które zostały przypisane temu pojęciu w oparciu o zarysowane (w § 1) intuicje. Możliwe jest więc podjęcie problemu *continuum* przy pomocy czysto racjonalnych metod. Prowadzą one do wniosków, które wcześniej były zgłębiane tylko intuicyjnie. Podstawowymi przykładami *continuum*ów topologicznych są: odcinek, okrąg, koło, sfera i ogólnie dowolne kostki, kule czy sfery  $n$ -wymiarowe; również dowolne układy tych *continuum*ów połączonych w sposób spójny. Rozwój teorii *continuum*ów miał miejsce jednak dopiero wtedy, gdy pojawiło się całe bogactwo różnorodnych *continuum*ów o własnościach często sprzecznych z intuicją (wypracowaną w oparciu o geometrię elementarną). To właśnie poprzez te konstrukcje można uzyskać połączenie matematyki z kluczowymi zagadnieniami filozoficznymi.

W celu zobaczenia jak *continuum* topologiczne ujmuje cechy *continuum* (intuicyjnego), przyjrzyjmy się dwóm twierdzeniom z topologii:

Cantora oraz Sierpińskiego. Twierdzenie Cantora pokazuje, że *continuum* topologiczne realizuje własność ciągłości, natomiast twierdzenie Sierpińskiego, że również własność spoistości jest przez *continuum* topologiczne uchwycona.

**Twierdzenie Cantora.** Przekrój zstępującego ciągu *continuumów* niepustych jest niepustym *continuumem*.

**Dowód.** Weźmy ciąg *continuumów*  $\{F_n\}$  taki, że  $F_1 \supset F_2 \supset \dots F_n \supset \dots$  oraz  $F_n \neq \emptyset$ , dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Załóżmy nie wprost, że  $\bigcap F_n = \emptyset$ . Zauważmy, że zbiory otwarte  $U_n = F_1 \setminus F_n$  tworzą pokrycie otwarte zbioru  $F_1$  tzn.  $\bigcup U_n = \bigcup (F_1 \setminus F_n) = F_1 \setminus \bigcap F_n = F_1 \setminus \emptyset = F_1$ . Ponieważ  $F_1$  jest zbiorem zwartym istnieje pokrycie skończone  $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}$  zbioru  $F_1$ . Możemy założyć (po ewentualnym przenumowaniu), że zbiór  $U_{n_k}$  zawiera w sobie pozostałe zbiory tego pokrycia. Mamy więc  $U_{n_k} = F_1 \setminus F_{n_k} = F_1$ , co jest niemożliwe, bo  $F_{n_k} \neq \emptyset$ . Zbiór  $F = \bigcap F_n$  jest więc niepusty i wystarczy jeszcze pokazać, że jest on spójny. Gdyby  $F$  nie był spójny, to  $F = K \cup L$ , gdzie  $K$  i  $L$  są zbiorami domkniętymi i  $K \cap L = \emptyset$ . Istnieją zbiory otwarte  $U$  i  $V$  takie, że  $K \subset U$  a  $L \subset V$  oraz  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ . Ponieważ  $\bigcap F_n \subset U \cup V$ , więc, dla każdego  $n$ , zbiór  $F_n$  jest zawarty całkowicie w zbiorze  $U$  lub w zbiorze  $V$  (ze spójności  $F_n$ ). Jest to niemożliwe, bo zbiory  $F_n$  są zstępującą rodziną zbiorów.

Zasadniczą rolę w topologii geometrycznej odgrywa pojęcie składowej jak również lemat Janiszewskiego. *Składową punktu  $x$  w przestrzeni  $X$  nazywamy sumę wszystkich podzbiorów spójnych zawierających punkt  $x$* . Oczywiście składowa jest zbiorem spójnym, gdyż jest sumą zbiorów nie rozgraniczonych. Jest ona też zbiorem domkniętym, gdyż domknięcie zbioru spójnego (zawierającego dany punkt) jest zbiorem spójnym (zawierającym ten punkt).

**Lemat Janiszewskiego.** Jeśli  $U$  jest podzbiorem otwartym pewnego *continuumu*, to dowolna składowa zbioru  $U$  ma punkty wspólne z brzegiem zbioru  $U$ .

**Twierdzenie Sierpińskiego.** Żadne *continuum* nie może być przedstawione jako suma przeliczalnie wielu zbiorów zwartych rozłącznych, z których co najmniej dwa są niepuste.

**Szkic dowodu.** Przypuśćmy, że  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $X$  jest *continuum* a  $X_n$  są zbiorami zwartymi rozłącznymi i przynajmniej dwa z nich są niepuste. Skonstruujemy ciąg zstępujący *continuumów*  $C_1 \supset C_2 \supset \dots$  o własnościach:  $C_n \cap X_n = \emptyset$  oraz  $C_n \neq \emptyset$ . Zauważmy, że to wystarczy do dowodu, gdyż te własności prowadzą do sprzeczności. Z pierwszej z nich otrzymujemy:

$\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \right) \cap \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right) = \emptyset$ , tj. że  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ . Jest to jednak sprzeczne z twierdzeniem Cantora.

Najpierw jednak skonstruujemy ciąg *continuumów*  $\{K_n\}$  spełniających własności:  $K_n \cap X_n = \emptyset$  oraz, dla każdego  $n$ , istnieją co najmniej dwa elementy różne  $X_i, X_j$  takie, że  $K_n \cap X_i \neq \emptyset$ ,  $K_n \cap X_j \neq \emptyset$ .

Jeśli  $X_n = \emptyset$ , to przyjmijmy  $K_n = X$ . Powyższe warunki są wtedy spełnione. Jeśli natomiast  $X_n \neq \emptyset$ , to weźmy  $k \neq n$ , dla którego  $X_k \neq \emptyset$  oraz zbiory otwarte  $U$  i  $V$  rozłączne po domknięciu ( $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ ) oraz takie, że  $X_n \subset U$  a  $X_k \subset V$ . Niech  $K_n$  będzie składową dowolnego punktu  $x$  z  $X_k$  w przestrzeni  $\overline{V}$  (składowa punktu w przestrzeni jest to suma wszystkich podzbiorów spójnych tej przestrzeni zawierających ten punkt). Oczywiście zbiór  $K_n$  jest *continuum*,  $K_n \cap X_n = \emptyset$ ,  $K_n \cap X_k \neq \emptyset$ . Na mocy lematu Janiszewskiego *continuum*  $K_n$  ma punkty wspólne z brzegiem zbioru  $\overline{V}$ . Ponieważ  $X_k \subset V$  (a więc nie ma punktów wspólnych z brzegiem  $V$ ), stąd istnieje takie  $i \neq k$ , że  $K_n \cap X_i \neq \emptyset$ .

Ciąg *continuumów*  $C_n$  możemy zdefiniować indukcyjnie. Przyjmijmy  $C_1 = K_1$ . Istnieją więc takie wskaźniki  $j_1, i_1$ , że  $C_1 \cap X_{j_1} \neq \emptyset$ ,  $C_1 \cap X_{i_1} \neq \emptyset$  (ponadto  $C_1 \cap X_1 = \emptyset$ ). Zbiór  $C_1$  spełnia tym samym założenie (nie wprost) tego dowodu dotyczące przestrzeni  $X$ . Możemy teraz traktować  $C_1$  jako przestrzeń  $X$  ( $C_1 = \bigcup_i C_1 \cap X_i$ ) i znaleźć kolejne *continuum*  $C_2 \subset C_1$  analogicznie jak określiliśmy *continuum*  $C_1$  w przestrzeni  $X$  (tzn.  $C_2 = K_2 \cap C_1$ ). W ten sposób dla dowolnego  $n$  możemy znaleźć *continuum*  $C_n$  o żądanych własnościach.



Jak już pisaliśmy, topologia zmierzała w kierunku uogólnienia pojęć zbieżności, ciągłości oraz odległości na dowolne przestrzenie topologiczne. Wcześniej te pojęcia rozpatrywane były wyłącznie w przestrzeniach euklidesowych  $E^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R\}$  (gdzie  $R$  oznacza zbiór liczb rzeczywistych) lub ewentualnie metrycznych. Przypomnijmy, że zbiór  $X$  nazywamy *przestrzenią metryczną*, jeżeli każdej parze  $x, y$  punktów tego zbioru przyporządkowana jest liczba rzeczywista  $d(x, y)$ , zwana odległością punktu  $x$  od punktu  $y$ , spełniająca następujące warunki:

- (1)  $d(x, y) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ ;
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ; (symetryczność)
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ . (warunek trójkąta)

W przestrzeni euklidesowej odległość zadana jest przy pomocy wzoru Pitagorasa tzn. dla dowolnych punktów  $x = (x_1, \dots, x_n)$  oraz  $y = (y_1, \dots, y_n)$  przestrzeni euklidesowej mamy:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

Jeśli przestrzeń  $X$  jest wyposażona w metrykę, to wtedy w naturalny sposób możemy określić topologię (wyznaczoną przez tę metrykę) przyjmując jako bazę topologii kule otwarte  $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$  o środku w punkcie  $x \in X$  i promieniu  $r \in R$ .

Jednym z kluczowych zagadnień topologii jest określenie, przy pomocy ogólnych własności topologicznych, metryki danej przestrzeni, która wyznaczałaby topologię zgodną (tzn. wyznaczająca te same zbiory otwarte) z pierwotną topologią (zagadnienie metryzowalności przestrzeni topologicznej). W tym celu wprowadza się kolejne aksjomaty rozdzielania określające coraz węższe klasy przestrzeni topologicznych.

( $T_3$ ) Przestrzeń topologiczna  $X$  jest  $T_3$ -przestrzenią (regularną), jeśli jest  $T_1$ -przestrzenią oraz dla każdego punktu  $x$  tej przestrzeni i dla dowolnego podzbioru domkniętego  $A \subset X$  nie zawierającego punktu  $x$ , istnieją zbiory otwarte  $U (x \in U)$  oraz  $V (A \subset V)$  takie, że  $U \cap V = \emptyset$ .

Trzeba założyć warunek  $T_1$  w definicji przestrzeni regularnej, gdyż w sposób trywialny powyższy warunek (oddzielania zbioru domkniętego od punktu) spełnia przestrzeń antydyskretna. Warunek regularności zapewnia, że w każdym punkcie istnieją zbiory otwarte o „małym” brzegu

tn. dla każdego punktu  $x$  przestrzeni regularnej oraz jego otoczenia  $V$  istnieje otoczenie  $U$  punktu  $x$  takie, że  $x \in U \subset \bar{U} \subset V$ .

$(T_{\frac{3}{2}})$  Przestrzeń topologiczna  $X$  jest  $T_{\frac{3}{2}}$ -przestrzenią (Tichonowa), jeśli

jest  $T_1$ -przestrzenią oraz dla każdego punktu  $x$  tej przestrzeni i dla dowolnego podzbioru domkniętego  $A \subset X$  nie zawierającego punktu  $x$ , istnieje funkcja ciągła  $f: X \rightarrow I$  taka, że  $f(x) = 0$  oraz  $f(y) = 1$  dla  $y \in A$ .

Symbol  $I$  oznacza odcinek jednostkowy  $[0,1]$ ; funkcja  $f: X \rightarrow Y$  między przestrzeniami topologicznymi jest ciągła, jeśli dla każdego zbioru otwartego  $V \subset Y$  również zbiór  $f^{-1}(V)$  jest otwarty.

Przestrzeń Tichonowa jest przestrzenią regularną, gdyż zbiory otwarte  $U_1 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ ,  $U_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$  spełniają warunek regularności dla punktu  $x$  i zbioru  $A$  tzn.  $x \in U_1$ ,  $A \subset U_2$  a  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

$(T_4)$  Przestrzeń topologiczna  $X$  jest  $T_4$ -przestrzenią (normalną), jeśli jest  $T_1$ -przestrzenią oraz dla każdej pary  $A, B$  zbiorów domkniętych, rozłącznych istnieją zbiory otwarte  $U$  ( $A \subset U$ ) oraz  $V$  ( $B \subset V$ ) takie, że  $U \cap V = \emptyset$ .

Są przykłady przestrzeni pokazujące, że warunek rozdzielania punktu od zbioru domkniętego przy pomocy funkcji ciągłej jest silniejszy od warunku oddzielania przy pomocy zbiorów otwartych (klasa przestrzeni  $T_{\frac{3}{2}}$  jest istotnie węższa od klasy przestrzeni  $T_3$ ). Jednak warunek oddzie-

lania dowolnych zbiorów domkniętych przy pomocy zbiorów otwartych (z definicji przestrzeni normalnych) pociąga już istnienie funkcji ciągłych oddzielających te zbiory (lemat Urysohna). Warunek normalności (mocniejszy od warunku regularności oraz Tichonowa) nie pozwala jednak na metryzowalność przestrzeni. Potrzebne są jeszcze warunki ograniczające ilość elementów bazowych topologii lokalnie w punkcie. Są to tzw. twierdzenia metryzacyjne<sup>8</sup>.

Na topologię i jej rozwój można również spojrzeć z punktu widzenia programu Kleina – topologia zajmuje się badaniem własności niezmienniczych względem pewnego typu przekształceń. Szczególnie ważne okazały się odwzorowania homeomorficzne – funkcja  $f$  jest homeomorfizmem, jeśli jest wzajemnie jednoznaczna oraz odwzorowania  $f$  i  $f^{-1}$  są ciągłe. Niezmiennikiem homeomorfizmów (topologicznym) okazuje się własność *continuum* (jest ona nawet niezmiennikiem odwzorowań ciągłych tzn. obraz *continuum* poprzez funkcję ciągłą jest *continuum*). W topologii

za równoważne traktuje się zbiory homeomorficzne, czyli takie, które można przekształcić wzajemnie na siebie przy pomocy homeomorfizmu. Ponieważ odwzorowania ciągłe są szerszą klasą od homeomorfizmów, więc znajdowanie obrazów ciągłych danych continuów stanowi metodę otrzymywania nowych, różniących się topologicznie continuów np. mogą to być obrazy ciągłe odcinka czy kuli<sup>9</sup>.

Zauważmy, że twierdzenie Cantora również pozwala na otrzymywanie nowych continuów jako przekroju ciągu zstępującego już istniejących (ta metoda jest wykorzystywana przy konstrukcji continuów nierozkładalnych, o czym będziemy pisać w rozdziale VI). Istnieje jeszcze inna metoda generowania nowych continuów a związana jest ona z *twierdzeniem Tichonowa*. Stwierdza ono, że iloczyn kartezjański  $\prod_i X_i$ , dowolnej

ilości przestrzeni zwartych  $X_i$ , jest przestrzenią zwartą (bazę tej przestrzeni stanowią zbiory postaci  $\prod_i G_i$ , gdzie  $G_i$  jest zbiorem otwartym w  $X_i$ ,

i jedynie dla skończonej liczby zbiorów  $G_i$  jest różny od  $X_i$ ). Ponieważ analogiczne twierdzenie dla przestrzeni spójnych jest oczywiste otrzymujemy, iż dowolny produkt continuów topologicznych tworzy również *continuum*. Szczególnie ważny jest przypadek, gdy każdy z czynników iloczynu kartezjańskiego jest odcinkiem a moc tego iloczynu jest przeliczalna. Otrzymane w ten sposób *continuum* nosi nazwę kostki Hilberta. Jest to przestrzeń metryczna z odległością określoną następująco:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|.$$

Topologia nie wyznacza jednak metryki jednoznacznie. W szczególności kostkę Hilberta można metryzować w rozmaity sposób.

### 3. Połączenie idei z materią u Platona a problem *continuum*

Demiurg, wielki budowniczy, konstruuje świat, dążąc do harmonii i jedności, z bezkształtnej i nieokreślonej materii (a więc z tego, co ciągle się rodzi i nie istnieje realnie), mając za wzór istniejący odwiecznie i samoistnie świat idei (a więc to, co jest niezmiennie i doskonałe)<sup>10</sup>.

Demiurg miał do dyspozycji cztery elementy (ogień, powietrze, wodę i ziemię), z których, łącząc je w odpowiedni sposób, utworzył cały świat. Ogniem łączącym te elementy stała się **proporcja matematyczna** (był ze świata idei), która, według Platona, jest najpiękniejszym wiązaniem, gdyż tylko ona tworzy jedność z rzeczami, które łączy. Tylko idee

matematyczne pozwalają osiągnąć prawdziwą jedność tworzonych struktur.

Demiurg daje światu duszę, a więc zasadę istnienia i funkcjonowania. Interesujący jest sposób konstrukcji tej duszy – określa on zarazem czym jest zasada świata i pokazuje, w jaki sposób, dzięki ideom matematycznym, osiągana jest jedność tworzonych bytów. Ta konstrukcja przebiega w dwóch etapach. W pierwszym, z dwóch istniejących substancji (z substancji niezmiennej i niepodzielnej oraz z substancji rodzącej się i podzielnej), tworzy Demiurg, za pomocą mieszania, substancję trzecią, która uczestniczy w naturze tych dwóch pierwszych. W drugim etapie, łączy razem ze sobą te trzy substancje przemocą sprowadzając do jedności to, co niezienne z tym, co rodzi się i ulega rozpadowi.

Zastanówmy się, jaka jest rola tak przewrotnej i zawilej konstrukcji. Czy nie prościej byłoby wprost połączyć „gwałtem” idee z materią? Co zyskujemy dzięki utworzeniu dodatkowej trzeciej substancji? Ta trzecia substancja jest utworzona „za pomocą mieszania”, czyli jest to czysto „formalne” łączenie własności obu wcześniejszych substancji (nie powstają żadne nowe własności) – „jest podzielona i zjednoczona według proporcji, porusza samą siebie wokół siebie samej”<sup>11</sup>. Ta „formalna substancja” jest więc częścią składową struktury świata, elementem określającym jego zasadę oraz istotę. Oznacza to, że przy pomocy formalnych, matematycznych operacji możemy uzyskać jedność z natury przeciwstawnych sobie bytów – ta jedność jest czymś w pełni rzeczywistym, ponieważ trzecia substancja, w ten właśnie sposób utworzona, jest częścią składową duszy świata.

Stwierdzając więc jedność danego bytu musimy uznać, że u podstaw tej jedności tkwią pewne struktury matematyczne. Dla Platona tymi elementami gwarantującymi i uzasadniającymi jedność były bryły platońskie (pięć wielościanów foremnych). Te bryły rzeczywiście można traktować jako połączenie niezmienności świata idei ze zmiennością rzeczy materialnych. Mimo, iż wielościanów można konstruować dowolnie wiele, to wielościanów foremnych jest dokładnie pięć (dowód tego znany był już Platonowi) – myślę, że ten właśnie fakt ośmielił Platona do wyciągnięcia tak śmiałych wniosków dotyczących natury bytu.

Sądzę, że bardzo wyraźnie metodę połączenia obiektów z natury od siebie oddzielonych, przy pomocy odpowiednich struktur matematycznych, ukazuje teoria stosunków Eudoksosa (pochodzącego z akademii platońskiej).

Jak połączyć liczby wymierne<sup>12</sup> w jedno *continuum* wymierne? Czy wystarczy ta ich własność, że w ciągu liczb wymiernych nie ma liczb kolejno po sobie następujących? Czy możliwe jest przejście między dowolnymi liczbami  $p$  i  $q$ ? Problem uległ szczególnemu zaostrzeniu, gdy odkryto istnienie wielkości, których nie da się wyrazić przy pomocy sto-



sunku liczb naturalnych (czyli liczb wymiernych). Chodzi o stosunek długości przekątnej kwadratu do długości jego boku – stosunek ten oznaczamy symbolem  $\sqrt{2}$  (jest to pierwsza poznana liczba niewymierna). Okazało się, że brak jest pewnej „spoistości” w strukturze liczb wymiernych.

Dopiero zasada Archimedesesa okazała się właściwym narzędziem do nadania liczbom wymiernym spoistości. Stwierdza ona, że dla dowolnych liczb  $p$  i  $q$  ( $q > p$ ) istnieje liczba naturalna  $n$  taka, że  $np > q$ . Możemy dobrać liczbę  $n$  tak, aby była minimalną liczbą dającą pożądaną nierówność.

Okazuje się, że przy pomocy aksjomatu Archimedesesa można zdefiniować stosunek dowolnych odcinków wykorzystując wyłącznie własności liczb naturalnych. Stosunki długości odcinków  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{a'}{b'}$  są równe, jeśli

dla dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $m$  prawdziwe są następujące warunki: (1)  $na > mb$ , to  $na' > mb'$ ; (2)  $na = mb$ , to  $na' = mb'$ ; (3)  $na < mb$ , to  $na' < mb'$ . Wszystkie ułamki  $\frac{m}{n}$  dzielą się na trzy klasy, w zależności od tego,

czy spełniają (1), (2) czy (3) warunek. Drugi warunek wyznacza klasę wszystkich ułamków równych, czyli ustaloną liczbę wymierną dodatnią. Tę metodę mierzenia przy pomocy liczb naturalnych wszelkich stosunków (również niewymiernych) podał wielki matematyk starożytności Eudoksos. Stała się ona podstawą metody wyczerpywania Archimedesesa, dzięki której wyprowadził wzory na pola wielu figur geometrycznych.

Zauważmy, że dzięki aksjomatowi Archimedesesa mamy jednoznaczność w definiowaniu stosunków wielkości przy pomocy powyższych warunków. Nie jest bowiem możliwe, aby dwa różne odcinki  $a$  i  $b$  miały

ten sam stosunek np. z odcinkiem o długości  $c$ . Równość  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$  oznacza,

że dla dowolnych liczb  $n$  i  $m$  zachodzi warunek:  $na > mc$ , to  $nb > mc$ . Ponieważ wielkości  $a$  i  $b$  są różne, więc istnieje taka liczba naturalna  $n_1$ , że  $n_1(a - b) > c$  (na podstawie aksjomatu Archimedesesa). Niech  $m_1$  będzie maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunek  $n_1a > m_1c$ . Gdyby  $n_1b > m_1c$ , to  $n_1a = n_1(a - b) + n_1b > c + m_1c > (m_1 + 1)c$ , co przeczy założeniu, że  $m_1$  jest maksymalną liczbą naturalną, dla której spełniony jest warunek  $n_1a > m_1c$ . Dowolna liczba jest więc rozumiana jako stosunek pewnych dwóch odcinków (postulat Eudoksosa).

Problem połączenia liczb wymiernych w jedno *continuum* wymierne zdawał się być w teorii Eudoksosa rozwiązany. Paradoksy związane z wykorzystaniem liczb (wymiernych) do mierzenia odcinków nie-

współmiernych nie podważały już racjonalności matematyki. Elementem „łączącym” okazał się umiejętnie wykorzystany przez Eudoksosa aksjomat Archimidesa. *Continuum* wymierne mogło teraz służyć do obliczania pól i objętości obiektów geometrycznych.

#### 4. Analiza pojęcia *continuum* u Arystotelesa

Zgodnie ze swoją ogólną metodą Arystoteles analizując pojęcie *continuum* stara się dotrzeć do pewnych w naturalny sposób zrozumiałych pojęć, które są określeniem istoty bytu jakim jest *continuum*. Przybliżenie i uchwycenie sensu i znaczenia dokonuje się w dużej mierze w polemice z paradoksami Zenona z Elei.

Do scharakteryzowania pojęcia *continuum* Arystoteles używa następujących pojęć: „ciągły”, „stykający się”, „kolejny”. O stosunku kolejności między rzeczami mówimy wtedy, gdy między nimi nie znajduje się żadna inna rzecz tego samego rodzaju – rzeczy innego rodzaju nie naruszają kolejności<sup>13</sup>. Natomiast rzeczy są ciągłe, gdy ich stykające się granice są te same – ciągłość między rzeczami byłaby niemożliwa, gdyby te granice były różne. Rzeczy stykające się nie muszą być ciągłe, jednak ich granice muszą znajdować się bezpośrednio w jednym miejscu<sup>14</sup>. Wynika z tego, że nic co ciągłe nie może składać się z części niepodzielnych np. linia ciągła (w dzisiejszej terminologii: prosta lub odcinek) nie może składać się z punktów, które są niepodzielne. Również niemożliwe jest otrzymanie z punktów długości (a z chwil czasu), gdyż między dowolnymi punktami (chwilami) zawsze znajduje się jakaś linia.

*Continuum* definiuje Arystoteles jako rzecz, która jest ciągła a jej części stykają się i nie są w stosunku kolejności. *Continuum* nie składa się więc z części niepodzielnych, czyli dzieli się w nieskończoność. Gdyby jakaś rzecz składała się z części niepodzielnych i te części stykałyby się ze sobą, to w konsekwencji musiałyby stanowić jedność (granica części niepodzielnej jest nią samą). Nie mogłyby więc tworzyć *continuum*, gdyż części *continuum* są oddzielone od siebie wspólną, różną od nich granicą.

Według Arystotelesa tak przestrzeń jak i czas mają strukturę *continuum*. Natomiast punkty i chwile są niepodzielne. Na szczególną uwagę zasługuje argument Arystotelesa na to, że czas ma strukturę *continuum*. „Skoro zatem wszelki ruch odbywa się w czasie i w każdym czasie istnieje możliwość ruchu, a wszystko, co się porusza, może się poruszać i szybciej, i wolniej, wobec tego w każdym czasie może się odbywać i szybszy ruch, i wolniejszy”. (...) Bo skoro zostało wykazane, że ciało szybsze przebędzie równą odległość w czasie krótszym, niż ciało wolniej się poruszające, (...) jest tedy jasne, że ciało szybsze przebędzie tę samą odległość w czasie krótszym, niż ciało powolniejsze: niech to będzie  $Z\Theta$ . Otóż, skoro szybsze ciało przebyło całą odległość  $\Gamma\Delta$  w czasie  $Z\Theta$ , powolniejsze przebędzie

w tym samym czasie odcinek krótszy, niż  $\Gamma\Delta$ ; niech nim będzie  $\Gamma K$ . A ponieważ  $B$  jako powolniejsze przebyło odległość  $\Gamma K$  w czasie  $Z\Theta$ , wobec tego szybsze przebędzie ją w czasie krótszym, tak że czas  $Z\Theta$  będzie znowu podzielony. A skoro jest podzielony, wielkość  $\Gamma K$  będzie również podzielona, tak jak była właśnie podzielona odległość  $\Gamma\Delta$ ; a jeżeli wielkość jest podzielona, to i czas będzie podzielony. I tak będzie zawsze, biorąc na przemian po powolniejszym szybsze, a po szybszym powolniejsze i posługując się tak tym, jak to było pokazane; albowiem szybsze będzie dzielić czas, a powolniejsze odległość<sup>15</sup>.

W rozumowaniu Arystotelesa, to zjawisko ruchu sprawia, że czas i przestrzeń stają się wielkościami „wzajemnie odwrotnymi” i dzięki temu stanowią wzajemnie dla siebie uzasadnienie struktury *continuum*: jeśli szybsze ciało  $A$  pokonuje odległość  $S_A$  w czasie  $t_A$ , to ciało  $n$  razy wolniejsze pokona w czasie  $t_A$  odległość  $\frac{S_A}{n}$ ; natomiast, jeśli ciało  $n$  razy wolniejsze  $B$  pokonuje odległość  $S_B$  w czasie  $t_B$ , to ciało szybsze pokona odległość  $S_B$  w czasie  $\frac{t_B}{n}$ . W pierwszym przypadku czas jest narzędziem podziału odległości na dowolnie małe odcinki, a w drugim odległość służy do podziału czasu na dowolnie małe odcinki czasowe.

Wynika z tego rozumowania następujący wniosek: gdyby istniało *continuum* tylko jednego rodzaju (np. jedynie czas albo jedynie przestrzeń), to niemożliwe byłoby uzasadnienie, że dane byty mają strukturę *continuum*.

Przeciwnieństwem *continuum* są wielkości niepodzielne – zalicza do nich Arystoteles punkty i chwile. Jeśli chodzi o chwilę, to „teraz” musi być w sobie jednym i tym samym, jako wspólny kres czasu przeszłego i przyszłego. Jest czymś innym niż przeszłość jak i przyszłość. Nie może być rozciągłe, bo wtedy zawierałoby przeszłość lub przyszłość. Również punkt, jako granica linii, nie może być rozciągły, bo fragmentem jego byłaby linia, a więc sam byłby swoją granicą. To jest niemożliwe, gdyż według określenia Arystotelesa, granica musi znajdować się w jednym miejscu.

Pojawia się w konsekwencji tych analiz bardzo ważne rozróżnienie między *continuum* a wielkościami niepodzielnymi. O ile wielkości niepodzielne nie nadają się do rekonstrukcji rzeczy, której są częścią, o tyle wielkości rozciągłe mogą być elementami różnego rodzaju konstrukcji. Dzięki temu, że punkt może być wspólną granicą dwóch linii, możliwe jest ich łączenie i doklejanie kolejnych. Oczywiście, zgodnie z rozumowaniem Arystotelesa, jak z punktów nie można otrzymać linii, tak również nie jest możliwe otrzymanie z linii powierzchni.

Reasumując, *continuum* można określić przez trzy następujące cechy:

- (I) Może być dzielone w nieskończoność i na każdym etapie tego podziału mamy *continuum*.
- (II) Nie składa się z elementów oddzielonych od siebie, lecz wszystkie części „stykają się” ze sobą.
- (III) Każdy punkt *continuum* ma tę własność, że dowolnie blisko niego znajdują się inne elementy *continuum*.

Z pojęciem *continuum* wiąże się pojęcie nieskończoności. Jednak ważna jest nie tyle nieskończoność zewnętrzna (niemożność dojścia do „końca”), lecz nieskończoność wewnętrzna, idąca w głąb – proces podziału przebiega w nieskończoność. W następującej definicji Cantora liczb rzeczywistych (równoważnej definicji Dedekinda) widać, w jaki sposób nieskończoność zewnętrzna ciągu liczb naturalnych zamienia się w nieskończoność wewnętrzną *continuum*. Liczba rzeczywista rozumiana jest jako rodzina odcinków wymiernych  $[a_n, b_n]$ , w której każdy odcinek jest zawarty w poprzednim tzn.  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  a ich średnica zmierza do zera, gdy  $n$  dąży do nieskończoności.

Ta wewnętrzna nieskończoność *continuum* sprawia, że jest ono jakby „niedokończone” i dzięki temu może służyć do opisu obiektów poznawanych zmysłami, które przecież siłą rzeczy nigdy nie mogą być dane całkowicie adekwatnie i precyzyjnie. *Continuum*, tak jak obiekty świata zmysłowego, jest więc bytem w sobie. Przy dokładniejszym badaniu odkrywamy coraz to nowsze i bardziej zaskakujące własności, jednak ciągle ukrywa ono swą prawdziwą istotę. Czy rzeczywiście, tak jak sugeruje Hermann Weyl<sup>16</sup>, pojęcie *continuum* jest uzasadnieniem kantowskiego idealizmu epistemologicznego? Sądzę, że dopiero ukazanie sytuacji i twierdzeń, w których to pojęcie jest użyte, może tę kwestię rozstrzygnąć.

## 5. Paradoksy dotyczące *continuum*

Analizy Arystotelesa dotyczące pojęcia *continuum* przeprowadzone są w kontekście polemiki z argumentami Zenona z Elei, podważającymi możliwość ruchu i wielości, w szczególności atakującymi realność pojęcia *continuum*. Z argumentów podważających możliwość prawdy i wiedzy naukowej o świecie zmysłowym wybrałem te, które dotyczą pojęcia *continuum*, ukazując trudności związane z używaniem go. Okazuje się, że właśnie to pojęcie ukazuje w dużym stopniu istotę prawdy naukowej. Arystoteles podaje proste, zdroworozsądkowe rozumienie *continuum*, którego główną cechą jest jego podzielność w nieskończoność tzn. w wyniku jakiegokolwiek podziału otrzymujemy części, które znowu są podzielne.



Jednak, jeśli rzeczywistość ma strukturę *continuum*, to jak możliwe jest ujęcie jej przy pomocy dyskretnej siatki pojęć; czy konwencjonalne ustalenie progu ścisłości daje szansę otrzymanie wiedzy prawdziwej<sup>17</sup>.

A1 Argument dychotomii. Jeśli istnieje ruch oraz jeśli każda odległość może się dzielić w nieskończoność, to z konieczności to, co się porusza, musi przebyć nieskończenie wiele odcinków drogi w skończonym czasie. Rozumowanie Zenona wygląda następująco. To, co się porusza, musi przebyć pewną odległość, jednak najpierw musi przebyć połowę całej odległości. Zanim jednak pokona połowę odległości musi wcześniej przebyć połowę tej połowy itd. Ten podział daje nieskończenie wiele odcinków, które należałoby przebyć w skończonym czasie, co jest niemożliwe. Wynika z tego, że ruch nie istnieje.

A2 Argument leżącej strzały. Według Zenona leżąca strzała jest w każdej chwili swego lotu w jakimś określonym miejscu, a więc w każdej chwili lotu spoczywa. Skoro jednak spoczywa w każdej chwili, to spoczywa przez cały czas lotu, bo niemożliwe jest, aby same spoczynki dały ruch. Sprzeczność, którą otrzymaliśmy – strzała spoczywa i zarazem leci – domaga się odrzucenia założenia o istnieniu ruchu.

A3 Jeśli byt nie jest jednością, to musi być podzielny. Efektem tego dzielenia są części niepodzielne, a więc pozbawione wielkości lub podział ten przebiega w nieskończoność. Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to taka część pozbawiona wielkości po dołączeniu do jakiejś wielkości nie powiększa jej. Sam byt, będący sumą takich części musi również być pozbawiony wielkości, a więc musi być niepodzielny, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Jeśli natomiast podział przebiega w nieskończoność, to każda otrzymywana w trakcie podziału część ma wielkość – byt jest więc nieskończoną<sup>18</sup> (czyli dowolnie dużą) sumą wielkości, czyli sam jest nieskończony, co jest niedorzecznością. Nie istnieje więc wielość a byt jest jednością.

A4 Gdyby istniała wielość, to ilość wszystkich istniejących rzeczy musiałaby być ściśle określona, a więc ograniczona. Jednak pomiędzy poszczególnymi rzeczami zawsze znajdują się inne, pomiędzy nimi znowu inne itd. Ilość rzeczy musiałaby więc być nieograniczona.

A5 Istnieje zasadnicza sprzeczność między zachowaniem się wielu elementów wziętych razem a zachowaniem się każdego poszczególnego elementu osobno. Jedno padające ziarno nie wydaje dźwięku i dołączając po jednym ziarnie również nie możemy sprawić, aby pojawił się dźwięk, gdy

wcześniej go nie było. Jednak cały worek ziarna, padając na ziemię, wydaje dźwięk.

Zbliżona do powyższej jest antynomia pochodząca od Eubulidesa ze szkoły megarejskiej.

A6 Jeden utracony włos nie sprawia, że człowiek staje się łysy. Każdy kolejny tracony włos również nie jest w stanie spowodować łysiny. Jednak, ponieważ ilość włosów jest skończona, po utracie pewnej ilości włosów nieuchronnie zostaje się łysym.

Spróbujmy dostrzec istotę tych argumentów. Opierając się na pewnych przesłankach dochodzi się do fałszywych wniosków. Istnieją następujące możliwości wyjścia z tej sytuacji: albo przesłanki są fałszywe (i tak argumentował Zenon odrzucając pojęcia ruchu, wielości i wielkości), albo samo rozumowanie obarczone jest błędami i sprzeczność jest tylko pozorna, i wynika z braku precyzji przy używaniu pojęć (wielu komentatorów, poczynając od Arystotelesa, idzie w kierunku uzasadnienia drugiej alternatywy). Przyjmując tę drugą możliwość, można w oparciu o te antynomie dostrzec pewne sposoby rozumowania, które ze swej istoty prowadzą do fałszu. A może brak precyzji pojęć nie dyskredytuje tych paradoksów, a ukazane przez nie sprzeczności i problemy rzeczywiście mają miejsce?

Ad 1. Spójrzmy jak K. Ajdukiewicz ukazuje niedorzeczność argumentu dychotomii. Sądzi on, że błąd Zenona „leży w przyjęciu, iż suma nieskończenie wielu odcinków czasu, z których każdy posiada długość określoną (w danym przypadku każdy następny jest połową bezpośrednio poprzedzającego), nie może być skończona. Dla Zenona suma  $\frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \dots$  nie

może mieć wartości skończonej. Elementarna teoria nieskończonych szeregów geometrycznych poucza, iż suma, o którą tu chodzi, jest skończona i wynosi dokładnie  $t$ . Po odrzuceniu tej przesłanki w dowodzie Zenona, który nie mógł pojąć, jak suma nieskończenie wielu członów, z których żaden nie jest zerem, lecz posiada określoną wartość dodatnią, może być skończona – odpada całe jego rozumowanie”<sup>19</sup>.

Sądzę, że istota argumentu dychotomii sprowadza się do zasadniczej sprzeczności między czysto rozumową możliwością dzielenia pewnej skończonej wielkości na nieskończenie wiele wielkości, a niemożliwością przeprowadzenia takiego podziału w rzeczywistości. Teoria szeregów nieskończonych (ukazująca, że suma nieskończona pewnych wielkości może być skończona) tego problemu nie rozwiązuje – przecież w argumentie Zenona wychodzi się od nieskończonego podziału odcinka o skończonej długości, czyli zakłada się, że takie sumowanie (sumowanie nieskończenie

wielu odcinków dających skończoną sumę) teoretycznie jest możliwe. Przeszkodą w traktowaniu całego problemu podziału w sposób wyłącznie teoretyczny jest czas, który również musi być dzielony w nieskończoność wraz z podziałem odcinka. Jednak, o ile odcinek i jego długość są z góry dane, i ustalone, to czas „pojawia się” dopiero w momencie pokonywania tego odcinka (wielkość czasu nie może być z góry dana, jeśli założymy, że przyszłość nie jest dana w jakiś sposób w teraźniejszości).

Stąd otrzymujemy, że przyjęcie podziału odcinka czasowego na nieskończenie wiele odcinków wiązałoby się z przyjęciem istnienia nieskończoności aktualnej – bo nie można z góry, apriorycznie określić tego podziału, dokonuje się on faktycznie, w rzeczywistości.

Zobaczmy, co na temat argumentu Zenona pisze Arystoteles: „W świetle pospolitych argumentów staje się oczywiste, że skoro czas jest ciągły (tzn. jeśli granice poszczególnych odcinków czasowych tworzą jedność), to i wielkość jest taka. (...) A jest tak z tej racji, że wielkości czasowe i przestrzenne są przedmiotem tego samego podziału (...) Z tego też względu dowód Zenona opiera się na fałszywym założeniu, że mianowicie jest niemożliwe, by jakieś ciało mogło przebyć nieskończoną ilość punktów lub zetknąć się z nimi w skończonym okresie czasu. W dwojakim bowiem sensie mówi się o długości i o czasie, że są nieskończone i w ogóle o wszystkim, co jest ciągłe: są tak nazywane albo ze względu na podzielność, albo ze względu na ich krańce. Nie ulega wątpliwości, że ciało w skończonym czasie nie może zetknąć się z punktami ilościowo nieskończonymi; ale może się zetknąć z nimi ze względu na podzielność; albowiem sam czas jest w tym sensie również nieskończony. (...) A zatem ani nieskończoności nie można przebyć w czasie skończonym, ani w czasie nieskończonym odcinka skończonego; ale, gdy czas będzie nieskończony, to również i wielkość będzie nieskończona; a gdy wielkość będzie nieskończona, to również i czas”<sup>20</sup>.

Również argument Arystotelesa problemu nie rozwiązuje. Arystoteles założył bowiem, że:

- 1) struktury *continuum* czasu i przestrzeni są tego samego rodzaju;
- 2) odpowiednim odcinkom przestrzennym możemy przyporządkować odpowiednie odcinki czasowe (i to w sposób wzajemnie jednoznaczny);
- 3) odcinek czasowy jest dany z góry, tak samo jak odcinek przestrzenny.

Sądzę, że każde z tych założeń jest dyskusyjne. Dopiero nauka epoki nowożytnej podjęła się analizy tych kwestii.

Ponadto istota argumentu nie polega na zależności między strukturą czasu a strukturą przestrzeni, lecz na uchwyceniu samej istoty *continuum* – czy myślenie albo rzeczywistość mają strukturę *continuum*? Gdyby istniała wzajemna odpowiedniość między czasem a wielkością przestrzeni-

ną, to pojawiający się w rozumowaniu Zenona nieskończony ciąg odcinków czasowych, odpowiadających odcinkom przestrzennym, musiałby dawać w sumie wielkość skończoną (bo suma odcinków przestrzennych jest skończonym, z góry ustalonym odcinkiem). Uznanie, że czas i droga mają tę samą naturę, jeśli chodzi o możliwości podziału, nie rozwiązuje problemu, gdyż istotne jest to, czy taki nieskończony podział jest w ogóle możliwy. Całe rozumowanie Zenona i kontrargumenty Arystotelesa wykorzystują w sposób istotny założenie o możliwości takiego podziału i również uchwycenie otrzymanej sprzeczności jest możliwe dopiero w ramach tego założenia. Jeśli nawet wielkości czasowe i przestrzenne mają strukturę *continuum* (tzn. jeśli dzielą się w nieskończoność), to czy w wyniku tego nieskończonego podziału cokolwiek otrzymamy, a jeśli tak, to przecież otrzymane elementy mogą nie mieć struktury *continuum* (będą niepodzielne), gdyż podział dokonywany jest „do końca”, dopóki jest to możliwe. Jak wobec tego odtworzyć z tych elementów dzielony na początku odcinek, skoro w wyniku podziału została zniszczona struktura *continuum*. Teoria szeregów nieskończonych mówi tylko tyle, że suma nieskończonej ilości pewnych wielkości może być skończona np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

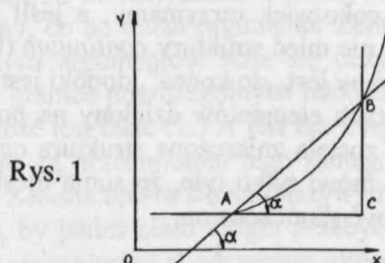
Teoria ta nie mówi jednak nic o sumowaniu elementów, które nie są wielkościami (liczbami) i czy w wyniku takiego sumowania możemy otrzymać element będący wielkością (liczbą) – a tego problemu dotyczy przecież paradoks Zenona. Dopiero teoria całki Riemanna pokazuje jak z tzw. „wielkości nieskończenie małych” otrzymać wielkości skończone. Okazało się, że taka suma „wielkości nieskończenie małych” dająca w wyniku wielkości skończone może być ściśle i poprawnie zdefiniowana. Stało się to za cenę zrezygnowania z pojęcia „nieskończenie małej”, poprzez wykorzystanie pojęcia granicy. Czy jednak „nerw” argumentu Zenona został zachowany?

Ad 2. Jeśli chodzi o argument A2 to sędzę, że jego istota polega na następującej implikacji: strzała w danej chwili znajduje się w określonym miejscu, a więc spoczywa. Naturalną konsekwencją jest, że spoczynek dać ruchu nie może. Jeśli traktujemy ruch między danymi punktami  $A$  i  $B$  w sposób „absolutny” tzn. bez odwołania się do pewnego układu odniesienia, to rzeczywiście ruch w punkcie jest niemożliwy. Ruch między punktami  $A$  i  $B$  może być opisany przy pomocy prędkości rozumianej jako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AC}, \text{ gdzie } \alpha \text{ jest kątem między odcinkiem } AB \text{ a odcinkiem } AC$$



w trójkącie  $ABC$  (rys. 1). Jeśli mamy do czynienia wyłącznie z punktem  $A$ , to trójkąt  $ABC$  redukuje się do punktu i nie ma sensu pojęcie prędkości ( $\tan \alpha$ ). Dopiero, kiedy wychodzimy poza „lokalną strukturę” toru ruchu  $AB$  i prędkości otrzymanej w oparciu o trójkąt  $ABC$ , i zauważamy, że  $\alpha$  jest również kątem między sieczną toru ruchu przechodzącą przez punkty  $A$  i  $B$  a osią  $OX$ , to paradoks znika. W przypadku, gdy punkt  $B$  pokrywa się z punktem  $A$  (przy rozpatrywaniu ruchu w punkcie), wprowadzie trójkąt  $ABC$  redukuje się do punktu, jednak kąt między styczną do toru ruchu w punkcie  $A$  a osią  $OX$  pozostaje, czyli jest możliwe zdefiniowanie prędkości chwilowej w punkcie.



Paradoks ten tak naprawdę stwierdza, że niemożliwa jest prędkość chwilowa różna od zera. Jednak pojęcie pochodnej funkcji pokazuje, że pojęcie prędkości chwilowej ma sens tzn. iloraz wielkości, które dążą do zera może mieć sens liczbowy, a co więcej otrzymana wielkość może być różna od zera ( $V_{chw} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ ). Zerowanie się pochodnej na pewnym odcinku czasowym jest tożsame ze spoczynkiem (funkcja jest stała), jednak z tego, że pochodna w jakimś punkcie się zeruje nie wynika czy ciało spoczywa, czy nie. Nie jesteśmy więc w stanie uchwycić „absolutnego” spoczynku w chwili  $t_0$ , co zakładał Zenon w swoim paradoksie. Jedynie, co mamy do dyspozycji, to zerowanie się pochodnej funkcji drogi względem czasu w chwili  $t_0$ . Z zerowania się pochodnej w chwili  $t_0$  może wynikać, że ciało spoczywa, jednak możliwe są też dwie inne alternatywy:  $t_0$  jest zmianą kierunku ruchu na przeciwny lub zmianą kształtu toru ruchu (punkt ekstremalny lub punkt przegięcia). O ile spoczynek w danej chwili jest nie do uchwycenia w sposób jednoznaczny (w ogólnej sytuacji), to w przypadku ruchu jest to możliwe – jeśli pochodna w chwili  $t_0$  jest większa od zera, to ciało się porusza.

Paradoks Zenona zwraca więc uwagę na trudności z użyciem pojęcia spoczynek i widzimy, że takie trudności są rzeczywiście – wskazują

one jednak wyłącznie na brak symetrii między pojęciem ruchu a pojęciem spoczynku, a nie są przyczyną odrzucenia pojęcia ruchu, gdyż to właśnie ruch okazuje się pojęciem w pewnym sensie „absolutnym” i jednoznacznym. Jak widać dopiero pojęcie granicy „obłaskawiło” ten paradoks Zeno-na.

K. Ajdukiewicz analizując paradoks leżącej strzały zauważa, że źródłem błędu jest „niedostatecznie jasne odróżnianie punktu czasowego i króciutkiego odcinka czasu. Gdy Zenon stwierdza, że leżąca strzała jest w każdej chwili swego lotu w pewnym określonym miejscu, ma na myśli, mówiąc o chwili, punkt czasowy nie posiadający żadnego trwania, a nie odcinek czasu o bardzo chociażby krótkim trwaniu. Albowiem tylko dla chwil-punktów jest oczywiste, iż w każdej z nich poruszające się ciało znajduje się w określonym miejscu. Gdy jednak stąd, iż poruszające się ciało w każdej chwili jest w określonym miejscu, wysnuwa wniosek, iż wobec tego ciało to w każdej chwili spoczywa, zmienia widocznie znaczenie słowa „chwila” i podsuwa pod nie inne rozumienie niż poprzednio, mianowicie rozumie przez „chwile” króciutki odstęp czasu, który posiada jakieś, choć małe bardzo, trwanie. (...) O tym bowiem, czy ciało spoczywa, czy też się porusza w pewnej chwili, rozumianej jako punkt czasowy, nie decyduje to, co o pozycji tego ciała w tej izolowanej od tła chwili można powiedzieć, lecz dopiero to, co o jego pozycji w chwilach wcześniejszych i późniejszych od danej jest prawdą<sup>21</sup>.”

Nie jest do końca prawdą stwierdzenie Ajdukiewicza, że „o ruchu ciała nie decyduje pozycja ciała w izolowanej chwili”, bo wprowadźmy trójkąt  $ABC$  (wraz z kątem  $\alpha$ ) w punkcie  $A$  „znika”, jednak pozostaje kąt  $\alpha$  jako kąt między styczną do toru ruchu a osią  $OX$ . Oczywiście ta pozycja zależy od pozycji w chwilach wcześniejszych i późniejszych, jednak zachowuje jakby „pamięć” struktury ruchu i może być rozpatrywana sama w sobie. Ta pamięć utrwalona jest w ustalonym odniesieniu punktów toru ruchu do osi układu współrzędnych.

Ad. 3 Zenon dostrzega alternatywę jedynie pomiędzy dyskretną strukturą bytu, a strukturą na wzór monad Leibniza. I rzeczywiście w ramach tej alternatywy mamy sprzeczność:

1. zakładając pierwszą alternatywę otrzymujemy, że kwadrat zbudowany jest z miniaturowych dyskretnych kawałków i w konsekwencji tyle samo tych kawałków znajdowałoby się wzdłuż przekątnej, jak i wzdłuż każdego z boków;
2. w przypadku drugiej alternatywy brzeg toczącego się koła (byłby kształtu wielokąta o nieskończenie wielu bokach) tworzyłby nieciągłą linię – nieciągłość związana jest z „przeskokiem” z jednego boku na drugi.

Gdyby rzeczywiście istniały tylko te dwie alternatywy, to myślę, że rozwiązanie paradoksu nie byłoby możliwe. To, co otrzymujemy w wyniku przeprowadzonego „do końca” podziału *continuum* nie może mieć struktury *continuum* – nawet, jeśli podział będzie przebiegał w nieskończoność, to otrzymamy część „nieskończenie małą” i niepodzielną, która również nie nadaje się do rekonstrukcji *continuum* z powodu zasadniczej od niego odrębności. Trudności te bardzo dobrze są widoczne, gdy obserwujemy próby rozwijania w XVII wieku rachunku różniczkowego przy pomocy pojęcia różniczki (nieskończenie małej). Przyjrzymy się temu dokładniej w dalszej części. Sądzę, że dopiero powstanie teorii mnogości i „teoriomnogoscio-we” spojrzenie na konstrukcję *continuum* rzeczywistego ukazuje możliwość rozwiązania tego paradoksu.

Ad. 4 Co to znaczy, że ilość wszystkich istniejących rzeczy jest ściśle określona? Czy to, że możemy podać (przynajmniej potencjalnie) ich katalog? Jednak skąd wiemy, że dana „rzecz” jest (lub nie jest) rzeczą, że część danej rzeczy jest (lub nie jest) rzeczą, że układ pewnych części również jest (lub nie jest) rzeczą. Przecież takie układy mogą być nieskończone, a część danej rzeczy dowolnie mała. Ale tego właśnie problemu dotyczy paradoks Zenona. Nie chodzi o to, że ponieważ używa on nieścisłych pojęć, to całe rozumowanie upada.

Sądzę, że paradoks można zinterpretować w ten sposób, iż istnieją pewne pojęcia (np. pojęcie „rzeczy”), które nie mają ściśle określonych desygnatów mimo, że te desygnaty istnieją. Istnieje pewien stopień niewrażliwości pojęcia na zmianę cech odpowiadającego mu desygnatu. O ile cechy można zmieniać w sposób ciągły, o tyle istnieje nieskończenie wiele znaczeń danego pojęcia – ilość tych znaczeń jest tak duża, jak duża jest moc „zbioru zmian”. Jak więc możliwe jest jednoznaczne przejście od pojęcia do rzeczy, którą ono oznacza? Jaki jest sens porządkowania i dzielenia rzeczywistości przy pomocy skończonej ilości pojęć na pewne klasy, skoro w każdej klasie znajduje się nieskończona ilość nierozróżnialnych obiektów? Jak to, co dyskretne może ująć to, co ciągle? Myślę, że paradoks ten w szczególny sposób uderza w koncepcję *continuum*, która właśnie zakłada i oznacza ciągłą strukturę przynajmniej niektórych obszarów rzeczywistości. Sądzę, że dopiero głębsze wniknięcie w sens topologicznego pojęcia *continuum* pozwoli lepiej zobaczyć istotę tego paradoksu i zrozumieć ograniczenie, które narzuca.

Ad 5 i 6. Paradoks stwierdza, że istnieją takie przypadki, kiedy poszczególne elementy mają inne cechy, niż utworzona z nich całość. I nie pomagają żadne konceptualne sumowanie tychże elementów – całość w rzeczywistości zawsze okaże się bogatsza od sumy części składowych. Może przykład

podany przez Zenona nie jest zbyt trafnie dobrany, gdyż to, iż nie słyszymy upadającego jednego ziarenka wynika z istnienia progu słyszalności (czyli pojawia się nieprecyzyjne używanie słowa „słyszalność”), a nie z tego, że to ziarenko rzeczywiście żadnego dźwięku nie wydaje. Struktura *continuum* jest idealnym przykładem pokazującym działanie tego mechanizmu (mimo, iż punkt jest elementem *continuum* geometrycznego, to żadne metody nie pozwalają „zlepić” punktów w *continuum*; trzeba przyjąć istnienie pewnych cech, które bezpośrednio określają „bycie *continuum*”).

Myślę, że paradoks Eubulidesa ujmuje tę kwestię lepiej. Niech  $a_n$  oznacza osobnika posiadającego  $n$  włosów. Jeśli liczba  $n$  jest „dość” duża możemy powiedzieć, że osobnik  $a_n$  nie jest łysy. Jednak, ponieważ utrata jednego włosa nie może spowodować łysiny, osobnik  $a_{n-1}$  również nie jest łysy. W ciągu  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  nie można wskazać żadnego takiego miejsca, w którym nastąpiłoby przejście w stan „bycia łysym”, jednak osobnik  $a_0$  jest łysy. Czy problem polega tylko na tym, że pojęcie „łysy” nie jest pojęciem ostrym?

Podobnie jest z pojęciami „młody” i „stary”. W pewnych okresach życia danego człowieka możemy bez problemu stwierdzić czy jest on młody, czy stary. Jednak nie zawsze jest to jednoznacznie możliwe – w pewnym przedziale wieku ani jednego, ani drugiego powiedzieć nie można. Dzieje się tak dlatego, iż brak nam środków, aby tę kwestię rozstrzygnąć. Jeśli przyjmiemy jakiekolwiek kryterium „bycia młodym”, to okazuje się, że może ono działać tylko do pewnego wieku – dalej staje się za mało precyzyjne. I nic nie pomoże zmiana tego kryterium chyba, że ustalimy arbitralnie wiek przejścia młodości w starość.

Można stąd wyciągnąć następujący wniosek: istnieją pojęcia, których treści i znaczenia nie można ustalić poprzez podanie pewnego skończonego układu cech; jednak o treści tych pojęć decyduje pewna nieskończona (i niezdeterminowana) lista cech. Na przykład, z dwóch ludzi mających taką samą ilość włosów, jeden może być uznany za łysiego, a drugi nie, w zależności od struktury włosów, ich grubości, długości itp. Kryterium charakteryzujące czy rozróżniające musi być więc, w przypadku takich pojęć, oparte na innej podstawie. Należy w inny sposób uchwycić istotę takich pojęć. W jaki sposób? Myślę, że definiowanie i używanie (w różnych teoriach i twierdzeniach) pojęcia *continuum* (jak i wielu innych pojęć) w dziejach matematyki jest przykładem znalezienia złotego środka między nieskończonością i niezdeterminowaniem zbioru charakteryzujących go cech a konwencjonalnym ustaleniem znaczenia.

W swoim artykule „Zmiana i sprzeczność” Ajdukiewicz daje uogólnienie powyższego argumentu i nazywa to uogólnienie *postulatem przechodzenia*: „ilekroć jakieś ciało przechodzi ze stanu  $A$  do różnego odeń sta-



nu  $B$ , tylekroć istnieć musi taka chwila  $t$ , późniejsza od wszystkich tych chwil, w których ciało jest jeszcze w stanie  $A$ , a wcześniejsza od każdej chwili, w której nasze ciało już jest w stanie  $B$  i taka, że w owej chwili  $t$  ciało to nie jest ani w stanie  $A$ , ani w stanie  $B$ ”<sup>22</sup>. Postulat ten jest konsekwencją zasady ciągłości, która stwierdza, że każde przejście dokonuje się w dowolnie małych etapach, a nie skokami. Zgodnie z zasadą ciągłości niemożliwe jest, aby dane ciało znajdowało się w chwili  $t$  w stanie  $A$ , a w każdej chwili późniejszej w pewnym stanie  $B$ , różnym od  $A$ . Również niemożliwe jest, aby od pewnej chwili  $t$  ciało znajdowało się w stanie  $B$ , a w każdej chwili poprzedniej w innej chwili  $A$ . Znaczący to, że pomiędzy chwilami, w których ciało jest w stanie  $A$  i w stanie  $B$  zawsze znajdują się chwile, w których ciało nie jest ani w stanie  $A$ , ani w stanie  $B$ . Pojawia się więc jakiś nowy stan – stan przechodzenia ze stanu  $A$  w stan  $B$ . Znaczący to w konsekwencji, że pomiędzy dowolnymi stanami danego ciała znajduje się nieskończenie wiele innych stanów, w których to ciało może się znajdować. Zawsze więc możliwe jest zakwestionowanie danej klasyfikacji stanów, w których znajduje się dane ciało (np. stan gazowy, ciekły i stały) i wskazanie nowych stanów pośrednich, gdy przeprowadzi się nowe doświadczenia i wprowadzi bogatszą siatkę pojęć.

Co się jednak stanie, gdy zastosujemy postulat przechodzenia do następującej sytuacji: przejście ciała ze stanu  $A$  do stanu  $non - A$  (czyli do stanu, który nie jest stanem  $A$ ). Pomiedzy stanami  $A$  i  $non - A$  nie ma już żadnych pośrednich stanów, a zasada przechodzenia domaga się, aby taki stan, który nie jest ani stanem  $A$ , ani stanem  $non - A$ , istniał. Otrzymujemy tym samym sprzeczność.

Gdzie tkwi istota tej sprzeczności? Sądzę, że istnieje następujące logiczne wyjaśnienie: jeśli stan  $B$  nie jest scharakteryzowany jedynie przy pomocy pewnych cech, które są zaprzeczeniem cech określających stan  $A$  (załóżmy, że istnieją cechy  $A_1$  i  $B_1$  takie, że cecha  $A_1$  nie jest zaprzeczeniem żadnej cechy charakteryzującej stan  $B$ , a cecha  $B_1$  nie jest zaprzeczeniem żadnej cechy charakteryzującej stan  $A$ ), to rzeczywiście postulat przechodzenia wskazuje na cechy pośrednie między cechami  $A_1$  i  $B_1$ . Natomiast z samej definicji cechy  $non - C$  wynika, że zawiera ona wszystkie stany pośrednie między cechą  $C$  a jakąkolwiek inną cechą. Nie ma więc żadnej kolizji z zasadą ciągłości. Nasuwa się tylko jeden prosty wniosek: należy bardzo ostrożnie posługiwać się obiektami, których charakterystyka opiera się wyłącznie na negacji innych znanych cech. Brak „pozytywnej” charakterystyki danego obiektu może bowiem dawać sprzeczność z tak rozumianą zasadą ciągłości.

## Przypisy:

<sup>1</sup> Przy wprowadzaniu tej definicji *continuum* opieram się na rozróżnieniach i rozważaniach Arystotelesa zawartych w jego *Fizyce*. Prowadzi to do pewnych trudności czy wręcz sprzeczności np. ze współczesnym rozumieniem *continuum* w topologii (zgodnie z wprowadzoną definicją punkt nie ma struktury *continuum*, natomiast w topologii ją posiada; zbiór liczb wymiernych natomiast posiada powyższą cechę ciągłości, a we współczesnej matematyce ciągłość, inaczej zresztą rozumiana, nie przysługuje zbiorowi liczb wymiernych). Jednak uważam, że analizy Arystotelesa są najpełniejszym uchwyceniem problemu *continuum* w początkowym okresie badań. Dokładniejsza analiza arystotelesowskiego rozumienia zagadnień związanych z *continuum* będzie przedstawiona w § 4 tego rozdziału.

<sup>2</sup> Zauważmy, że nie jest to przeciwieństwo logiczne, ponieważ zaprzeczamy zarówno ciągłości jak i spoistości bytu. Znaczy to, że między *continuum* a strukturą dyskretną mogą istnieć jeszcze inne pośrednie struktury.

<sup>3</sup> D. Lanza, *Anassagora. Testimonianze e frammenti*, Firenze 1966, fragment 3.

<sup>4</sup> Chodzi o słynne zagadnienie mostów królewieckich oraz formułę ukazującą związek między ścianami (f), krawędziami (e) i wierzchołkami (v) wielościanu ( $v - e + f = 2$ ).

<sup>5</sup> Dla ujednolicenia zapisu i zaznaczenia, że cały czas mówimy o tym samym bycie, będę używał zapisu *continuum* mimo, iż w topologii stosuje się zapis *kontinuum*.

<sup>6</sup> Por. np. R. Engelking, *Topologia ogólna*, Warszawa 1976 s. 55-69.

<sup>7</sup> Przy podawaniu następnych kwestii korzystam w tym paragrafie z książek: R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, Część. 1, Warszawa 1986; K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977.

<sup>8</sup> Do bardziej znanych należą twierdzenie Nagaty-Smirnowa (Przestrzeń topologiczna jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest regularna i ma bazę  $\sigma$ -lokalnie skończoną) oraz twierdzenie Binga (Przestrzeń topologiczna jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest regularna i ma bazę  $\sigma$ -dyskretną). Rodzina jest lokalnie skończona (dyskretna) w przestrzeni, gdy w każdym punkcie tej przestrzeni istnieje otoczenie mające przekrój niepusty ze skończoną (z co najwyżej jednym) ilością zbiorów tej rodziny. Rodzina jest  $\sigma$ -lokalnie skończoną ( $\sigma$ -dyskretna), gdy jest przeliczalną sumą rodzin lokalnie skończonych (dyskretnych).

<sup>9</sup> Klasy obrazów ciągłych odcinka i kuli są identyczne w sensie topologicznym – są to continua lokalnie spójne.

<sup>10</sup> Platon, *Timajos*.

<sup>11</sup> Tamże, s. 44.

<sup>12</sup> Dla starożytnych liczby wymierne nie miały statusu liczb. Były tylko stosunkiem liczb naturalnych.

<sup>13</sup> O stosunku kolejności możemy mówić w przypadku kolejnych liczb naturalnych. Między np. liczbami 1 i 2 nie znajdują się żadne liczby naturalne. Warto odnotować, iż słowo „między” Arystoteles rozumie następująco: rzecz *c* znajduje się między rzeczami *a* i *b*, jeśli zmieniająca się nieprzerwanie i zgodnie ze swoją naturą rzecz *a* osiągnie ją, zanim dojdzie do rzeczy *b*.

<sup>14</sup> Arystoteles, *Fizyka*, Ks. V 227a.

<sup>15</sup> Arystoteles, *Fizyka*, Ks. VI 233a.

<sup>16</sup> „Space is infinite not only in the sense that it never comes to an end; but at every place it is, so to speak, inwardly infinite, inasmuch as a point can only be fixed step-by-step by a process of subdivision which progress ad infinitum. This is in contrast with the resting and complete existence that intuition ascribes to spaces. The „open” character is communicated by the continuous space and the continuously graded qualities to the things of the external world. A real thing can never been given adequately, its „inner horizon” is unfolded by an infinitely continued process of ever new and more exact experiences; it is, as emphasized by Husserl, a limiting idea in the Kantian sense. For this reason it is impossible to posit the real thing as existing, closed and complete in itself. The *continuum* problem thus drives one toward in epistemological idealism”. (Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton 1949 s. 41).

<sup>17</sup> Historia matematyki, to w znaczącej mierze historia prób uchwycenia i doprecyzowania pojęcia *continuum*. Zalicza się do nich, między innymi, próba mierzenia przy pomocy liczb naturalnych odcinków geometrycznych (czy ogólnie, wielkości geometrycznych), czyli tworzenie pojęcia liczby rzeczywistej (*continuum* rzeczywistego).

<sup>18</sup> Starożytni rozumieli nieskończoność potencjalnie, co oznacza możliwość przekraczania dowolnie ustalonej wielkości.

<sup>19</sup> K. Ajdukiewicz, *Język i poznanie*, t. 2, *Zmiana i sprzeczność*, Warszawa 1965 s. 93.

<sup>20</sup> Arystoteles, *Fizyka*, s. 233 a.

<sup>21</sup> K. Ajdukiewicz, *Język i poznanie*, t. 2, s. 99-100.

<sup>22</sup> Tamże, s. 10.

### Rozdział III

## Filozofia jako poszukiwanie pewności

W dalszej części jako „tacit knowledge” są wykorzystywane opisane poniżej „fakty filozoficzne”. Determinują one często w sposób niejawny i ukryty przeprowadzane rozumowania. Dlatego chciałbym w tym miejscu o nich wspomnieć i naświetlić kierunek prowadzonych dalej dróg rozumowań. Chwilami jednak te ukryte przed założenia filozoficzne wychodzą na światło dzienne. Taka sytuacja będzie miała miejsce w końcowej części rozdziału 6. Przez pryzmat opisanych tutaj faktów filozoficznych są ukazane analizowane fakty dziejów matematyki.

Istnieje jeszcze drugi, mający fundamentalne znaczenie, związek między filozofią a naukami szczegółowymi. Przecież dzieje filozofii, to poszukiwanie pewności a historia nauk szczegółowych jest dowodem na to, że to poszukiwanie nie jest mrzonką. Poszukiwanie pewności miało w dziejach myśli ludzkiej wiele istotnych kroków i odkryć. Zwrócę uwagę na kilka z nich, które będą tłem i zasadniczym odniesieniem dalszych rozważań. Przedstawione idee filozoficzne odkryte przez wielkich filozofów w ciągu dziejów myśli ludzkiej będą nie tylko tłem przedstawionych analiz historycznych, lecz również materiałem ukazującym inspirującą rolę filozofii w naukach szczegółowych, jak również wpływ wyników tychże nauk na rozumienie idei filozoficznych. Ponadto, przedstawiam te idee, gdyż to one właśnie tworzą nieodłączny element mojego myślenia i chcę przez to świadomie zarysować obszar, poza który z trudnością umiem lub chcę wychodzić.

#### 1. Wprowadzenie podstawowych pojęć filozoficznych

Najpierw jednak wróćmy do miejsca, gdzie rodzi się myślenie filozoficzne, gdzie pojawia się problem prawdy i poznawania. Jest to potrzebne, aby dostrzec w jaki sposób pewne zagadnienia i „rozstrzygnięcia” filozoficzne dają podstawę do budowy racjonalnej wiedzy o świecie.

Wprowadźmy cztery niedefiniowalne pojęcia, które będą wyjaśnione w dalszej kolejności, przy pomocy kilku przykładów z historii filozofii. Tymi pojęciami są: absolutna sytuacja graniczna (ASG), sytuacja pierwotna (graniczna – SG), fakt filozoficzny (FF) oraz absolut poznawczy (AP).



Sytuację graniczną można by określić jako bezpośrednie odsłonięcie, jako stan, w którym negacja odsłanianego faktu jest niemożliwa. Każda sytuacja pierwotna odsłania swoisty fakt filozoficzny i w ten sposób rozpoczyna się doświadczenie filozofii. Kiedy fakt filozoficzny zostaje odsłonięty, ten kto tego doświadczył, czuje się zobowiązany do ukazania tego faktu innym i sprawienia, żeby stał się on faktem tego świata.

Absolut poznawczy natomiast, będący ściśle związany z faktem filozoficznym, jest „czymś”, co umożliwia i rozpoczyna proces poznawania – zarażem to on właśnie uzasadnia, z jednej strony realność świata, a z drugiej racjonalność człowieka. W przypadku nauki jest podstawowym i pierwotnym warunkiem poprawności przeprowadzanych rozumowań i dowodów.

Absolutna sytuacja graniczna umożliwia zaistnienie sytuacji pierwotnych, jednak sama jest nieuchwytna z zewnątrz, jest nieopisywalna, można ją poznać wyłącznie od „wewnątrz”. „Przeżycie” tej sytuacji ma miejsce np. w doświadczeniu Demiurga Platona, Pierwszego Poruszyciela Arystotelesa, Prądnicy Plotyna, Absolutu Św. Tomasza czy Absolutnego Ty Bubera. ASG transcenduje fakty filozoficzne, a zarazem sytuacje pierwotne są jej aspektami. Ponieważ ASG jest nieopisywalna, przy podawanych przykładach ograniczę się do jej aspektów, czyli do sytuacji pierwotnych.

## 2. Sokrates i odkrycie racjonalnej struktury świata

Co było sytuacją pierwotną filozofii Sokratesa i jaki fakt filozoficzny ona odsłoniła?

Stojący przed swoimi oskarżycielami Sokrates rozpoczyna obronę i wraca do początków swojej drogi filozoficznej. Wtedy to właśnie, przed laty, jego przyjaciel Chajrefont udał się do wyroczni w Delfach z pytaniem, czy istnieje ktoś mądrzejszy od Sokratesa. I uzyskał odpowiedź, że nie! Jak zareagował Sokrates, gdy dowiedział się o tych słowach wyroczni?

„Co też to bóg mówi? Cóż ma znaczyć ta zagadka? Bo ja doprawdy, ani się do wielkiej, ani do małej mądrości nie poczuwam. Więc cóż on właściwie mówi, kiedy powiada, że ja najmądrzejszy? Przecież chyba nie kłamie. To mu się nie godzi. I długi czas nie wiedziałem, co to miało znaczyć, a potem powoli, powoli zacząłem tego dochodzić tak mniej więcej: Poszedłem do kogoś z tych, którzy uchodzą za mądrych, aby jeśli gdzie, to tam przekonać wyrocznię, że się myli, i wykazać jej, że ten oto tu jest mądrzejszy ode mnie, a tyś powiedziała, że ja. Więc, kiedy się tak w nim rozglądam – nazwiska wymieniać nie mam potrzeby: to był ktoś spośród polityków, który na mnie takie jakieś z bliska zrobił wrażenie, obywatela – otóż, kiedy tak z nim rozmawiał, zaczęło mi się zdawać, że ten obywatel wydaje się mądry wielu innym ludziom, a najwięcej sobie samemu, a jest? Nie! A potem próbowałem mu wykazać, że się tylko uważa za mądrego, a nie jest nim naprawdę. No i stał mnie znienawidził i on, i wielu z tych, co przy

tym byli. Wróciwszy do domu zacząłem miarkować, że od tego człowieka jednak jestem mądrzejszy. Bo z nas dwóch żaden, zdaje się, nie wie o tym, co piękne i dobre; ale jemu się zdaje, że coś wie, choć nic nie wie, a ja, jak nic nie wiem, tak mi się nawet i nie zdaje. Więc może o tę właśnie odrobinę jestem od niego mądrzejszy, że jak czego nie wiem, to i nie myślę, że wiem. Stamtąd poszedłem do innego, który się wydawał mądrzejszy niż tamten, i znowu takie samo odniosłem wrażenie. Tu znowu mnie ten ktoś znienawidził i wielu innych ludzi. Więc potem tom już po kolei chodził, choć wiedziałem, i bardzo mnie to martwiło i niepokoiło, że mnie zaczynają nienawidzić, a jednak mi się koniecznym wydawało to, co bóg powiedział, stawiać nade wszystko”<sup>1</sup>.

Przeżycie sytuacji pierwotnej, jaką było przyjęcie i próba zrozumienia słów wyroczni sprawiło, że życie Sokratesa uległo zasadniczej zmianie. Trzeba iść i demaskować fałsz i pozory wiedzy, bez względu na konsekwencje. A w końcu chodzi o dotarcie do wiedzy prawdziwej, która jest obecna w umyśle każdego człowieka, lecz często nie uświadamiana z powodu uwikłania jej w skomplikowane i trudne do rozszyfrowania struktury. Należy więc dotrzeć do prawd najprostszych - umiejętnie stawiane pytania sprawiają, że każdy człowiek staje wobec zawartych w nim prawd, które rozjaśniają jego umysł i są wystarczające do zrozumienia innych kwestii.

W tym słynnym sokratejskim: „Wiem, że nic nie wiem”, gdy umysł konsekwentnie i dogłębnie analizuje wiedzę w odniesieniu do własnej osoby, dochodzi do uznania swojej niewiedzy, czyli osiąga wiedzę. Istnienie jakiejś wiedzy (np. o własnej niewiedzy) jest więc niezależne od przyjętych założeń. Istnieje więc pewien rodzaj wiedzy, która jest pierwotna i warunkuje wszelką inną.

Przy analizie jakiegokolwiek bytu, aby ten byt pojąć, czyli uczynić go racjonalnym, należy najpierw go „zdemaskować”, ukazując jego braki i sprzeczności. To odsłonięcie racjonalnej struktury bytu wraz ze sposobem odsłonięcia jest sokratejskim faktem filozoficznym odsłoniętym przez opisaną powyżej sytuację pierwotną. Jego aspektem metodologicznym są metody: elenktyczna i maieutyczna oraz związane z nimi indukcja i definicja pojęć wprowadzone przez Sokratesa. W oparciu o otrzymane pojęcia możemy odtwarzać prawdę o świecie.

### 3. Odkrycie przez Platona cyrkularnej struktury wiedzy prowadzącej do prawdy

Wspaniała metafora Platona o pochodzie rydwanów boskich wokół świata, między niebem a ziemią, ukazuje miejsce przebywania prawdy i jej doświadczenie, z którego rodzi się wszelka wiedza.

„Miejsce to zajmuje nie ubrana w barwy, ani w kształty, ani w słowa istota istotnie istniejąca, którą sam jeden tylko rozum, duszy kierownik, oglądać może. Naokoło niej świat przedmiotów prawdziwej wiedzy. A że boski umysł rozumem się karmi i najczystsza wiedzą, a podobnie umysł każdej duszy (...) przeto

każda się radością napelnia, kiedy byt od czasu do czasu zobaczy, widokiem prawdy się karmi i rozradowuje, aż ją obręcz drogi znowu na to samo miejsce przyniesie. A podczas tego obiegu ogląda sprawiedliwość samą, ogląda władzę nad sobą, ogląda wiedzę nie tę, która się z wolna tworzyć musi, a jest różna o różnych rzeczach, które my dziś bytami nazywamy, ale wiedzę rzeczywiście istniejącą, o tym, co jest istotnym bytem. (...) Oto jak żyją bogowie. A z innych dusz taka, co najlepiej za bogiem szła i była mu najpodobniejsza, ponad głowę woźnicy w miejsce poza niebem zagląda i drogę okrężną odbywa, ale jej konie przeszkadzają ciągle, tak że ledwie się może bytom rzeczywistym przyjrzeć. A inna raz się podnosi, raz zniża; konie jej patrzeć nie dają, więc jedno zobaczy, a drugiego nie dojrzy. (...) A oto prawo Konieczności: jeśli która dusza, za bogiem w ślad idąc, zobaczy coś ze świata prawdy, nic się jej stać nie może aż do następnego obiegu, i jeśli to zawsze potrafiła, nigdy żadnej szkody nie poniesie”<sup>2</sup>.

Platon w swojej sytuacji pierwotnej doświadcza wartości wiedzy prawdziwej przekraczającej wszelkie inne wartości. Ta prawda, do której mamy tylko znikomy dostęp, gwarantuje władzę nad samym sobą, jest kierownikiem umysłu, a przede wszystkim jest podstawą i gwarantem trwania oraz istnienia. Uwalniając się od uwarunkowań, mniemań i przesądów związanych ze światem zmysłowym, dochodzimy do wiedzy czysto rozumowej. I, mimo swojej aprioryczności, wiedza ta pozwala poznać świat i jego strukturę – ten ciągły pochód po okręgu, to nie błędne koło, lecz ciągle przybliżanie się do tej samej prawdy, której nie jesteśmy w stanie pojąć jednym spojrzeniem. W tym spostrzeżeniu mamy do czynienia z faktem filozoficznym – wiedza przybliżająca nas do prawdy musi mieć strukturę cyrkularną, a nie liniową, gdyż prawda nie ukazuje się dopiero po długich badaniach i analizach; ona jest dana już na początku dociekań i jest konieczna do tego, aby wszelkie rozważania były prawomocne; cała budowla wiedzy jest tylko po to, aby zobaczyć prawdę w pełnym świetle.

#### 4. Prawda jako ostateczny argument rozumu

Zobaczmy, co pisze na temat prawdy Arystoteles i jak on przeżywa swoją sytuację pierwotną:

„Prawda albo fałsz z punktu widzenia rzeczy zależy od ich połączenia lub rozdzielenia; kto więc myśli o rozdzielonym, że jest rozdzielone, a o połączonym, że jest połączone, mówi prawdę, natomiast głosi się fałsz, jeżeli się myśli przeciwnie o tym stanie rzeczy. (...) To nie dlatego jesteś biały, iż myślimy w sposób prawdziwy, że ty jesteś biały, lecz ponieważ jesteś biały my, stwierdzając to, mówimy prawdę. W stosunku do tego, co jest istotą i co istnieje w akcie, nie można pozostawać w błędzie, lecz albo istnieje o nim wiedza, albo nie istnieje (...) Prawda polega na poznaniu tego; i nie istnieje ani fałsz, ani błąd, lecz tylko nieświadomość”<sup>3</sup>.

Mając więc styczność z daną rzeczą i zdając relację z doświadczenia tej styczności wypowiadamy twierdzenie prawdziwe. Ta styczność jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dotarcia do prawdy. Musi istnieć odpowiednia relacja myśli z bytem i to ona właśnie (a nie budowa czy struktura zdania, w której myśl jest wyrażona) decyduje o prawdziwości myśli i zdania (myśl jest prawdziwa, jeśli stwierdza tak, jak jest w rzeczywistości). Forma zdania jest dopiero efektem tej relacji. Ustalenie właściwej relacji myśli do bytu, to klucz poznania i całej wiedzy – jest to klucz do prawdy. Po ustaleniu tej relacji nie jest już możliwy fałsz ani błąd – wystarczy jedynie spojrzeć na byt, który jest w akcji i uruchomić myślenie, a ono automatycznie ukaże nam prawdę.

Sytuacja pierwotna Arystotelesa, to doświadczenie, że bez rzeczywistości myśl byłaby niczym, nie „umiałaby” uzasadnić sensu swojego istnienia. Poprzez wejście w relację z rzeczywistością myśl uzyskuje podstawę swojego istnienia i ostateczny argument w sporze z wszelkiego rodzaju formami sceptycyzmu (podważającymi moc poznawczą rozumu) oraz idealizmu (nie uznającymi zasadniczej odrębności ontologicznej tworów myśli oraz świata rzeczy) – jest nim prawda. To stwierdzenie jest arystotelesowskim faktem filozoficznym. To doświadczone przez myśl rzeczy nadają jej bieg i rytm. Myśl w sposób bezpośredni doświadcza danej rzeczy jako całości lub widzi ją rozbitą na poszczególne elementy – jest to pierwotne doświadczenie i niemożliwe jest, aby myśl wtórnie rozbiła daną rzecz na mniejsze byty lub łączyła rzeczy doświadczone w większe układy będące również rzeczami (są to wyłącznie konstrukcje umysłu).

### **5. Kuzańczyk – odkrycie w symbolach matematycznych jedynych symboli umożliwiających niesprzeczne poznawanie świata**

W punkcie wyjścia mamy podjęcie przez Kuzańczyka idei Sokratesa: „Albowiem człowiek – nawet najbardziej gorliwy w nauce – nie znajduje w naukach nic doskonalszego niż w niewiedzy sobie przyrodzonej, którą uzna wówczas za wiedzę najwyższą. I tym będzie mądrzejszy, za im większego się uzna ignorantą”<sup>4</sup>.

Jak możliwe jest połączenie wiedzy z niewiedzą, a dokładniej wprowadzenie z niewiedzy jakiejś wyższego rodzaju wiedzy? O ile na płaszczyźnie czysto zmysłowej jest to, jak zauważa Kuzańczyk, niemożliwe, to wchodząc na poziom abstrakcji matematycznych możemy uświadomić sobie istnienie takiej możliwości. Ukryte przed zmysłami rzeczy duchowe mogą być badane przy pomocy symboli, gdyż wszelkie rzeczy łączą ukryte związki, zależności, dzięki którym powstaje jeden Wszechświat. Im przedmioty są bardziej abstrakcyjne, tym ich poznanie jest wyraźniejsze i pewniejsze. Przedmioty matematyczne zawierają w sobie tylko tyle materialności, aby możliwe stało się ich wyobrażenie – i są niemal całkowicie abstrakcyjne. Dlatego jedynie dzięki podobieństwom matematycznym można badać najtrudniejsze kwestie (również teolo-



giczne). Matematyka jest łącznikiem między tym co materialne, a tym co duchowe. Tylko dzięki rozumowaniu matematycznemu możemy zobaczyć jak sprzeczne ze sobą, w przypadku skończonym, pojęcia zostają uniesprzecznione, gdy rozpatrujemy je w aspekcie nieskończonym.

Jednym z przykładów podanych przez Kuzańczyka jest identyczność nieskończonego trójkąta i linii prostej. „Dodatkowo możesz sobie pomóc w zrozumieniu tej kwestii, przechodząc od trójkąta pojętego ilościowo do nieilościowego. Otóż, jak wiadomo, w każdym trójkącie ilościowym suma trzech kątów równa się dwóm kątom prostym. Stąd, im większy jest jeden kąt, tym dwa pozostałe mniejsze. Załóżmy teraz, że którykolwiek z kątów powiększymy, iż stanie się on równy dwóm kątom prostym, pozostając nadal trójkątem. Wtedy taki trójkąt będzie miał oczywiście trzy kąty będące jednym, który jest trzema”<sup>5</sup>.

Rozumowanie matematyczne pozwala na przejście od rozważań ilościowych do rozważań jakościowych, natomiast wielkości skończone stanowią podstawę rozumowania. W przypadku trójkąta (skończonego)  $ABC$ , jeśli jeden z jego kątów  $\alpha$  zmierza do kąta półpełnego, to z jednej strony trójkąt przechodzi w trójkąt niedostępny poznaniu zmysłowemu (długość boku leżącego naprzeciw kąta  $\alpha$  dąży do sumy długości boków przyległych), a z drugiej strony trójkąt ten staje się odcinkiem. Otrzymujemy więc tożsamość odcinka oraz trójkąta na poziomie abstrakcyjnym. Ten przykład, podany przez Kuzańczyka, pozwala zrozumieć jak pewne własności nie do pogodzenia na poziomie zmysłowym, materialnym czy ilościowym zostają uzgodnione na poziomie abstrakcyjnym lub jakościowym.

Co było sytuacją pierwotną filozofii Kuzańczyka? Umysł, poznając materialną rzeczywistość, nie jest w stanie uwolnić się od sprzeczności, na które wcześniej czy później natrafia. Te sprzeczności wynikają z różnorodności rzeczy materialnych. Również operując kategoriami zmysłowo-wyobrażeniowymi, przy poznawaniu rzeczy abstrakcyjnych czy duchowych, dochodzi do paradoksów oraz sprzeczności (gdyż rzeczy zmienne zostają przyporządkowane temu co niezienne). Umysł musi więc uznać własną niewiedzę, czyli niemożność poznania tego świata. Okazuje się w konsekwencji, że jedynie symbole (abstrakcyjne) zawierające w sobie **minimum** treści zmysłowo-wyobrażeniowych pozwalają na usuwanie lokalnie sprzeczności, z jednoczesnym zachowaniem kontaktu z materialną rzeczywistością. Takimi symbolami są właśnie symbole matematyczne. Przy poznaniu „matematycznym” rezygnuje się z maksymalistycznych aspiracji poznawczych, można jedynie stopniowo wznosić się po stopniach poznania.

Fakt filozoficzny odslonięty przez wskazaną powyżej sytuację pierwotną można wyrazić następująco: posługiwanie się abstrakcyjnymi pojęciami pozwala na uniknięcie sprzeczności w rozumowaniu, jednak kosztem utraty kontaktu z opisywaną rzeczywistością. Aby uniknąć tej sytuacji, należy zgodzić się na używanie „minimalnych” symboli tzn. symboli, które z jednej strony mają już rangę pojęć abstrakcyjnych, a z drugiej zachowują minimum treści

materialnych. Od czasu starożytnych Greków, pojęcie liczby lub formy geometrycznej traktowano jako takie minimalne symbole. Na przykładzie matematyki widać, że prawda może łączyć w sobie rzeczy „sprzeczne” bez samozniszczenia – okazuje się tym samym, że prawda jest procesem, drogą prowadzącą do Prawdy.

## 6. Kartezjusz – doświadczenie podmiotu myślącego jako generatora i gwaranta obiektywnej wiedzy o świecie

W zdaniu *Myślę, więc jestem* nie chodzi o stwierdzenie jakiejś fizjologicznej czynności myślenia czy odczuwania (czuję, więc jestem), gdyż takie zdanie łatwo zakwestionować – to czucie, to tylko wytwór fantazji, sen śniony nie koniecznie przez kogoś albo przez coś, lecz sen bezpodmiotowy, sam w sobie. Chodzi o to, iż przyjmujemy, że u podstaw istnienia tkwi pewna struktura logiczna – by była wolna od błędu musi być strukturą formalną (istnienie jest wynikiem pewnego, warunkującego je, stanu – myślenie, chcenie itp.). Jeśli nawet założymy, że ta struktura formalna jest wytworem fantazji, to ta fantazja jest „formalna”, wolna od zmiennych interpretacji i różnorodnych znaczeń – jest to „fantazja” jednoznaczna. Na tym podstawowym poziomie, na którym zaczyna się filozofia (akt ustanowienia filozofii) „nie tylko rozumienie, chcenie, wyobrażanie sobie, ale także i czucie jest tutaj tym samym, co myślenie”<sup>6</sup>. Nie możemy przypisywać żadnej treści tym pojęciom. Na tym podstawowym poziomie nie trzeba mieć uprzedniej wiedzy na temat tego czym jest poznanie, myślenie, czym istnienie, czym pewność, czym niemożność nieistnienia tego kto myśli. Ale ponieważ są to pojęcia najprostsze, które nie zakładają same pojęcia czegoś istniejącego, więc dopiero struktura, w której się pojawiają, nadaje im sens i znaczenie. Innymi słowy, dopiero uruchomienie formalnej struktury związanej ze zdaniem „myślę, więc jestem” sprawia, że poznanie jest poznaniem przez umysł oraz że jest poznaniem czegokolwiek, czyli prowadzi nas w konsekwencji do poznania naszego umysłu, jako podmiotu i zarazem przedmiotu poznania.

U kresu kartezjańskiego wątpienia pojawia się logiczna struktura pokazująca, że istnienie nie jest czymś pierwotnym, lecz jest wynikiem pewnego stanu (zwanego „myśleniem”), który można doświadczyć. Możemy doświadczyć istnienia dopiero wtórnie, po uprzednim doświadczeniu siebie jako podmiotu myślącego. Końcowy wniosek dowodzi, że całe wątpienie i rozumowanie, oparte na strukturze implikacji, jest wiarygodne – przecież w geście totalnego wątpienia można by zakwestionować wszelkie rozumowanie, każde wywnioskowanie implikacyjne, również wątpienie; jednak to właśnie myśl zakwestionowała istnienie (jeśli myślę, to możliwe, że nie istnieje; jeśli myślę, to mogę stwierdzić, że nie istnieje) otwierając tym samym problem istnienia. Przyjęcie jakiegokolwiek idei prowadzi nieuchronnie do jakiegoś istnienia, odrzucenie

wszelkich idei prowadzi do konieczności zanegowania samego istnienia; jest jednak skrajnie radykalnym aktem myślenia, co jest właśnie wystarczające do otrzymania istnienia (nawet skrajnie wąpiąca myśl podejmuje problem istnienia; a raczej, właśnie skrajnie radykalna myśl podejmuje problem istnienia). Istnienie jest więc nieuchronne.

W tym kontekście widać znaczenie dowodu na istnienie Boga. Odkrycie tego dowodu w kontekście radykalnego wąpienia i zrozumienie jego prawomocności, to kartezjańska sytuacja pierwotna. Czyż może być większa nieuchronność myślenia niż odkrycie w umyśle idei nieskończonego i w pełni doskonałego bytu. Jest to idea zasadniczo różna od pozostałych, które charakteryzują się skończonością i niedoskonałością. Nie ma więc możliwości otrzymania tej idei z pozostałych chyba, że poprzez ich zanegowanie, co oznacza jednak wejście na drogę (radykalnego) wąpienia – kresem tej drogi jest stwierdzenie istnienia (przynajmniej pewnej części) tego, co na początku było negowane. Jednak Byt w pełni doskonały może istnieć tylko jako niepodzielna całość. Istnienie Bytu w pełni doskonałego jest więc nieuchronne – stwierdzenie tego istnienia jest efektem procesu myślenia. I dopiero w tym momencie *cogito*, które odnajduje w sobie ideę doskonałego Bytu, rzeczywiście istniejącego poza nim, staje się faktem filozoficznym, elementem generującym obiektywną wiedzę o realnie istniejącym świecie.

### 7. Leibniz – połączenie nieskończoności „głębi” i nieskończoności „całości” podstawą wiedzy o świecie

Według Leibniza „najmniejsza cząstka materii na mocy aktualnego pomniejszania idącego w nieskończoność, którą kryje w sobie, przedstawia sobą aktualne powiększenie idące w nieskończoność, która poza nią jest we wszechświecie, że każda mała cząsteczka mieści w sobie, na nieskończenie wiele sposobów, żywe zwierciadło wyrażające cały wszechświat nieskończony, który wraz z nią istnieje. A z tego wynika, że dość potężny duch uzbrojony we wzrok dość przenikliwy mógłby tu zobaczyć wszystko, co jest wszędzie”<sup>7</sup>.

Istnienie świata opiera się na grze dwóch nieskończoności – tej, co jest ponad wszelkie wielkości i tej, która jest poniżej tego co najmniejsze. Na tym polega harmonia wprzód ustanowiona, że prawie nic, byle było monadą (bytem, substancją), czyli podmiotem życia i działania, wyposażonym w postrzeżenie i dążenie, wznosi się z nicości ku istnieniu; a z drugiej prawie wszystko, ogarniające całość istniejących bytów, zstępuje do nicości, gdyż zostaje umieszczone w każdej najmniejszej monadzie. W przypadku monady zdolnej do refleksji i tworzenia nauki otrzymujemy domknięcie dwóch nieskończoności – spojrzenie w siebie pozwala takiej monadzie dojrzeć cały świat; każda wyraźna myśl zawiera w sobie harmonię wszystkich rzeczy i jest zarazem częścią monady. Jediną granicą, na jaką natrafia monada, jest brak całkowitej przejrzystości

myśli – w tych elementach postrzeżenia, które są w pełni wyraźne, objawia się podobieństwo monady refleksyjnej do Boga, gdyż tylko Bóg zna wszystko w sposób wyraźny.

Sytuacją pierwotną filozofii Leibniza było dostrzeżenie w człowieku nieskończoności idącej w głąb. Mimo tego, iż prawie wszystkie ścieżki posuwania się w głąb kończą się dość szybko (pojmowanie nie jest wyraźne), to istnieją takie drogi, którymi można posuwać się w nieskończoność (jasne i wyraźne pojmowanie). Te nieskończone drogi dają możliwość dotarcia do całego wszechświata i zdobycia wiedzy o nim. W człowieku, jako istocie zdolnej do refleksji, spotykają się dwie nieskończoności – nieskończoność głębi i nieskończoność całości. Z tej sytuacji pierwotnej wyłania się następujący fakt filozoficzny: pojęciom, które umysł przenika aż do końca, można przypisać pewne symbole i wykonując na nich formalne operacje dojść stopniowo do pełnej wiedzy o świecie. Stosowane prawa rozumowania są zarazem prawami działania świata, czyli elementami harmonii wprzód ustanowionej.

#### **8. Kant i zrozumienie konieczności uzupełnienia zbioru przedmiotów doświadczenia o czyste idee rozumu, w celu otrzymania niesprzecznej wiedzy o świecie**

Jak wiadomo, zasadniczą rolę w poznaniu u Kanta pełnią kategorie intelektu. Kategorie te nie pochodzą z doświadczenia, są natury apriorycznej, jednak wszelkie przedmioty doświadczenia powstają jako wypełnienie tych kategorii nieuporządkowaną uprzednio masą wrażeń zmysłowych. W umyśle ludzkim tkwią również idee, których pochodzenia nie można uzasadnić ani na podstawie doświadczenia, ani przy pomocy czysto apriorycznego rozumowania. Są to tzw. idee regulatywne rozumu, do których należą: dusza, wszechświat i Bóg. Kategorie intelektu są elementem doświadczenia, natomiast idee regulatywne nie dają się wcielić w doświadczenie. Wszelka próba zastosowania ich do doświadczenia prowadzi do paralogizmów i antynomii. I żadnej szczegółowej wiedzy o tych ideach mieć nie możemy, oprócz tej, że istnieją. Zobaczmy, co o idei duszy pisze Kant:

„Jest oczywiste, że jeśli chcemy sobie przedstawić istotę myślącą, musimy się sami na jej miejscu postawić, a więc podsunąć na miejsce przedmiotu, który się chce badać, swój własny podmiot (co nie zachodzi w innego rodzaju dociekaniach), i że tylko dlatego domagamy się absolutnej jedności podmiotu dla pewnej myśli, ponieważ inaczej nie można by powiedzieć: Myślę (to, co różnorodne w jednym przedstawieniu). (...) Lecz niezłożoność mnie samego (jako duszy) rzeczywiście nie jest wywnioskowana ze zdania ‘Myślę’, ale leży sama w każdej myśli. Zdanie ‘Jestem prosty’ trzeba uważać za bezpośredni wyraz apercepcji, podobno, jak rzekomy kartezjański wniosek *cogito ergo sum* jest w rzeczywistości tautologiczny, gdyż *cogito (sum cogitans)* bezpośrednio



orzeka rzeczywistość o moim Ja. (...) Tyle jest pewne, że przez 'Ja' myślę sobie zawsze absolutną, lecz logiczną jedność podmiotu (jego niezłożoność), ale nie to, że przez to poznaję rzeczywistą niezłożoność tego podmiotu"<sup>8</sup>.

Idea duszy, nie poznawana, a jednak tworzona przez rozum, jest konieczna do syntezy postrzeżeń wewnętrznych, tak jak idea wszechświata scala doświadczenia zewnętrzne, a idea Boga wszelkie możliwe doświadczenia.. Absolutna jedność „Ja” jest niezbywalnym elementem każdej myśli, stanowi rację dla zdania „Myślę”. Rozum nie może zadowolić się żadnym uwarunkowaniem, przedstawia sobie przedmioty doświadczenia rozciągające się we wzajemnym uwarunkowaniu tak daleko, że już żadne doświadczenie nie może ich objąć – na granicy doświadczenia szuka więc i znajduje noumeny (rzeczy same w sobie), które dopełniają i uzupełniają ten niekończący się szereg przedmiotów. Bez noumenów przedmioty doświadczone są dla nas często niezrozumiałe; w przypadku noumenów, poprzez które patrzymy na doświadczane przedmioty, mamy do czynienia z pojęciami mającymi wyłącznie swe źródło w rozumie – muszą więc być one zrozumiałe.

Odkrycie idei transcendentálnych (prowadzących wprost do sfery noumenów) znajdujących się w rozumie, które są poza doświadczeniem (nie pochodzą z doświadczenia, ani nie stosują się do niego), a jednak są potrzebne do tego, aby zamknąć nie kończący się łańcuch uwarunkowań przedmiotów doświadczenia i usunąć antynomie rodzące się w ramach doświadczenia, stanowi przeżycie kantowskiej sytuacji pierwotnej. Fakt filozoficzny, który z niej powstaje, to zrozumienie konieczności uzupełniania zbioru przedmiotów doświadczenia o idee będące wyłącznie wytworem czystego umysłu (i nie stosujące się do doświadczenia), aby ten zbiór nie generował antynomii i sprzeczności. Cechą istotną tych idei jest ich „niezłożoność” i „całościowość” (poznawcza, niekoniecznie ontologiczna – nie można ich poznać bardziej i głębiej, są dane w bezpośredniej i pełnej apercpcji).

## 9. Popper i odkrycie autonomicznej i obiektywnej wiedzy jako elementu istoty człowieka

Nauka, jako próba racjonalnego uporządkowania i opisu świata oraz jako dowód na możliwość wiedzy pewnej, od początku dziejów filozofii stała się kluczowym zagadnieniem filozoficznym. Czy w ogóle możliwa jest nauka? Jeśli tak, to jak daleko ma sięgać to racjonalne porządkowanie, jaki jest zakres pewności.

W pewnych okresach rozwoju nauki, gdy przyjęte kanony naukowości zdawały się przyjmować raz na zawsze ustaloną pozycję, rozpoczynał się pozornie niepoważny i niegroźny atak filozoficzny na pojęcia leżące u podstaw nauki. Taka sytuacja miała miejsce w starożytności, gdy eleaci i megarejczycy pokazywali, przy pomocy swoich słynnych paradoksów, sprzeczności wynika-

jące z używania takich pojęć jak wielkość, wielość, ruch. Podobnie było w XVII wieku, w przypadku krytyki przeprowadzonej przez Berkeley'a i Hume'a. Również wiek dwudziesty wydał filozofów, którzy wystąpili z ostrą krytyką nauki współczesnej – można zaliczyć do nich, między innymi: Bergsona, Husserla, Rosenzweiga. Możliwe są dwie postawy wobec krytycznych analiz filozoficznych: albo zbagatelizować uwagi laików, albo postarać się zrozumieć, o co chodzi tym wiecznie niezadowolonym ignorantom. Ta pierwsza postawa prowadziła i chyba musi prowadzić, z powodów przynajmniej socjologicznych, do hamowania rozwoju nauki – zaczyna po prostu brakować propagandy filozoficznej przyciągającej w obszar nauki, niezbędnych dla jej rozwoju „szaleńców”, podejmujących zdawałoby się beznadziejne wyzwania.

W tę dyskusję, która miała szczególnie burzliwy przebieg w pierwszych dziesięcioleciach XX wieku, włącza się Karl Popper broniąc wartości nauki i jej znaczenia dla obrony racjonalności i sensu życia ludzkiego. Sądzi on, że tak jak miód jest naturalnym wytworem pszczół, a sieć pajaków, tak nauka jest naturalnym wytworem gatunku ludzkiego. Wytwór ten w sposób istotny przekracza człowieka dając mu nowe i znacznie większe możliwości, sprawia, że człowiek transcenduje świat materialny i w znacznej mierze uniezależnia się od niego. Chodzi jednak nie o naukę w sensie subiektywnym, składającą się ze stanów umysłu lub świadomości czy z dyspozycji do działania, lecz o naukę w sensie obiektywnym, jako zbiór sytuacji problemowych, teorii i argumentów (jest to tzw. trzeci świat Poppera, w odróżnieniu od pierwszego świata rzeczy materialnych i drugiego przeżyć i stanów świadomości).

Według Poppera „epistemologia obiektywistyczna, badająca świat trzeci, rzuca ogromnie dużo światła na drugi świat subiektywnej świadomości, zwłaszcza na subiektywne procesy myślowe uczonych; ale teza odwrotna nie jest prawdziwa”<sup>9</sup>. Dużo ważniejsze jest badanie wytworów niż badanie wytwarzania. Przy badaniu wytworów odchodzimy od analizy przyczynowej charakterystycznej dla podejścia subiektywnego – zamiast od przyczyn, wychodzimy od skutków. Tym samym, nauka jako wytwór człowieka, ma wartość sama w sobie, jest istotnie autonomicznym światem. Elementy tego świata nie muszą być rozumiane czy uświadamiane przez człowieka, aby istnieć. Świat ten oddziałuje na człowieka i zmienia go, zmusza do zajęcia stanowiska wobec swoistych problemów i wprowadzania do tego świata nowych wynalazków i konstrukcji.

Sytuacja graniczna Poppera, to doświadczenie nauki jako rzeczywistości autonomicznej i obiektywnej przekraczającej możliwości człowieka, a jednak będącej jego wytworem. Człowiek może wprowadzać do świata nauki swoje idee, lecz nie może zakłócić jego racjonalności i obiektywności. To ten świat wiedzy obiektywnej oddziałuje na człowieka i zmienia jego istotę sprawiając, że staje się on jednostką racjonalną i w konsekwencji jakby bardziej realną, pełniej istniejącą. To jest właśnie fakt filozoficzny będący owocem sytuacji pierwotnej doświadczanej przez Poppera.

## 10. Koncepcja prawdy Heideggera

Dla Heideggera na klasycznym pojęciu prawdy wspiera się rozumienie bytu i bycia<sup>10</sup>. To właśnie Arystoteles zwrócił uwagę na to, że miejscem prawdy jest wypowiedź, a jej istota polega na zgodności sądu z jego przedmiotem. Wszelkie wyobrażenia uzyskują status prawdziwych poprzez dopasowywanie się do rzeczy. Co jednak ta relacja (stosunek) między tym, co jest w umyśle, a tym, co jest w rzeczywistości, zakłada? Co to jest w ogóle zgodność (*adaequatio*) intelektu i rzeczy (*intellectus et rei*)? Ze względu na co zgadzają się *intellectus* i *res*. Nie może to być równość, gdyż mamy tu do czynienia z zasadniczo odmiennymi bytami. Stosunek podobieństwa wydaje się znów zbyt słaby – przecież poznanie winno oddawać rzecz taką jaka jest, a nie tylko w pewnej analogii czy przybliżeniu.

W celu zrozumienia tej kwestii trzeba wejść w kontekst bycia całości tego stosunku, w którym mamy do czynienia ze związkiem między idealną treścią sądu a realną rzeczą, do której ten sąd się odnosi. Czy jest możliwe ujęcie ontologiczne tak odmiennych sposobów bytowania – bytu idealnego oraz realnie istniejącej rzeczy – w jedną całość?

W celu uchwyceniu ontologicznego sensu *adaequatio* należy rozjaśnić sposób bycia samego poznawania, a więc w konsekwencji ma zostać uchwycony fenomen prawdy jako pełnej charakterystyki poznania. Wypowiadanie jest byciem ku samej bytującej rzeczy. To sam byt zostaje w wypowiedzi prawdziwej domniemany, ukazany i odkryty. I sam byt wystarczy, aby w pełni określić to odniesienie, to on sam pokazuje się tak jak w sobie samym jest, „zgadza się” na to, że jest taki jak ukazała go wypowiedź. W problemie prawdy chodzi o to, że byt odsłania się, pokazuje się w swej tożsamości. Prawdziwa wypowiedź jest dowodem na to, że *bycie* bytu może być *byciem-odkrytym*. Prawdziwa wypowiedź odkrywa byt sam w sobie, a nie chodzi w niej o wykazanie zgodności czegoś psychicznego z czymś fizycznym. Bycie prawdziwym oznacza to samo, co bycie odkrywczym, jest odkrytością bytu.

Wypowiadanie sądu, który niesie w sobie prawdziwość, wiąże się z odpowiedzialnością za byt. Wypowiedź prawdziwa odkrywa byt, wydobywa z niego prawdę, nieomal wyrwa ją z niego – a był on przecież pierwotnie zakryty, bo nie dopuszczał żadnej relacji z wyobrażeniami umysłu. Otwartość i skrytość bytu są więc w równej mierze obecne na początku procesu poznawczego. Wypowiedź nie może być więc miejscem prawdy – wypowiedź jest „bezsilna”, jeśli sam byt nie pojawi się w swej otwartości. To pierwotna prawda bytu jest miejscem wypowiedzi i warunkiem jej prawdziwości. Jednak to podmiot poznający (*Dasein*) odkrywa prawdę, prawda jest sposobem bycia *Dasein*. A więc prawda istnieje o tyle, o ile istnieje *Dasein*, bo tylko wtedy mają sens takie pojęcia jak otwartość czy odkrytość. To zrelatywizowanie prawdy do bycia *Dasein* nie subiektywizuje prawdy, gdyż odkrywanie prawdy bycia jest postawieniem wobec samego bytu, który ukazuje się taki jaki jest i nie dopuszcza

dowolności uznania przez podmiot – Dasein może prawdę zniszczyć, ale nie jest w stanie jej zmienić, wymyślić.

Sytuacja pierwotna filozofii Heideggera, to staniecie wobec problemu wzajemnej relacji między prawdą i wypowiedzią oraz dostrzeżenie trudności związanych z opisem tej relacji. I z tych refleksji wyłania się następujący fakt filozoficzny: prawda, jako odkrytość bytu, będąca zarazem sposobem bycia *Dasein*, jest miejscem wypowiedzi. Żadna wypowiedź nie może „pomieścić” prawdy (wypowiedź nie jest miejscem prawdy), gdyż wypowiadanie prawdziwego sądu jest staniem wobec samego bytu, który odsłania się i ukazuje się taki jaki jest w swej tożsamości. Odrzucając otwartość, *Dasein* odrzuca możliwość wypowiedzenia prawdziwego sądu.

### 11. Fakty filozoficzne i absolut poznawczy

Opisane powyżej sytuacje pierwotne tworzą już znaczący świat faktów filozoficznych mogących stanowić podstawę filozoficzną i właściwy klimat dalszych analiz. Każdy z nich wskazuje na związany z nim, i charakterystyczny dla niego, absolut poznawczy. Ponieważ dzięki niemu rozpoczyna się proces poznawania oraz możliwa jest wszelka wiedza, dzieje nauki są historią rozbudowy i ewolucji absolutu poznawczego. Pełniejsze zrozumienie jego działania jest możliwe w momencie ukazania jak przy jego pomocy rodzą się nowe pojęcia, struktury, teorie. Dlatego w tym paragrafie rozpoczniemy od zarysowania absolutu poznawczego związanego z Sokratejskim faktem filozoficznym. Przy okazji analiz historycznych, przedstawionych w dalszej części pracy, będzie możliwe pokazanie kolejnych absolutów poznawczych oraz wskazanie ich roli i miejsca w strukturze nauki. Dopiero w interakcji z rozwijającymi się naukami absoluty poznawcze ukazują swoją wartość i istotę. W tym miejscu można tylko powiedzieć, że nauka rozwijając się, staje się coraz bardziej abstrakcyjna i pozornie oddala się od rzeczywistości – absolut poznawczy zastępuje ten pierwotny, naturalny kontakt, jest pomostem między realnością i racjonalnością, między tym, co obiektywne, a tym, co subiektywne i w końcu między tym, co zewnętrzne, a tym, co wewnętrzne.

Następujące fakty filozoficzne będą stanowiły więc punkty odniesienia i filozoficzny aparat wyjaśniający dla analizowanych przeze mnie faktów historycznych.

**FF1.** *Odsłonięcie racjonalnej struktury bytu poprzez demaskowanie fałszywych mniemań i pozorów wiedzy. Dzieje się to przy pomocy metody oczyszczania i rodzenia pojęć.*

**FF2.** *Wiedza przybliżająca do prawdy ma strukturę cyrkularną, a nie liniową. Prawda dana jest już na początku, lecz umysł ludzki nie jest w stanie od razu ujrzeć jej w pełnym świetle.*



**FF3.** Tylko poprzez wejście w bezpośrednią relację z rzeczywistością myśl uzyskuje podstawę swojego istnienia oraz ostateczny argument za swoimi możliwościami i siłami poznawczymi – jest to prawda jako bezpośrednia relacja styczności z rzeczami.

**FF4.** W celu uwolnienia się od sprzeczności przy poznawaniu rzeczywistości, należy posługiwać się „minimalnymi” symbolami tzn. takimi, które są już abstrakcyjne, lecz zachowują zarazem minimum treści związanej z opisywaną rzeczywistością. Pojęcia matematyczne są przykładem takich minimalnych symboli.

**FF5.** Odnalezienie w sobie przez cogito idei nieskończonego i w pełni doskonałego bytu, rzeczywiście istniejącego poza cogito. Samo cogito staje się podstawą i „generatorem” obiektywnej wiedzy o realnie istniejącym świecie.

**FF6.** Ponieważ w człowieku spotykają się dwie nieskończoności: głębi oraz całości, więc pojęciom, które są całkowicie przejrzyste dla umysłu można przypisać pewne symbole i poprzez formalne operacje na nich dojść do pełnej wiedzy o świecie.

**FF7.** Konieczność uzupełnienia zbioru przedmiotów doświadczenia o idee będące wyłącznie wytworem czystego rozumu, w celu uniknięcia sprzeczności. Te idee są dane w bezpośredniej i pełnej apercepcji.

**FF8.** Świat wiedzy obiektywnej i autonomicznej oddziałuje na człowieka i zmienia jego istotę – staje się on jednostką racjonalną i w pełni istniejącą.

**FF9.** Wypowiedź prawdziwa jest efektem wypowiedzania jako bycia ku samej bytującej rzeczy. To bycie wypowiedzania jest odkrywaniem i ukazywaniem tego bytu, ku któremu wypowiedzanie jest skierowane. Byt ten pokazuje się w tożsamości i w pełnej realności, gdyż prawda jest odkrytością bytu.

Przyjrzyjmy się teraz, na przykładzie Sokratejskiego faktu filozoficznego, czym jest, związany z faktem filozoficznym, absolut poznawczy.

Kiedy Sokrates analizuje słowa wyroczni, to zauważa, że jest w posiadaniu „czegoś”, co sprawia, że może przechodzić od myśli do rzeczywistości i na odwrót. Sokrates dostrzega brak wiedzy na określone tematy u swoich rozmówców i jest w stanie to udowodnić. Dowodzi tym samym, że posiada umiejętność wykazywania fałszu i pozornej wiedzy. Rozmówcy Sokratesa nie byli w stanie zrobić tego samego. Dlaczego?

Gdyż w Sokratesie istniała zgodność między stanem faktycznym a myśleniem o tym stanie – nie posiadał wiedzy na pewne tematy, lecz również nie

myślał, że ją posiada. Natomiast jego rozmówcy myśleli, że posiadają pewną wiedzę, a jej nie mieli.

Wykazał Sokrates w konsekwencji, że w pewnych sytuacjach możliwe jest uzyskanie zgodności między myślą a rzeczywistością. Sposób prowadzenia rozmowy pokazał, co jest odpowiedzialne za możliwość uzyskania tej zgodności. Rozmowa nie kończyła się jedynie wykazaniem niewiedzy rozmówcy, lecz wiązała się z uzyskaniem rozumienia pojęć takich jak mądrość, dobro, sprawiedliwość itp. Te pojęcia były uchwyceniem i utrwaleniem tego, co najważniejsze w rzeczywistości. Miała rację wyrocznia mówiąc, że Sokrates jest najmądrzejszy, że ma coś, czego inni ludzie nie mają – to „coś” było odpowiedzialne za zgodność myśli z rzeczywistością, za utrwalanie istoty rzeczywistości w pojęciach, był to właśnie absolut poznawczy będący źródłem i początkiem wiedzy.

Absolut poznawczy odkryty przez Sokratesa chyba najpełniej jest wykorzystywany w matematyce. To właśnie refleksja filozoficzna wyłaniająca się z obszaru matematyki podjęła najbardziej fundamentalne zagadnienia teoriopoznawcze i ontologiczne. Rozstrzygnięcia dokonywane w matematyce miały znaczący wpływ na kierunek i rodzaj rozpatrywanych zagadnień w filozofii. Już na początku rozwoju myśli europejskiej wielu filozofów doszło do wniosku, że prawdy matematyki mają najwyższy stopień pewności spośród wszystkich prawd odkrywanych przez człowieka. Wyłonił się zasadniczy problem sprzeczności między jasnością i jednoznacznością prawd matematyki a charakterem rzeczywistości, do której te prawdy się odnoszą. Próżne są poszukiwania w świecie ludzkiego doświadczenia bytów odpowiadających wprost tym opisywanym przez matematykę. Przyjmujemy jako oczywistą w matematyce prawdę, że dwa różne punkty wyznaczają dokładnie jedną linię prostą; jednak nigdzie w rzeczywistości nie możemy odnaleźć realizacji tej prawdy<sup>11</sup>. Jak pogodzić tę sprzeczność – sprzeczność między skutecznością matematyki a brakiem tych struktur w obszarach rzeczywistości zmysłowej?

Już wielkie systemy i koncepcje starożytnej filozofii próbowały ten dyalemat rozwiązać. W przypadku filozoficznych refleksji pitagorejczyków i Platona, te próby zaowocowały stworzeniem idei matematyki jako nauki uniwersalnej<sup>12</sup> (*mathesis universalis*). Miała być ona źródłem wszelkiej prawdziwej wiedzy i podstawą innych nauk – tylko matematyka wyznaczała zakres oraz treść tego, co realne i rzeczywiste. Opozycyjna wobec takiego rozumienia matematyki była koncepcja Arystotelesa, który poprzez podział kompetencji i zadań poszczególnych nauk rozwiązywał problem ukazanej wcześniej sprzeczności. Nawiązaniem do idei *mathesis universalis* była metoda opracowana przez Archimedesesa. Różniła się ona jednak od koncepcji zarówno pitagorejczyków jak i platończyków, i w sposób kompetentny przeciwstawiała się „podziałowi ról” zaproponowanemu przez Arystotelesa.

## 12. Miejsce matematyki w strukturze wiedzy u Arystotelesa

Wielkie systemy filozoficzne starożytnej Grecji, jako jedno ze swoich głównych zadań, podjęły się analizy znaczenia matematyki dla całego systemu wiedzy. Przeważnie efektem tych badań było uznanie fundamentalnej roli matematyki, bez której żadna prawdziwa wiedza nie jest możliwa. Jak zauważyli A. Koyre i O. Pedersen<sup>13</sup>, w matematyce greckiej można wyróżnić cztery nurty. Rozróżnienie między nimi opiera się na innym rozumieniu istoty matematyki, jej metod badawczych oraz miejsca w strukturze wiedzy. Są to nurty: pitagorejski, platoński, arystotelesowski i archimedejski. Brak jest jednak u tych historyków nauki wyraźnego rozróżnienia między nurtem pitagorejskim a platońskim – to rozróżnienie jest istotne dla analiz zawartych w tej pracy. Myślę, że koncepcja Arystotelesa zasadniczo odróżnia się od pozostałych i nie pozwala traktować matematyki jako nauki uniwersalnej mającej swój udział w każdym obszarze rzeczywistości. Pozostałe natomiast nurty tę uniwersalną rolę matematyki widziały i promowały.

Miejsce i rola matematyki w strukturze wiedzy wiązały się u Arystotelesa z wprowadzoną przez niego klasyfikacją nauk<sup>14</sup>. Podzielił on nauki na teoretyczne, praktyczne i wytwórcze. Matematyka znalazła się wśród nauk teoretycznych obejmujących, poza nią, fizykę i metafizykę. Wszystkie nauki teoretyczne zajmują się tym, co nie może być inne niż jest. Do zakresu badań matematyki nie należą żadne przedmioty same w sobie, lecz jedynie przedmioty ze względu na liczbę i kształt. Matematyka jest nauką o ilości i formach geometrycznych. To, co bada (czyli liczba i formy geometryczne) jest ściśle związane z materią, w której tkwi, chociaż jest nieruchome. To odróżnia ją z jednej strony od fizyki, która zajmuje się przedmiotami materialnymi zdolnymi do ruchu, a z drugiej strony od metafizyki, której przedmioty badań są nieruchome i całkowicie oddzielone od materii – jest umieszczona pomiędzy fizyką i metafizyką, jeśli chodzi o zakres badań.

W ramach przeprowadzonej przez Arystotelesa klasyfikacji można traktować matematykę jako łącznik między wiedzą maksymalnie ogólną dotyczącą bytu jako bytu, a wiedzą dotyczącą konkretnych przedmiotów świata materialnego. W żadnym przypadku nie można traktować tworów matematycznych jako istniejących oddzielnie (niezależnie od ciał zmysłowych). „Gdyby bowiem obok ciał zmysłowych istniały inne ciała stałe oddzielne od nich i wcześniejsze, to oczywiście musiałyby istnieć także inne i oddzielne powierzchnie, punkty i linie, bo wymaga tego konsekwencja. Gdyby zaś istniały, to znowu obok powierzchni, linii i punktów matematycznych ciał stałych, musiałyby istnieć inne, oddzielne. (...) To nagromadzenie staje się jednak absurdalne; powstaje bowiem rodzaj ciał stałych poza ciałami zmysłowymi, mianowicie powierzchnie istniejące niezależnie od zmysłowych, powierzchnie brył geometrycznych i powierzchnie samoistne poza powierzchniami tych ciał stałych. Następnie cztery rodzaje linii i pięć rodzajów punktów. Którymi z nich ma zajmować się matematyka?”<sup>15</sup>.

Twory matematyczne mają również walor abstrakcyjnego istnienia. Mają związek z rzeczami zmysłowymi, podczas analiz są jednak traktowane jako oddzielone od nich. Badania matematyczne polegają na analizie atrybutów obiektów matematycznych jako takich, bez odnoszenia ich do przedmiotów zmysłowych. Jeśli nawet takie odniesienie się pojawia, to ma ono wyłącznie charakter teoretyczny. „Każde zagadnienie można najlepiej zbadać w ten sposób, jeżeli to, co nieodłączalne, przyjmie się jako odłączalne, tak jak to czyni arytmetyk i geometra. Na przykład, człowiek jako człowiek jest rzeczą jedną i niepodzielną; arytmetyk przyjął jakąś niepodzielną jedność i bada następnie, czy jakieś cechy przysługują człowiekowi jako jedności niepodzielnej. Natomiast geometra bada go nie jako człowieka ani jako jedność niepodzielną, lecz jako ciało przestrzenne. Bo właściwości, które by mu mogły przysługiwać, nawet gdyby przypadkiem nie był jednością niepodzielną, mogłyby mu oczywiście przysługiwać, niezależnie od tych atrybutów. Geometry zatem twierdzą słusznie; mówią bowiem o rzeczach istniejących i przedmioty ich badań istnieją; byt istnieje bowiem w dwóch postaciach: byt w rzeczywistości (jako entelechia) i jako materialny (tzn. potencjalnie)”<sup>16</sup>.

Nauki matematyczne mówią w konsekwencji wiele o takich ogólnych i abstrakcyjnych pojęciach jak dobro czy piękno. „Głównymi formami piękna jest porządek, symetria i wyrazistość, czym odznaczają się szczególnie nauki matematyczne”<sup>17</sup>.

Mimo tak silnego związku zarówno z rzeczami zmysłowymi jak i pojęciami ogólnymi będącymi najpełniejszymi atrybutami bytu, badania matematyczne nie są podstawą badań fizyki czy metafizyki. Wszystkie te badania odbywają się niezależnie od siebie posługując się własnymi, specyficznymi metodami. Ponieważ ustalenie zakresu badań poszczególnych nauk oparte jest na sztywnym podziale bytu na różne kategorie (ruchome i nieruchome, oddzielone i nieoddzielone), więc niemożliwe staje się ich wzajemne pełniejsze przenikanie.

Dużo większą rangę posiada matematyka w pozostałych nurtach: pitagorejskim, platońskim i archimedejskim.

### 13. Platońska koncepcja matematyki jako nauki uniwersalnej

Wszystkie rzeczy istnieją poprzez uczestniczenie w niezmiennych ideach. Matematyka jest czymś pośrednim między światem Idei a światem zmysłowym – jej przedmioty są wieczne i niezienne, jednak w odróżnieniu od Idei, które charakteryzują się jednością (Idea jest zawsze jedna), mogą występować w wielu podobnych egzemplarzach. Zasadami idei są „Duże” (το μεγάλα) i „Małe” (το μικρά) oraz „Jedność” (τὸ ἐν) określająca ich istotę. Przez uczestniczenie w Jedności idei z Dużego i Małego powstają liczby<sup>18</sup>. Dla Platona liczby istnieją niezależnie od świata zmysłowego, w odróżnieniu od pitagorejczyków, dla których były elementami tego świata. Ponadto elementem konstytutywnym (materia czy substratem) liczb i pierwszą ich zasadą była nie jed-



ność, lecz Dyada (nieokreślone 2). Pewne przeciwstawne sobie zasady nie mają przyczyny w jedności, jak u pitagorejczyków, lecz każda z nich ma osobną przyczynę. Metody matematyki mają za zadanie łączyć te przeciwstawne zasady w jedno.

Na przykładzie opisu konstrukcji świata przedstawionego przez Platona zobaczymy jak działa ta metoda. Opis ten rozpoczyna się od podania trzech fundamentalnych założeń:

1. Istnieje coś, co zawsze trwa, niezmiennie i identyczne, i nie zna narodzin. Tylko intelekt może tę rzecz pojąć za pomocą rozumowania.

2. „Istnieje” coś, co ciągle się rodzi i nigdy nie istnieje realnie. Ta rzecz jest wyłącznie przedmiotem mniemania osiąganego przy pomocy poznania zmysłowego.

3. Wszystko co się rodzi, rodzi się z konieczności pod wpływem jakiejś przyczyny.

Przyczyną powstania świata jest dobroć jego budowniczego – Demiurga, który pragnął, aby wszystko miało udział w doskonałości, harmonii i jedności. I dlatego konstruuje świat z bezkształtnej i nieokreślonej materii (a więc z tego, co ciągle się rodzi i nie istnieje realnie), mając za wzór istniejący odwiecznie i samoistnie świat idei (a więc to, co jest niezmiennie i doskonałe). Przede wszystkim wykorzystał całkowicie dostępny mu materiał, a tym samym sprawił, że świat jako całość nie podlega żadnej „twórczej” zmianie (bo wszystko, w co mógłby się zmienić, zostało wykorzystane), jest więc rzeczywiście kopią świata idei.

Ponadto, siłą łączącą elementy użyte do konstrukcji stała się proporcja matematyczna. W ramach tego pojęcia, jak pokazałem w poprzednim rozdziale (paragraf 6), pojawiła się teoria Eudoksosa, przywracająca jedność, rozdartej przez odkrycie odcinków niewspółmiernych, matematyce. Tylko dzięki metodom matematyki możliwa jest, według Platona, pełna jedność między, z natury odrębnymi, rzeczami.

Świat charakteryzują więc dwie podstawowe cechy:

1. Zupełność – wszystko co istnieje, w jakiś sposób znajduje się w świecie.
2. Matematyczność – tylko idee matematyczne pozwalają osiągnąć prawdziwą jedność tworzonych struktur.

Ponadto, istnieją dwa rodzaje procesów, którym podlega świat jako całość:

1. „Świat dostarcza sobie pokarmu za pomocą destrukcji samego siebie”<sup>19</sup>. To znaczy, że energia potrzebna do funkcjonowania świata jest uzyskiwana kosz-

tem pierwotnego porządku i harmonii. Mówiąc współczesnym językiem, entropia świata wzrasta wraz z każdą „czynnością wykonaną przez świat”. Potrzebny jest trzeci element świata, jakim są struktury matematyczne, aby przywracać jedność i harmonię.

2. Świat ma kształt kuli i obraca się jednostajnie bez przemieszczania się. Dokładniej wyjaśnia tę kwestię następująca metafora Platona: „A ponieważ do tego obrotu świat nie potrzebował wcale nóg, Bóg sprawił, że się urodził bez nóg i stóp”<sup>20</sup>. Znaczy to, że świat nie przemieszcza się w żadnej przestrzeni – sam wyczerpuje sobą całą możliwą przestrzeń. Spojrzenie na świat z zewnątrz, a więc budowa jego całościowej teorii, jest możliwa znów tylko poprzez ten trzeci element – struktury matematyczne.

Wróćmy do przedstawionego w paragrafie 6 rozdziału 2 opisu konstrukcji duszy świata. Ta konstrukcja, jak pamiętamy, składa się z dwóch etapów. W pierwszym, Demiurg tworzy narzędzie umożliwiające połączenie idei z materią. To narzędzie, to nowy rodzaj bytu, który powstaje za pomocą „mieszania” idei i materii – uczestniczy więc w ich naturze. Czym jest ta mieszanina? Jest to byt, który łączy inne byty w sposób formalny – zasada jedności jest zewnętrzna wobec istoty tych łączonych bytów. I dopiero w drugim etapie, mając w swoim ręku ten nowy byt, łączy Demiurg przemocą razem ze sobą te trzy substancje. Tym samym tworzy jedność tego, co niezmiennie i wieczne z tym, co ciągle rodzi się i ulega rozpadowi.

Dlaczego Demiurg nie połączył wprost „gwałtem” idei z materią? Widocznie żadną siłą nie dało się tego osiągnąć bez tej dodatkowej trzeciej substancji? Ta nowa substancja łączy w sposób „formalny” własności obu wcześniejszych substancji – „jest podzielona i zjednoczona według proporcji, porusza samą siebie wokół siebie samej”<sup>21</sup>. Możemy więc, przy pomocy formalnych, matematycznych operacji, zyskać jedność z natury przeciwstawnych sobie bytów i, jak wynika z rozważań Platona, tylko metoda „matematyczna” daje możliwość uzyskania tej jedności. A ponieważ tę jedność, jak pisze Platon, można uzyskać dopiero przemocą, więc nie wynika ona z istoty łączonych substancji, lecz jest efektem zewnętrznego działania (procesu). Teoria Eudoksosa (rozdział 2, paragraf 3) pokazuje jak, przy pomocy matematycznych metod, można ukazać jedność między dyskretną strukturą liczb naturalnych a wielkościami geometrycznymi, charakteryzującymi się ciągłością.

Również w definicjach Euklidesa kolejnych podstawowych figur geometrycznych widoczna jest ta idea. W Księdze I (oraz w XI) czytamy:

1. Punktem jest to, co nie ma części.
2. Linią jest długość bez szerokości.
3. Krańcem linii są punkty.
4. Powierzchnią jest to, co ma tylko długość i szerokość.
5. Krańcami powierzchni są linie.

6. Bryła jest to, co ma długość, szerokość i głębokość.

7. Krańcem bryły jest powierzchnia.

Wszystkie te figury geometryczne, rozpatrywane osobno, charakteryzują się jakimś brakiem czy niepełnością. Nawet bryła, która posiada wszystkie trzy wymiary musi być określona przez innego rodzaju byt jakim jest powierzchnia, aby dało się uchwycić jej sens geometryczny. Trzeba więc budować teorię, która połączy te byty istotnie różniące się od siebie – jest to wzajemne wykorzystanie cech poszczególnych obiektów geometrycznych w celu ich uniesprzecznienia (wtedy dopiero możliwe stanie się uchwycenie i zrozumienie rozciągłości<sup>22</sup>). Dopiero budowana geometria (konstruowane aksjomaty, dowodzone twierdzenia) pokażą możliwość wspólnego ujęcia dyskretnych punktów i charakteryzujących się różnym stopniem rozciągłości linii, powierzchni i brył.

W *Topikach* Arystoteles<sup>23</sup> krytykuje ten „negatywny sposób” rozumienia rozciągłości. Uważa, że istotne jest posiadanie przez poszczególne byty różnego rodzaju rozciągłości: linia jest rozciągała tylko na jeden sposób, płaszczyzna na dwa, a bryła realizuje trzy sposoby rozciągłości. Poprzez wprowadzenie trzech rodzajów rozciągłości unika operowania pojęciem „braku” – jednak w przypadku metody platońskiej budowy wiedzy ten „brak” wymusza uwzględnienie innych bytów, innych obszarów rzeczywistości, w celu rozwoju niesprzecznej i pełnej teorii. U Euklidesa mamy bowiem jedną rozciągłość (a nie kilka jak u Arystotelesa) realizowaną w różnym stopniu w przypadku różnych bytów.

#### 14. Pitagorejska koncepcja matematyki jako nauki uniwersalnej

Świat, według pitagorejczyków, jest przepełniony strukturami matematycznymi, a właściwie wszystkie jego elementy i struktury odpowiadają pewnym obiektom matematycznym. Między światem a matematyką istnieje ścisły izomorfizm. Substratem i przyczyną wszystkich rzeczy jest jedność. Te elementy świata, które cechują się jednością i harmonią, należy wydobyć i przypisać im odpowiadające im struktury matematyczne<sup>24</sup>. Metoda stosowana przez pitagorejczyków w matematyce prowadziła do rozbicia tej pierwotnej jedności na dwa przeciwstawne byty. W miarę rozwoju matematyki liczba przeciwstawnych bytów zwiększa się i nie jest sprawą matematyki dążenie do przywracania jedności. Ta jedność jest dana na początku i można ją dostrzec poprzez bezpośredni ogląd i analizę rzeczywistości.

Charakterystycznym przykładem pochodzącym ze szkoły pitagorejskiej jest złoty podział odcinka. Wyraża się on następującą proporcją: stosunek długości odcinka do długości części większej podziału jest równy stosunkowi długości części większej do mniejszej. Zgodnie z metodą pitagorejską, temu podziałowi muszą odpowiadać w przyrodzie pewne obiekty. Odnajdywanie reali-

zacji tego podziału w przyrodzie stanowi potwierdzenie słuszności tej metody – jest to patrzenie na świat poprzez harmonię występującą między liczbami. Jeśli pewna liczba ma szczególnie ciekawe własności, a jakiś stosunek liczbowy cechuje się pięknem i harmonią, to wówczas ta liczba czy ten stosunek ujmuje istotę jakiegoś obiektu ze świata zmysłowego.

Zawartość rzeczywistości pokrywa się dokładnie, w metodzie pitagorejczyków, z zawartością arytmetyki jako nauki o liczbach i proporcjach między nimi. Dlatego nie może istnieć żadne zjawisko (czy struktura), któremu nie dałoby się przypisać jakiegoś stosunku liczbowego. I tak, pojawienie się w geometrii odcinków niewymiernych (a więc nie dających się wyrazić przy pomocy proporcji liczbowych) uderzało, zgodnie z metodą pitagorską, w sens uprawiania geometrii chyba, że przyjmie się, iż podstawą matematyki, a więc i całej rzeczywistości, jest nie arytmetyka, lecz np. geometria. Zauważmy, że właśnie tą drogą poszli później pitagorejczycy oraz inni matematycy greccy budując arytmetykę geometryczną (a nie jak wcześniej geometrię arytmetyczną)<sup>25</sup>. Co ciekawsze, późniejsi pitagorejczycy odeszli również od swojego pierwotnie budowanego monizmu i przyjęli, że istnieją dwie podstawowe zasady: Jedno oraz Nieokreślono *Dyada*, które wytwarzają wszystkie liczby<sup>26</sup>.

Co ponadto wynika z założenia, że zasady matematyki są zasadami wszystkich rzeczy? Ponieważ wśród zasad matematyki najważniejsze są zasady dotyczące liczb i ich własności, więc wszystkie rzeczy są wzorowane na liczbach, co więcej, elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy, wszystko co istnieje jest harmonią i liczbą. System liczb tworzy zamkniętą, spójną całość i jeśli poznawana rzeczywistość wydaje się posiadać pewne braki, to należy system świata uzupełnić zgodnie z harmonią i zasadami obowiązującymi wśród liczb. Postrzegana niedoskonałość świata jest efektem nie dostrzegania w nim struktur matematycznych. Przecież liczby są tworzywem świata oraz przysługują rzeczom zmysłowym jako własności, są więc wystarczające do tego, aby świat skonstruować jak i do tego, aby istniejący świat poznać i wyjaśnić oraz usprawiedliwić jego istnienie.

Podstawowymi elementami rzeczy są parzystość i nieparzystość tzn. w oparciu o te elementy możemy zrozumieć czym jest liczba oraz zobaczyć jak pojęcie liczby wyjaśnia znaczenie innych pojęć. Na przykład rozumienie pojęcia ograniczony pojawia się w procesie połowienia liczby nieparzystej, a w przypadku połowienia liczby parzystej otrzymujemy rozumienie pojęcia nieograniczony. Każda liczba wywodzi się z jedności, stąd liczba 1 jest zarazem parzysta jak i nieparzysta. Jedność zawiera w sobie przeciwstawne sobie pary pojęć, jak wspomniane ograniczone i nieograniczone, parzyste i nieparzyste, ponadto: kwadratowe i podłużne, jedność i wielość, prawe i lewe, męskie i żeńskie, spoczywające i poruszające się, proste i krzywe, jasne i ciemne, dobre i złe. Poszczególne elementy tych par odpowiadają sobie wzajemnie – na przykład to, co nieparzyste, odpowiada temu, co kwadratowe, bo  $1+3+...+(2n-1)=n^2$ , natomiast to, co parzyste temu, co podłużne, bo  $2+4+...+2n=n(n+1)$ <sup>27</sup>. Jedność



była dla pitagorejczyków substancją, o której są orzekane różne własności, a właściwie wszystkie.

Ważne dla pitagorejczyków było pokazanie jak przy pomocy liczb można otrzymać podstawowe figury geometryczne takie jak punkt, linia, płaszczyzna i bryła. Liczba 1 odpowiadała punktowi, 2 linii, 3 trójkątowi, natomiast 4 czworoscianowi. Ponieważ z liczby jeden są tworzone liczby pozostałe, więc również z punktów są utworzone linie, trójkąty i czworosciany. Pierwszym rodzajem (i zasadą) wielkości jest zatem punkt, drugim jest linia, trzecim powierzchnia a czwartym bryła. Obserwujemy ciągły wzrost wielkości geometrycznej przy przechodzeniu od punktu do linii, od linii do powierzchni i w końcu od powierzchni do bryły. Czym jest wobec tego wielkość geometryczna? Co decyduje o różnorodności wielkości geometrycznych? Kluczowe jest to, że punkt jest taką wielkością, która jest w stanie ograniczyć linię, linia znów ogranicza powierzchnię, a powierzchnia bryłę. Istnieje więc możliwość przejścia pomiędzy poszczególnymi wielkościami mimo, że te wielkości są całkowicie różne. Można wręcz określić kolejne wielkości przy pomocy tych mniejszych: linią nazywamy taką figurę, którą można ograniczyć przy pomocy punktu, powierzchnię przy pomocy linii, a bryłę przy pomocy powierzchni. W konsekwencji wszystko powstaje z jedności i przez nią jest określone<sup>28</sup>.

Przejście między punktem a linią, to przejście między dyskretnością a *continuum*, kolejne etapy to „zwiększanie rozciągłości” ciał aż dochodzimy do figury przestrzennej posiadającej maksymalną rozciągłość. Całość opiera się na pojęciu punktu (jedności) – istota rozciągłości mieści się więc w jedności i tak należy *continuum* rozumieć (linia jest jednością punktów, powierzchnia jednością linii a bryła jednością powierzchni).

W modelu pitagorejskim obiekty matematyczne mają wartość same w sobie – są wystarczające do budowy teorii, przy pomocy różnych metod dowodzenia, konstruowania itp. Te metody mają znaczenie drugorzędne, w odróżnieniu od modelu platońskiego, gdzie centralną rolę pełnią metody dowodzenia i konstrukcji kolejnych obiektów matematycznych. Tym samym w matematyce pitagorejskiej pojęcia pierwotne w pełni wyjaśniają sens definiowanych przez siebie bytów. Natomiast w metodzie platońskiej pojęcia pierwotne pozwalają „uchwycić” sens definiowanych bytów dopiero w połączeniu z wyprowadzanymi z tych definicji konsekwencjami, przy pomocy ustalonych metod dowodzenia.

Ponieważ matematyka cechuje się pierwotną jednością i wypełnia sobą całe możliwe istnienie, możemy ją badać i poznać poprzez bezpośredni ogląd jej struktur. Metody badawcze nie tworzą autonomicznej dziedziny, lecz są bezpośrednim i naturalnym efektem struktury rzeczywistości – pełnią więc rolę pomocniczą. Ich rola polega głównie na wyjaśnianiu, w oparciu o poznane struktury matematyczne, metafizycznych uwarunkowań bytu.

## 15. Metoda Archimedejska

W odróżnieniu od Platona czy pitagorejczyków, rozumowanie dedukcyjne oparte na pierwszych zasadach nie musi być dla Archimedesesa metodą odkrywania nowych twierdzeń. Ścisłe dowody dedukcyjne są natomiast potrzebne do włączenia danego twierdzenia w struktury matematyki. Do odkrywania twierdzeń stosuje Archimedes analogie między różnymi obszarami wiedzy. Bada pewne zagadnienia matematyczne przy pomocy praw mechaniki. Dowodzi np. w oparciu o słynne prawo dźwigni, że stosunek objętości kolejno wpisanych w siebie, stożka, kuli i walca wynosi 1:2:3. Uważa jednak, że o ile ten mechaniczny dowód daje wgląd w istotę problemu i rozjaśnia całe zagadnienie, to nie stanowi dowodu matematycznego<sup>29</sup>. W swoim słynnym traktacie „O metodzie” pisze, iż to dzięki metodzie mechanicznej pewne fakty stają się jasne, chociaż muszą być później udowodnione przy pomocy geometrii, a to dlatego, że wspomniana metoda nie jest w żadnym wypadku dowodem matematycznym. Służy ona do odkrywania twierdzeń, do zdobywania wiedzy o matematycznych problemach. Archimedes zauważa, że chociaż fakt ukazany przy pomocy metody mechanicznej nie jest udowodniony, to jednak to rozumowanie ukazało prawdziwość tego faktu.

Istnieją więc, według Archimedesesa, pewne rozumowania, które nie są dowodem, a mimo to ukazują, co jest prawdą. Jaki jest, wobec tego, związek między dowodem i prawdą? Jaki jest sens dowodzenia czegoś, czego prawda została już stwierdzona? Po ustaleniu danej prawdy potrzebny jest jeszcze dowód, czyli daje on coś „więcej” niż prawdę – umieszcza twierdzenie w strukturach matematyki (co wiąże się z ukazaniem całego bogactwa powiązań z innymi bytami matematycznymi); odkryty fakt staje się matematycznym twierdzeniem.

Pojawia się więc podział pracy matematycznej na dwa etapy:

1. Etap odkrywania i rozjaśniania twierdzenia;
2. Etap ścisłego dowodu dedukcyjnego odkrytego wcześniej faktu.

Ważne jest to, iż pierwszy, odkrywający etap, nie jest etapem dowolnych spekulacji i mętnych intuicji, lecz również podlega metodzie, wprawdzie nie ściśle matematycznej, jednak opierającej się na ustalonych rygorach i ścisłości. Stosując więc odpowiednie analogie możemy zasady i prawa jednej dziedziny wiedzy wykorzystywać do odkrywania prawd w innych obszarach. W celu uzyskania jednak ścisłego dowodu musimy na końcu oderwać się od wcześniej wykorzystanej analogii i metodami autonomicznymi, wewnętrznymi dla danej dziedziny, uzasadnić tę prawdę. Matematyka może więc wykorzystywać wyniki innych nauk (i sama być przez nie wykorzystywana), jednak ścisłe dowodzenie odkrytych faktów musi być dokonywane metodami charakterystycznymi dla danej teorii. U Archimedesesa mamy interesujące połączenie koncepcji platońskiej (dyada przy odkrywaniu nowych praw) i pitagorejskiej (jedność

leżąca u podstaw konstrukcji teorii). Metoda u Platona daje możliwość przejścia między różnymi światami, a u Archimidesa jest samym tym przejściem – możliwość przejścia jest dana *a priori*.

Sądzę, że jeśli chodzi o rozumienie rozciągłości, to zgodny z metodą Archimidesa jest następujący pogląd Sekstusa Empiryka<sup>30</sup> żyjącego na przełomie II i III wieku. Ciało jest skonstruowane z punktu w ten sposób, że poruszający się punkt wytwarza linię, przesuwająca się linia wytwarza powierzchnię, natomiast płaszczyzna wytwarza poprzez ruch ciała mające trzy wymiary. W konstrukcji kolejnych rozciągłości opieramy się wyłącznie na pojęciu punktu, jednak samo zrozumienie możliwości generowania rozciągłości w kolejnych etapach dane jest dzięki wykorzystaniu poza-matematycznego pojęcia – pojęcia ruchu.

Uniwersalność matematyki w metodzie Archimidesa polega na tym, iż metody oraz pojęcia różnych nauk mogą zostać przez matematykę zaadoptowane i wykorzystane do odkrycia faktów matematycznych. Ta uniwersalność nie jest uniwersalnością matematycznej metody (jak jest u Platona), lecz uniwersalnością struktury matematycznej, która jest w stanie wchłonąć całą różnorodność sposobów dochodzenia do prawdy. Również w przypadku pitagorejczyków uniwersalność matematyki nie polega na uniwersalności metody. Struktury i byty matematyczne rozjaśniają istniejącą rzeczywistość – sprawiają, że możemy przyznać światu status „rzeczywistego” czy „istniejącego”. Każde pojęcie uzyskuje pełną jasność dzięki odpowiedniemu wyjaśnieniu jego istoty przy pomocy struktur matematycznych.

Pojawiają się tym samym trzy koncepcje rozumienia matematyki jako nauki uniwersalnej: platońska, pitagorejska i archimedejska. W odróżnieniu od koncepcji Arystotelesa, w której istnieje podział rzeczywistości na odrębne obszary i przyporządkowanie ich ustalonym naukom, te trzy powyższe koncepcje zakładają jedność nauki o świecie. W trakcie poznawania świata i rozwoju wiedzy dochodzimy jednak do paradoksów i sprzeczności. Odpowiedzialnym za nie wydaje się być założenie o jedności nauki. Okazuje się w końcu, że ciągle uzupełnianie poznawanej struktury świata strukturami matematycznymi usuwa luki i sprzeczności – te koncepcje wymuszają więc rozwój matematyki. Oprócz zasadniczego podobieństwa istnieją między tymi koncepcjami ważne różnice, które sprawiają, że możemy mówić o trzech różnych modelach nauki uniwersalnej:

1. Model pitagorejski. W tym modelu na początku rozwoju wiedzy mamy doświadczony byt (jedyną i prawdziwą rzeczywistość), który sam w sobie jest nośnikiem informacji. Na każdym etapie rozwoju jest potrzebny kontakt z tym zapleczem informacyjnym. Metody naukowe są wyłącznie przetwarzaniem tej pierwotnej prawdy w wiedzę, która jest zawsze pewną destrukcją prawdy. Prawda jest dana na początku w bezpośrednim oglądzie. Badania historyczne w ramach tego modelu polegają na próbie cofania się wstecz, w celu dotarcia do

pierwotnej prawdy, która „wchłonięta” przez budowany gmach wiedzy, uległa przekształceniu i przestała być dostępna w pełni dla umysłu.

2. Model platoński. Rzeczywistość poznawana w sposób nie-matematyczny nie przedstawia dla umysłu ludzkiego żadnej wartości informacyjnej – dzieje się tak dlatego, iż umysł poznaje pierwotnie rzeczywistość jako Dyadę zawierającą w sobie sprzeczne elementy. Dopiero metody naukowe (matematyczne) wydobywają z rzeczywistości prawdę, sprawiają, że poznawana rzeczywistość zostaje uniesprzecznioma i staje się nośnikiem informacji. Prawda staje się jawna dla umysłu dopiero poprzez konstruowaną naukę. W ramach tego modelu badania historyczne są poszukiwaniem tych miejsc w rozwoju nauki, w których (przy pomocy metod naukowych) nastąpiło „rozjaśnienie” pierwotnie niezrozumiałej rzeczywistości.

3. Model archimedejski. Prawda nie jest dana na początku ani nie jest (do końca) dziełem matematycznej metody. Dowód matematyczny jest jedynie włączeniem danej prawdy w struktury matematyki i ukazaniem matematycznego sensu tej prawdy. Prawda okazuje się zapośredniczona w innych obszarach wiedzy i docieramy do niej dzięki wykorzystaniu metod badawczych wziętych z tych obszarów. Ten model ukazuje, iż szczególnie sensowne w badaniach historycznych jest śledzenie momentów interakcji pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy, bo właśnie w tych momentach miał miejsce „transfer” prawdy.



## Przypisy:

- <sup>1</sup> Platon, *Obrona Sokratesa*, Warszawa 1984 s. 252-253.
- <sup>2</sup> Platon, *Fajdros*, XXVII-XXVIII.
- <sup>3</sup> Arystoteles, *Metafizyka*, 1051 b
- <sup>4</sup> Mikołaj Kuzańczyk, *O oświeconej niewiedzy*, Kraków 1997 s. 46.
- <sup>5</sup> Tamże, s. 75.
- <sup>6</sup> Descartes, *Zasady filozofii*, Warszawa s. 10.
- <sup>7</sup> G. Grua, *Textes inédits de G. W. Leibniz d'après les Manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre*, Paryż 1948, t. II, ss. 553-555. Tłum. St. Cichowicz [w:] G.W. Leibniz, *Główne pisma matematyczne*, Warszawa 1995 s. 95
- <sup>8</sup> I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, tłum. R. Ingarden, Warszawa 1957 t. II ss. 63-65.
- <sup>9</sup> K. Popper, *Epistemologia bez poznającego podmiotu*. [w:] *Wiedza obiektywna*, Warszawa 1992 s. 156.
- <sup>10</sup> Poniższe analizy oparte są na: M. Hedegger, *Sein und Zeit*, tłum. Bogdan Baran, Warszawa 1994 s. 300-324.
- <sup>11</sup> Oczywiście matematyka, jak i żadna dziedzina wiedzy, nie odkrywa „prawd absolutnych” (dana prawda musi być wyrażona i sformułowana w jakimś języku). Każde twierdzenie matematyczne zasadniczo ma sens w ramach teorii, w której jest sformułowane – twierdzenie mówiące, że „dwa różne punkty wyznaczają dokładnie jedną prostą” jest prawdziwe w ramach geometrii euklidesowej, natomiast w geometriach nieeuklidesowych pojęcie prostej jest zastąpione przez ogólniejsze pojęcie geodezyjnej. Ogólniejsze twierdzenie, w którym zastępujemy pojęcie prostej pojęciem geodezyjnej nie jest prawdziwe, co nie podważa prawdziwości twierdzenia szczegółowego.
- <sup>12</sup> Nie należy sądzić, że matematyka faktycznie rozwijana w pełni realizuje ideał nauki uniwersalnej. Jednak, jeśli jakakolwiek nauka jest w stanie ten ideał realizować, to jest to właśnie matematyka.
- <sup>13</sup> O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza*, Tarnów 1997 s. 39-54. Tłum. Wł. Skoczny na podstawie wykładów O. Pedersena wygłoszonych w Cambridge w 1988.
- <sup>14</sup> Arystoteles, *Fizyka*, Ks. II rozdz. 2.
- <sup>15</sup> Arystoteles, *Metafizyka*, Ks. M. (XIII), 1076 b.
- <sup>16</sup> Tamże, 1078 a.
- <sup>17</sup> Tamże, 1078 a.
- <sup>18</sup> Tamże, Ks. A rozdz. 6.
- <sup>19</sup> Platon: *Timajos*, Warszawa 1986 s. 40.
- <sup>20</sup> Tamże, s. 41.
- <sup>21</sup> Tamże, s. 44.
- <sup>22</sup> Dale M. Johnson uważa, że w tych definicjach Euklidesa tkwi idea teorii wymiaru: punkt nie ma żadnego wymiaru (jest bez części), linia ma wymiar jeden (posiada jedynie długość), powierzchnia ma wymiar dwa (długość i szerokość), natomiast bryła jest wymiaru trzy (długość, szerokość i głębokość). Dale M. Johnson, *The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, Part I. „Arch. History Exact Sci.” 20 (1979) s. 103-104.
- <sup>23</sup> Arystoteles, *Topiki*, Księga VI.5.
- <sup>24</sup> A. P. Juskiewicz (red.), *Historia matematyki*, T. 1 Warszawa 1975 s. 73-77.
- <sup>25</sup> Tamże, 85-89.

- <sup>26</sup> Arystoteles, *O duszy*, Księga I.4. Por. również: Sextus Empiricus, *Against the Physicists. Against the Ethicists. (Adversus Mathematicos. ix, x, xi)*, Tłum. R. G. Bury, Cambridge, Massachussets, London 1936 s. 346-349.
- <sup>27</sup> Arystoteles: *Metafizyka*, Ks. A, rozdz. 5.
- <sup>28</sup> Te tezy przypisuje się pitagorejczykowi Speusippusowi. Por. I. Thomas, *Selecting illustrating the History of Greek Mathematics*, London, Cambridge, Massachussets 1939 s. 80-83.
- <sup>29</sup> Archimedes: „Послание к Эратосфену”. [w:] *Сочинения*. Moskwa 1962 s. 298-327.
- <sup>30</sup> Sextus Empiricus, *Against the Physicists. Against the Ethicists*, Cambridge, Massachussets, London s. 346-349.



## Rozdział IV

### Nowożytne koncepcje *mathesis universalis*

#### 1. Kartezjańskie kryteria prawdy

Wielcy matematycy nowożytni, Kartezjusz i Leibniz, uznali że jedynie w matematyce tkwią możliwości pozwalające rozwiązać a przynajmniej przybliżyć się do zrozumienia kluczowych zagadnień filozoficznych. Problem ciągłości bytu oraz rozumowania, kwestia przejścia między tymi dwoma obszarami rzeczywistości, znalezienie takich elementów, które pozwoliłyby usuwać wszelkie nieciągłości, to zadania, które może pomóc rozwiązać tylko metoda matematyczna. Pojawiają się dwie nowe koncepcje nauki uniwersalnej: kartezjańska i leibnizjańska. Są one nawiązaniem do wielkich wizji starożytnych, a ich ranga zostaje wzmocniona gwałtownym rozwojem nauki okresu nowożytnego.

Myślę, że interesującą rzeczą jest zobaczenie jak tę „inność” matematyki i wynikającą z tej inności możliwość uchwycenia istoty rzeczywistości widzi również ktoś, kto nie jest poprzez swoją pracę twórczą bezpośrednio związany z matematyką, kto ma dzięki temu pewien dystans. Przyjrzyjmy się jak z pozycji ogólnofilozoficznych widzi to wyróżnienie matematyki dwudziestowieczny filozof, twórca filozofii dialogu F. Rosenzweig. To jego zwrócenie uwagi na matematykę ma miejsce podczas polemiki z całym tym dziedzictwem filozofii i nauki europejskiej, która ma swój początek na Wyspach Jońskich, a kres u Hegla. W jakiś sposób krytyka nie dotyka jednak idei *mathesis universalis*. Zobaczmy jak się to dzieje.

Według Rosenzweiga filozofia europejska nie dostrzega innego bytu oprócz bytu dla myślenia. Wszelki byt, jako byt przed myśleniem, jest równoważny nicości.

„Filozofia zaczęła się tam, gdzie Myślenie złączyło się z Bytem. Właśnie jej i właśnie tu odmawiamy naszego posłuszeństwa. Szukamy tego, co trwałe, a co nie potrzebuje dopiero myślenia, aby być. Dlatego nie wolno nam było wyprzeć się śmierci i dlatego musimy przyjąć Nicość tam, gdzie i tak może nas ona spotkać, i uczynić ją trwałym punktem wyjścia tego, co trwałe. ‘Ta’ Nicość nie może oznaczać dla nas odsłonięcia istoty czystego Bytu, jak u wielkich spadkobierców dwóch tysiącleci historii filozofii. Lecz zawsze tam, gdzie istniejący element Wszystkiego spoczywa trwale i nierozdzielnie w sobie samym, tam trzeba założyć dla tego Bytu Nicość, jego Nicość. Temu przejściu od Nicości do jego



Czegoś ofiarowuje się jako przewodniczka nauka, która sama nie jest niczym innym jak nieustannym wyprowadzaniem Czegoś – i niczego więcej niż jakiegoś Czegoś, czegośkolwiek – z Nicości, i to nigdy z pustej ogólnej Nicości, lecz zawsze z „jego” Nicości, właśnie Nicości tego Czegoś: matematyka”<sup>1</sup>.

Matematyka nie należy więc do tego dziedzictwa, które Rosenzweig krytykuje; potrafi ona uchwycić Nicość konkretnego bytu i powoli go odśłaniać. Nicość ta jednak nie może być nicością czegośkolwiek, jakąś ogólną i pustą nicością, lecz zawsze Nicością jakiegoś Bytu. Tak jest również z niewiedzą Sokratesa, która zawsze jest niewiedzą konkretnej rzeczy i odśłania w konsekwencji najgłębszą wiedzę o człowieku. Przykład faktu filozoficznego odśłoniętego przez Kuzańczyka pozwala lepiej zrozumieć jak z Nicości wyłania się byt oraz jaka jest w tym rola matematyki. Przypomnijmy, że Kuzańczyk odkrył, iż symbole matematyczne to jedyne symbole umożliwiające niesprzeczne poznawanie świata. Pewne własności nie do pogodzenia na poziomie zmysłowym, materialnym czy ilościowym zostają uzgodnione na poziomie abstrakcyjnym lub jakościowym w ramach struktur matematycznych. Okazuje się w konsekwencji, że jedyne symbole (abstrakcyjne) zawierające w sobie **minimum** treści zmysłowo-wyobrażeniowych pozwalają na usuwanie lokalnie sprzeczności, z jednocześnie zachowaniem kontaktu z materialną rzeczywistością. Takimi symbolami są właśnie symbole matematyczne. Przy poznaniu „matematycznym” rezygnuje się z maksymalistycznych aspiracji poznawczych, można jedynie stopniowo wznosić się po stopniach poznania. Na przykładzie matematyki widać, że prawda może łączyć w sobie rzeczy „sprzeczne” (na podstawie pierwotnej, potocznej wiedzy) bez samozniszczenia – okazuje się tym samym, że prawda jest procesem, drogą prowadzącą do Prawdy.

Kartezjusz kontynuował drogę Kuzańczyka poszukiwania „minimalnych” symboli matematycznych usuwających rozdarcie świata. Pierwszym etapem jego badań było znalezienie absolutu poznawczego, a więc w konsekwencji takiego elementu rzeczywistości, który nie poddaje się nawet najbardziej radykalnemu wątpieniu. Ten element ma stanowić podstawę w budowie nauki uniwersalnej (*mathesis universalis*), mającej wyjaśniać wszystko, co dotyczy porządku i miary (matematyzacja wiedzy), bez wnikania w pozostałe własności przedmiotów. Ponadto, proces budowy wiedzy pewnej musi opierać się na następujących zasadach:

**Zasada 1.** Nigdy nie przyjmować za prawdziwą żadnej rzeczy, zanim by nie została rozpoznana przeze mnie w sposób oczywisty.

**Zasada 2.** Każde z badanych zagadnień dzielić na tyle cząstek, na ile jest to możliwe i na ile potrzebne dla najlepszego ich rozwiązania.

**Zasada 3.** Wszelkie badania rozpoczynać od przedmiotów najprostszych i najdostępniejszych poznaniu i stopniowo dochodzić do przedmiotów bardziej złożonych.

**Zasada 4.** Każde rozumowanie i wszelkie obliczenia powinny być tak całkowite i powszechne, aby dać pewność, że nic nie zostało pominięte<sup>2</sup>.

Podajmy pewną interpretację powyższych zasad ujmując je w formę dwóch kryteriów prawdy.

### Pierwsze kryterium prawdy

Zauważmy, że zasady 1 i 4 odwołują się do oczywistości, leżącej u podstaw kryterium prawdy – zanim uznamy, że coś jest prawdziwe (a więc poznawane w sposób jasny i wyraźny), musimy doświadczyć oczywistości tej rzeczy; co więcej, istnieje taki próg poznawczy, po przekroczeniu którego wkraczamy w obszar oczywistości (poznanie całkowite i powszechne).

### Drugie kryterium prawdy

Zasady 2 i 3 wprowadzają kolejne kryterium prawdy – gdy operujemy pewnym ciągiem dowodowym i kolejne elementy tego ciągu posiadają „większą treść” niż poprzednie, to tym samym zbliżamy się do rzeczywistości. Prawda (dowodu, a w konsekwencji tego, czego dowód dotyczy) ujawnia się, gdy kolejne elementy ciągu dowodowego mają więcej treści, niż elementy poprzednie. W formalnej strukturze dowodu zawarta jest metoda dotarcia do rzeczywistości. To kryterium prawdy opiera się na wierze w istnienie tego typu ciągów dowodowych. Cały wzrost informacji dokonuje się przy przejściu pomiędzy kolejnymi elementami ciągu, natomiast samo przejście graniczne nie wnosi już nic nowego.

Przestrzeganie tych zasad daje, według Kartezjusza, pewność dotarcia do wszelkich rzeczy – nawet tych najbardziej ukrytych i niedostępnych. Przykładem realizacji tych zasad jest metoda dotarcia do *cogito*, jak również budowana przez niego geometria analityczna i dowód na istnienie Boga.

W rozwijającej się matematyce nowożytnej (i współczesnej), której znaczący impuls dała metoda Kartezjusza, matematyka „oswoiła” wiele pojęć traktowanych wcześniej jako sprzeczne w sobie i nienaukowe. Można do nich zaliczyć pojęcie granicy, prędkości chwilowej, ciągłości, nieskończoności czy w końcu continuum. Kartezjusz dostrzegł bowiem i pokazał, iż rozciąglą rzeczywistość można badać przy pomocy dyskretnej siatki pojęć i dyskretnych etapów rozumowania. Aby móc to osiągnąć trzeba mieć w swoich rękach absolut poznawczy – od poszukiwania go rozpoczął Kartezjusz swoją konstrukcję nauki uniwersalnej.

## 2. Kartezjański absolut poznawczy

Przeprowadzony przez Kartezjusza proces radykalnego wątpienia ma być oczyszczeniem umysłu ze wszelkich złudzeń i fałszywych mniemań oraz zbędnej wiedzy. Jego ukoronowaniem jest doświadczenie prawdziwości zdania: *myślę, więc jestem*. Tym samym wyłania się z morza niepewności i niebytu *cogito* – i wskazuje podmiot myślący. *Cogito* to jednak nie tylko wynik stosowania przyjętych reguł rozumowania, lecz przede wszystkim absolut poznawczy dający możliwość stosowania tych reguł. *Cogito* to „pierwszy poruszyciel” procesu poznawczego – stwierdzenie „*myślę, więc jestem*”, to nie tyle stwierdzenie pewnego faktu psychologicznego, lecz przede wszystkim ukazanie ontycznej zależności bytu od myśli. Ponadto, okazuje się, że granicą radykalnego wątpienia jest właśnie *cogito*; wolność, która próbuje być absolutem, zatrzymuje się na fakcie myślenia. Mówiąc metaforycznie, myślenie jest kresem wolności, jest jej celem i ograniczeniem<sup>3</sup>.

Stworzona przez Kartezjusza geometria analityczna miała łączyć w sobie zalety geometrii (łatwiejsze operowanie pewnymi abstrakcjami matematycznymi, dzięki przedstawieniu geometrycznemu) oraz algebry (łatwiejsze dokonywanie operacji na prostych wyobrażeniowo liczbach), a unikać ich wad (geometria domaga się ciągłej twórczej aktywności a tym samym nuży wyobraźnię i umysł, natomiast algebra daje ogólne prawa liczenia, nie dając jednak twórczej wiedzy). Metoda ta łączyła więc jasne i wyraźne wyobrażenia geometryczne z jasnymi i wyraźnymi dla umysłu operacjami na liczbach czy na ogólnych symbolach algebraicznych.

Dane figury geometryczne można więc wyrażać za pomocą układów liczb czy równań i poznawać własności tych figur, wykorzystując operacje na liczbach. Pozostajemy więc w obszarze działań umysłu, które są dla niego możliwie najprostsze, a co najważniejsze pozwalają, opierając się na tym co jasne i wyraźne, krok po kroku budować całą wiedzę o świecie, również o tym znajdującym się poza umysłem.

„I tutaj – jak sądzę – najbardziej godne zastanowienia jest to, że znajduję w sobie niezliczoną ilość idei pewnych rzeczy, o których nie można powiedzieć, że są niczym, chociaż może nie istnieją nigdzie poza mną. A chociaż myślę w jakiś sposób o nich zależnie od mej woli, to jednak nie są przeze mnie wymyślane, lecz mają swoje prawdziwe i niezmiennie natury. Gdy na przykład wyobrażam sobie trójkąt, to choć może taka figura nigdzie na świecie nie istnieje poza moją świadomością ani nigdy nie istniała, posiada jednak bez wątpienia jakąś określoną naturę, czyli istotę, czyli formę niezmienną wieczną, która ani nie została przeze mnie wymyślona, ani nie jest od mego umysłu zależna; wynika to z tego, że można udowodnić różne własności owego trójkąta, jak np. że jego kąty są równe dwóm prostym, że naprzeciw największego jego kąta leży najdłuższy bok i tym podobne, które to własności teraz jasno poznaję, czy chcę, czy nie chcę, chociaż

nigdy przedtem w żaden sposób nie myślałem o nich, gdy sobie wyobrażałem trójkąt. Wobec tego nie zostały one przeze mnie wymyślane”<sup>4</sup>.

Zauważmy, że kartezjański absolut poznawczy to nie tylko początek wszelkiej wiedzy, lecz również metoda jej konstrukcji. Oczyszczając różne obszary wiedzy z wszelkich niejasności i zbędnych zawiłości, docieramy w granicy do elementów postrzeganych jasno i wyraźnie, w oparciu o które możemy już konstruować wiedzę pewną. Te elementy, to quasi-absoluty poznawcze. Jednak, jak zobaczymy w dalszej części, ich ranga poznawcza zależy od „dowodu na istnienie absolutu poznawczego”.

Przejdźmy teraz do roli, jaką pełni w budowie *mathesis universalis* dowód na istnienie Boga.

„Z pewnością tak samo znajduję w sobie ideę Jęgo, to jest bytu najdoskonalszego, jak ideę jakiegokolwiek figury czy liczby; niemniej jasno i wyraźnie pojmuję, że do Jęgo natury należy wieczne i aktualne istnienie, jak pojmuję, że do natury figury czy liczby należy to, czego dowodzę o tej figurze czy liczbie. A więc, choćby nie wszystko było prawdziwe, co w tych ostatnich dniach rozważałem, to istnienie Boga powinno mieć dla mnie co najmniej ten sam stopień pewności, jaki dotychczas posiadały prawdy matematyczne”<sup>5</sup>.

Kartezjański dowód na istnienie Boga ma więc schemat następującego rozumowania warunkowego: jeśli istnieją poprawne dowody matematyczne (przeprowadzone zgodnie z przyjętymi zasadami rozumowania), to również poprawny jest dowód na istnienie Boga. Stąd, między innymi, bierze się projekt nauki uniwersalnej (*mathesis universalis*), której prawdziwość i skuteczność potwierdzałyby poprawność powyższego schematu rozumowania, a tym samym stanowiłyby istotne uzupełnienie przeprowadzonego dowodu.

Istnieje też druga istotna zależność między projektem nauki uniwersalnej a dowodem na istnienie Boga.

Widzimy, że Kartezjusz, badając idee znajdujące się w umyśle, odkrywa:

1. Dwie idee pierwotne związane z substancją myślącą i określające tę substancję – są to idea trwania (w konstrukcji nauki wyrażająca następstwo logiczne danych faktów) oraz liczby.
2. Cztery idee pierwotne dotyczące substancji rozciągłej – są to idee: rozciągłości, kształtu, położenia i ruchu.

Oczywiście, te idee mają centralne miejsce w budowanej przez Kartezjusza nauce uniwersalnej. Różnice między ideami określającymi substancję myślącą a ideami związanym z substancją rozciągłą sprawiają, że pomiędzy strukturą świata materialnego (substancja rozciągła) a naszym umysłem pojawia się przepaść – nie możemy poznać tej struktury bezpośrednio. Pojawiają się nowe kryteria prawdy (o których wspomniałem poprzednio) umożliwiające poznanie struktury świata. Przeprowadzony przez Kartezjusza dowód na istnienie Boga jest



próbą zastosowania tych kryteriów, ukazaniem ich skuteczności i sposobu realizacji na przykładzie o najwyższym stopniu trudności.

Idea Boga pojawia się u Descartesa jako jasna i wyraźna idea pierwotna (wrodzona) umysłu; jednak od momentu przedstawienia dowodu na istnienie Boga, budowana *mathesis universalis* przestaje być konstrukcją hipotetyczną i subiektywną, lecz przyjmuje status wiedzy pewnej i obiektywnej. Jeśli, w oparciu o przyjęte zasady rozumowania, można udowodnić istnienie (Boga), a nie tylko własności obiektów (matematycznych), to tym samym wzrasta ranga i siła wprowadzonych metod. Tym samym, dowód na istnienie Boga pełni w systemie Kartezjusza rolę absolutu poznawczego (podobnie jak *cogito*) – jest początkiem i gwarantem wiedzy obiektywnej (w szczególności o świecie pozaumysłowym)<sup>6</sup>.

Jak wspominałem wcześniej, radykalne wątplenie zatrzymuje się na doświadczeniu absolutnej pewności zdania „myślę, więc jestem” i od tego momentu rozpoczyna się proces poznawczy. Jednak sam fakt wątplenia świadczy o niedoskonałości tego, kto wątpi, a więc podważa wiarygodność wiedzy przez niego uzyskanej.

Z drugiej strony, jak pisze Kartezjusz, „gdybym był sam jeden i niezależny od czego bądź innego, tak że z siebie samego posiadałbym choć trochę tej doskonałości, przez którą uczestniczyłem w bycie doskonałym, z tej samej racji mógłbym sam uzyskać całą resztę, której braku byłem świadom, i tym sposobem samemu być nieskończonym, wiecznym, niezmiennym, wszystko wiedzącym, wszechpotężnym i w końcu posiadać wszelkie doskonałości, które mogłem dostrzec w Bogu”<sup>7</sup>.

Otrzymujemy zasadniczą sprzeczność – *cogito* jest doskonałe i zarazem nie jest. Takie stwierdzenie przyjęte na początku konstrukcji wiedzy, przekreśla możliwość otrzymania wiedzy pewnej i obiektywnej, a tak naprawdę wszelkiej wiedzy. W celu uniknięcia tej sprzeczności (tzn. sprzeczności w samym pojęciu *cogito*) należy przyjąć istnienie Boga.

W powyższym rozumowaniu z całą jasnością wystąpiła następująca alternatywa: albo przyjmujemy założenie o istnieniu Boga, albo otrzymamy całkowitą dowolność wyprowadzanych stwierdzeń i brak jakichkolwiek kryteriów prawdy. Radykalne wątplenie zatrzymało się na fakcie *cogito*, jednak nie przyjęcie założenia o istnieniu Boga sprawia, że proces wątplenia posuwa się dalej i prowadzi do zniszczenia samego *cogito*. Jak stąd widać, stwierdzenie: *myślę, więc jestem* nie jest bezwarunkowe, lecz zawiera podstawowe zasady rozumowania i prawa logiki, co jest jednak zgodne z przyjętym przez Kartezjusza schematem budowy wiedzy.

Zwróćmy uwagę na to, że rozumowanie Kartezjusza ma postać błędnego koła: aby móc rozpocząć budowę wiedzy obiektywnej trzeba przyjąć założenie o istnieniu Boga; założenie to jednak musi wynikać z przeprowadzonego dowodu na istnienie Boga; aby znów ten dowód był wiarygodny, *cogito*, które go przeprowadza musi być wolne od wszelkich fałszywych mniemań i niedoskonałości (chyba, że przyjmujemy założenie o istnieniu Boga); jednak *cogito*

powstało jako efekt wątpienia i jest zarazem podmiotem tego wątpienia, potwierdza więc tym samym swoją niedoskonałość.

Możliwość rozerwania tego błędnego koła tkwi w cytowanej już myśli Kartezjusza: „(...) istnienie Boga powinno mieć dla mnie co najmniej ten sam stopień pewności, jaki dotychczas posiadały prawdy matematyczne”<sup>8</sup>. Trzeba więc wykazać, że prawdy matematyczne mają rangę uniwersalną i są opisem nie tylko praw rządzących myśleniem, lecz również świata materialnego, a tym samym i dowód na istnienie Boga stanie się pewny i obiektywny<sup>9</sup>. I jest to jedyna droga, gdyż kartezjańskie radykalne wątpienie zatrzymuje się wyłącznie na fakcie jakim jest podmiot wyposażony w metodę konstrukcji (a właściwie rekonstrukcji) świata. Wszystkie inne fakty mogą zostać zakwestionowane – proces wątpienia może biec dalej.

### 3. Kartezjański schemat nauki uniwersalnej

Zarówno Kartezjusz jak i Leibniz próbowali stworzyć naukę uniwersalną. Jednak sposób, w jaki konstruowali tę naukę był zasadniczo inny. Materia, jako substancja rozciągła, dzieląca się w nieskończoność, nie mogła stanowić podstawy konstrukcji wiedzy w przypadku Kartezjusza. Dzieląc daną część materii na coraz mniejsze części, nigdy nie otrzymamy części „prostszej”. Podstawą całej konstrukcji dla Kartezjusza miały być czyste, proste metody wzięte z ówczesnej matematyki, czyli algebry i geometrii. Tylko przejścia rozumowe pomiędzy elementami ciągu rozumowania miały strukturę dyskretną – ponieważ istnieje skok między różnymi elementami rzeczywistości (substancjami), to również struktura rozumowania musi być dyskretna. Z matematycznych dowodów i rozumowań można było wydobyć nieredukowalne metody, stanowiące podstawę konstrukcji wiedzy, natomiast pierwotne elementy tej konstrukcji były nieistotne. Najpierw określamy dwa różne obszary, następnie odkrywamy czy tworzymy metody pozwalające przechodzić z jednego obszaru do drugiego. Pierwotne elementy poszczególnych obszarów pojawiają się jako efekt działania tych metod.

W celu zrozumienia nowych prawd należy mieć przynajmniej dwa różne obszary, w których dane są pewne jasne i wyraźne elementy. Przy pomocy metod łączących te posiadane już elementy można dojść do zrozumienia nowych bytów i pojęć – jest to proces stopniowy. Zauważmy, że program kartezjański mieści się w nurcie platońskim: w przypadku Kartezjusza Jednością idei stała się metoda naukowa, natomiast rolę platońskiej *dyady*, będącej substratem wszelkich konstrukcji, pełnią dwa zasadniczo odrębne obszary (substancja myśląca i rozciągła, i odpowiadające temu podziałowi – arytmetyka i geometria).

Prawda nie jest w tym ujęciu elementem rzeczywistości materialnej – żadna analiza świata nie daje możliwości dotarcia do trwałego i pewnego elementu. Prawda jest związana z poznawaniem rzeczywistości, jest cechą metody

a nie bytu. W procesie radykalnego wątpienia nie jesteśmy w stanie dotrzeć do rzeczywistości; odkrywamy w efekcie tego procesu pewną i niezawodną (prawdziwą) metodę, przy pomocy której odtwarzamy (konstruujemy) istniejący świat. Prawda świata ujawnia się dopiero jako efekt działalności naukowej. Można więc przyjąć, że stworzona przez Kartezjusza geometria analityczna (jako połączenie przy pomocy metody naukowej geometrii i arytmetyki) jest nośnikiem prawdy naukowej a nie sama geometria czy arytmetyka.

W schemacie kartezjańskim budowy nauki uniwersalnej można wyróżnić następujące elementy:

1. Obszar subiektywności – w analizach Kartezjusza temu obszarowi odpowiada substancja myśląca, a w przypadku nauki – algebra.
2. Obszar obiektywności – tu z kolei odpowiada mu substancja rozciągła, a w nauce – geometria.

Miedzy tymi obszarami pojawia się charakterystyczne dla epoki nowożytnej napięcie – jest to napięcie między racjonalnością konstrukcji intelektu a realnością pozamysłowych faktów. Celem działalności naukowej ma być zlikwidowanie tego napięcia przy pomocy ogólnych i abstrakcyjnych metod. Natomiast sama możliwość jego likwidacji jest oparta na faktach filozoficznych, stanowiących kolejne elementy modelu.

3. Absolut poznawczy.

Kartezjańskie *cogito* jest granicznym obiektem procesu radykalnego wątpienia. Dopiero po doświadczeniu *cogito* rozpoczyna się poznawanie rzeczywistości. Samo radykalne wątpienie jest istotą *cogito* i warunkiem jego istnienia, ono więc jest absolutem poznawczym. Dzięki działaniu metody radykalnego wątpienia zostaje odkryty czy utworzony nowy byt – substancja myśląca.

Kolejnym generatorem substancji jest dowód na istnienie Boga – dzięki temu dowodowi docieramy do substancji rozciągłej. Tym samym kartezjański dowód na istnienie Boga jest kolejnym absolutem poznawczym.

Jak wspomniałem wcześniej, analizując drugie kryterium prawdy, przejście graniczne nie daje żadnej nowej informacji – ewentualny jej wzrost odbywa się przy przejściu między kolejnymi etapami rozumowania (elementami ciągu). Również ciągłość przejścia między zasadami mechaniki a prawami geometrii u Newtona ukazuje tę kwestię – geometria, to tylko idealizacja mechaniki, a mechanika, to tylko przybliżenie geometrii. Ponieważ nowe elementy i jakości pojawiają się przy przejściu między kolejnymi etapami ciągu dowodowego, więc metody umożliwiające to przejście można traktować jako quasi-absoluty poznawcze.

Zauważmy jeszcze, że kryteria prawdy pozwalają zanurzyć obszar subiektywności w obszar obiektywności, raz jako obiekt rozdzielaający elementy tego obszaru (istnienie progu poznawczego przy doświadczaniu oczywistości), a w drugim przypadku, jako obiekt, dzięki któremu możliwe jest ciągle przejście między tymi elementami (istnienie ciągów dowodowych, które ujmują badaną rzeczywistość).

Model ten składa się więc z dwóch (pierwotnie) rozłącznych obszarów wygenerowanych i połączonych przy pomocy absolutów poznawczych (metody radykalnego wątpienia, dowodu na istnienie Boga i różnorodnych metod naukowych). Absoluty poznawcze pełnią rolę nośników prawdy i wyznaczają metody konstrukcji wiedzy. Ponadto są wskaźnikami ukazującymi stopień rozwoju nauki.

#### 4. Leibnizjańska wizja nauki uniwersalnej

Materia u Leibniza dzieli się w nieskończoność, jednak na pewnym etapie podziału otrzymujemy nową jakościowo monadę (patrząc z zewnątrz dalszy podział tej monady jest niemożliwy, teraz już od wewnętrznej aktywności monady zależy możliwość wchodzenia „w głąb” bytu). W każdej z nich odbija się mniej lub bardziej wyrażnie cały świat. W oparciu o pewną ilość monad (przyjętych jako „alfabet”) można odtwarzać wszystkie inne byty. Wybór alfabetu (czyli związany z nim etap podziału rzeczywistości) jest w znacznej mierze kwestią formalną.

Dla Leibniza, wzorem przy konstrukcji nauki uniwersalnej była sylogistyka Arystotelesa. Chciał w analogiczny sposób opracować inne reguły rozumowań i dedukcji. W tym celu należy, według niego, poprzez analizę pojęć istniejących w umyśle, opracować katalog pojęć pierwotnych (alfabet myśli) i nadać im status formalny przypisując im symbole tzw. „charaktery”. Leibniz oczywiście zakładał, że każde pojęcie można rozłożyć na skończoną ilość pojęć pierwotnych. Jak przy pomocy dziesięciu cyfr można otrzymać każdą liczbę (mimo, iż tych liczb jest nieskończenie wiele) tak samo przy pomocy alfabetu myśli będzie można utworzyć dowolne pojęcie. Wszystkie pojęcia będzie więc można otrzymać poprzez odpowiednią kombinację charakterów. Automatycznie, ta procedura będzie zawierała dowody wszystkich możliwych faktów – zdanie *A* będzie wynikać ze zdania *B*, jeśli po rozłożeniu pojęć tworzących te zdania na pojęcia pierwotne, okaże się, że zbiór charakterów otrzymanych ze zdania *B* zawiera się w zbiorze charakterów zdania *A*. Dzięki grze na symbolach wolnych od zbędnych i nieuchwytnych treści, wiedza ludzka będzie wiedzą pewną, analityczną.

Wszystkie pojęcia tworzące alfabet myśli nazywa Leibniz wyrażeniami pierwszego rzędu – tworzą one tzw. pierwszą klasę. Do drugiej klasy należą pary wyrażen pierwszego rzędu, do trzeciej klasy trójki wyrażen pierwszego rzędu lub pary utworzone z wyrażen odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu itd.



W celu całkowitej precyzji rachunków podaje Leibniz projekt arytmetyzacji logiki. Wychodzi od analogii między rozkładem pojęć na pojęcia pierwszego rzędu a rozkładem liczb na czynniki pierwsze. W tej logice arytmetycznej każdemu pojęciu ma odpowiadać pewna liczba całkowita, przy czym pojęciom pierwotnym mają być przyporządkowane ustalone liczby pierwsze (pojęciom przeciwnym mają odpowiadać liczby przeciwne). To przyporządkowanie ma przebiegać zgodnie z następującą regułą: dowolnemu pojęciu  $a$  przyporządkujemy liczbę całkowitą będącą iloczynem liczb pierwszych odpowiadającym pojęciom pierwotnym, na które pojęcie  $a$  się rozkłada. Jednoznaczność tego przyporządkowania wynika z jednoznaczności rozkładu liczby na czynniki pierwsze<sup>10</sup>.

W konstrukcji rachunku różniczkowego do standardowych pojęć pierwotnych logiki i arytmetyki proponuje Leibniz dołączyć pojęcie „nieskończenie małej”, tzw. różniczki. Traktuje to pojęcie jako obiekt idealny, który podlega tym samym prawom, co zwykłe liczby. Jest to użyteczne, gdyż dzięki temu rachunki się znacznie upraszczają, a w razie potrzeby zawsze można z pojęcia różniczki zrezygnować, zastępując je wielkościami, które są na tyle małe lub duże, aby błąd obliczeń nie przekroczył żądanej wielkości. Nawiązuje tym samym do metody wyczerpywania Archimedesesa przedstawiając ją jako „koronną i ostateczną” metodę dowodzenia. Obok metody wyczerpywania kluczową rolę odgrywa w koncepcji Leibniza zasada ciągłości: „W każdym domniemanym przejściu, kończącym się na jakimś kresie, dozwolone jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym można objąć także końcowy kres”<sup>11</sup> – ta zasada jest jednak pierwotna wobec wszelkich innych metod i reguł i stanowi podstawę wszelkich rozumowań. To, w oparciu o tę zasadę, nieskończenie małe i nieskończenie duże liczby, podlegają tym samym prawom, co zwykłe liczby<sup>12</sup>.

Inaczej niż w przypadku Kartezjusza, dla Leibniza metody naukowe (prawa logiki, zasada ciągłości, metoda wyczerpywania) nie są efektem pewnego procesu granicznego (jak np. radykalne wątpienie), lecz istnieją uprzednio wobec intelektualnej działalności człowieka. W wyniku procesu granicznego (redukcji bytu do elementów najprostszych) otrzymujemy podstawowe pojęcia, na których budowany jest gmach wiedzy. Rozumienie tych właśnie pojęć oparte jest na przed-matematycznej intuicji. Takim podstawowym pojęciem jest u Leibniza pojęcie różniczki. Zgodnie z jego projektem nauki uniwersalnej, pojęciu różniczki przypisujemy symbol (wielkości  $x$  odpowiada symbol różniczki  $dx$ ) i na tak otrzymanych symbolach wykonujemy działania zgodnie z przyjętymi regułami. Kolejnym przykładem realizacji tego programu jest idea rachunku geometrycznego (analiza położenia – *analysis situs*, później nazwana topologią<sup>13</sup>), w którym podstawą konstrukcji były figury geometryczne (rozumiane bardzo ogólnie, niezależnie od wielkości miarowych i kształtu), w których badać należało ich wzajemne położenie.

Program Leibniza nawiązuje do koncepcji pitagorejskiej – konstrukcja nauki ma strukturę wertykalną: pojęcia dołączane do matematyki mają sens

same w sobie, są jednością-substratem, z którego budowane są nowe pojęcia. Jedyńm kryterium łączenia poszczególnych elementów jest spójność i logiczność budowanej struktury. Ogólny schemat konstrukcji nauki jest u Leibniza inny niż w przypadku projektu Kartezjusza. Prawa logiki, zasada ciągłości oraz dalsze zasady (między innymi zasada wyczerpywania Archimedesesa) są elementami rzeczywistości uprzedniej wobec wszelkiej działalności człowieka i są przez niego wykorzystywane w procesie konstrukcji wiedzy. Zasady te nie są od siebie niezależne, lecz są kolejno na sobie nadbudowane (poczynając od logiczno-ontologicznej zasady tożsamości). Dzięki temu rzeczywistość poznawana charakteryzuje się jednością (nie ma kartezjańskiego rozdarcia bytu). Procesy graniczne opisywane przez zasadę ciągłości prowadzą do konstrukcji „nowych” bytów, których jedyną nowością, w stosunku do elementów tego procesu, jest nieskończoność generującego je procesu. Dlatego rolę absolutów poznawczych pełnią dopiero te byty (np. nieskończenie mała lub byty odpowiadające pojęciom pierwotnym), które powstają jako efekt pierwotnej działalności monady.

Pojawia się więc, dzięki dotarciu do absolutów poznawczych, możliwość kreacji prawdy i poznawania rzeczywistości. Przecież filozofia Leibniza odrzuca możliwość wyjścia monady „na zewnątrz” i zdaje się oddzielać ją od możliwości obiektywnego poznania rzeczywistości. Jednak według Leibniza „najmniejsza cząstka materii na mocy aktualnego pomniejszania idącego w nieskończoność, którą kryje w sobie, przedstawia sobą aktualne powiększenie idące w nieskończoność, która poza nią jest we wszechświecie, tak że każda mała cząsteczka mieści w sobie, na nieskończenie wiele sposobów, żywe zwierciadło wyrażające cały wszechświat nieskończony, który wraz z nią istnieje. A z tego wynika, że dość potężny duch uzbrojony we wzrok dość przenikliwy mógłby tu zobaczyć wszystko, co jest wszędzie”<sup>14</sup>.

W jaki sposób możliwe jest pełnienie przez nieskończenie małą roli absolutu poznawczego? Aby to zobaczyć, spójrzmy jak rozumiana jest ona w rachunku różniczkowym tworzonym przez Leibniza. „Tymczasem pojmujemy nieskończenie małą nie jako zero proste i absolutne, lecz jako zero względne, to znaczy jako wielkość znikającą, która jednak zachowuje charakter tej która znika”<sup>15</sup>.

Oznacza to, między innymi, że różniczka zachowuje charakter liczbowy. Leibniz używał symboli  $d(x)$  i  $d(y)$  dla oznaczenia różnic skończonych i na tych symbolach wykonywał obliczenia. Dopiero po zakończeniu rachunków opuszczał nawiasy i wynik otrzymywał dla różniczek  $dx$  i  $dy$ . Uważał, że tego typu „sztuczka” jest dopuszczalna np. przy obliczaniu pochodnych, gdyż stosunek  $\frac{dy}{dx}$  zawsze można sprowadzić do stosunku  $\frac{d(y)}{d(x)}$ . Przypisywał więc Leib-

niz różniczkom pewne rzeczywiste własności, jakie przysługują tym wielkościom, na których wykonywał obliczenia, i które przy przejściu granicznym stają się różniczkami. Jednak różniczki nie były do końca rzeczywiste, gdyż

były wielkościami znikającymi – mimo, że stanowiły podstawę konstrukcji rachunku różniczkowego nie były w pełni bytem matematycznym. Charakter matematyczny miały tylko w sensie operacyjnym. Rangę obiektów matematycznych miały dopiero obiekty skonstruowane przy pomocy różniczek (np. całka, którą Leibniz definiował jako sumę różniczek).

Słynna zasada semantyczna Fregego mówiąca, że o znaczenie słów należy pytać zawsze w kontekście zdania<sup>16</sup>, a nigdy z osobna, wyjaśnia znaczenie różniczki. Sposób patrzenia na miejsce różniczki w matematyce, oparty o tę zasadę, jest zgodny z podejściem Leibniza. Pierwotny jest sens równania  $df(x)=f'(x)dx$ , w którym pojawia się symbol różniczki  $dx$  i dopiero w kontekście tego równania nabiera znaczenia symbol  $dx$ . Podobnie jest w przypadku liczby (jest to przedmiot idealny – istnieje obiektywnie, jednak nie w sposób przestrzenny). Jak dotrzeć do znaczenia, sensu liczby, czyli do jej pojęcia? Trzeba najpierw ustalić sens równości liczbowej, co ustali w konsekwencji sens zdań, w których pojawiają się liczby. W nurcie platońskim potrzeba *dyady* pojęć, aby ustalić sens nowego pojęcia. Tu natomiast wystarczy mieć sens zdania, w którym dane pojęcia występują. Oto inny prosty przykład podany przez Fregego. Zamiast mówić, że dwa odcinki są równe pod względem długości, należy powiedzieć, że długość (jedna) odcinków jest równa. Wygląda to tylko na zmianę sformułowania, lecz jest to przejście od dualizmu do monizmu.

Mimo pewnych różnic oba te projekty nauki uniwersalnej (Kartezjusza i Leibniza) cechuje zasadnicze podobieństwo. Konstrukcja wiedzy przebiega w dwóch etapach:

1. Etap infinitystyczny, opierający się na przejściu granicznym (radykalne wątplenie lub redukcja bytu aż do momentu otrzymania elementu najprostszego, monady), w wyniku którego otrzymujemy podstawowe elementy potrzebne w dalszej budowie wiedzy. W przypadku Kartezjusza są to metody naukowe, a w przypadku Leibniza byty quasi-matematyczne (jak różniczka). Tak metody naukowe Kartezjusza, jak i byty Leibniza mające rangę uniwersalną i są nośnikami prawdy.
2. Etap finitystyczny (konstrukcyjny), gdzie z elementów podstawowych, otrzymanych w etapie pierwszym, buduje się wszelką możliwą wiedzę.

U Kartezjusza w wyniku pierwszego etapu otrzymujemy odrębne byty oraz metody pozwalające połączyć wygenerowane byty w jedną strukturę. Dopiero ta struktura przywracająca jedność bytu odzwierciedla prawdę rzeczywistości. Nośnikiem prawdy są metody naukowe i służą one do likwidowania sprzeczności wcześniej poznanych bytów. U Leibniza natomiast w pierwszym etapie powstaje byt, który charakteryzuje się jednością i jest nośnikiem prawdy. Metody naukowe nie służą do likwidowania sprzeczności między odrębnymi bytami (gdyż takowych nie ma), lecz do wydobywania tej pierwotnej prawdy bytu.

## 5. Program Leibniza

Newton oraz Leibniz rozszerzyli matematykę o nowe pojęcia, które pozwoliły opanować metodą matematyczną nowe obszary badań. Były to pojęcia pochodnej i całki (fluksja i fluenta Newtona oraz nieskończenie mała Leibniza). Szczególną karierę zrobiło pojęcie nieskończenie małej Leibniza (różniczki), które było podstawą definicji pochodnej i całki, przynajmniej w przypadku Leibniza (zresztą sam Newton też tym pojęciem często operował). Pojęcie to, które traktowano z powodu jego nieścisłości i tajemniczości związanej z nieskończonością, jako pojęcie metafizyczne (w pejoratywnym znaczeniu) budziło wiele emocji. Można się było go pozbyć, ale za cenę znacznego skomplikowania rachunków; z drugiej strony, operowanie czymś nieuchwytnym i niezrozumiałym wydawało się być niegodnym matematyki. Na przykładzie traktowania tego pojęcia przez różnych matematyków można zobaczyć różnicę między programem kartezjańskim matematyzacji wiedzy a programem Leibniza. Dlaczego w duchu programu Leibniza włączenie do matematyki nowego, lecz nieścisłego pojęcia było czymś dopuszczalnym, natomiast program kartezjański zasadniczo się temu sprzeciwiał?

Często wyrażany jest pogląd, że program arytmetyzacji analizy (tzn. zdefiniowania pojęć granicy, ciągłości, pochodnej itp. przy pomocy liczb) był nawiązaniem do koncepcji pitagorejskiej. Jednak nie w oparciu się na liczbach leży istota nurtu pitagorejskiego (nie można utożsamiać nurtu pitagorejskiego z arytmetyzacją). Po kryzysie związanym z odkryciem odcinków niewspółmiernych próbowano budować matematykę w oparciu o obiekty geometryczne (punkt a nie liczba stał się matematyczną monadą, substratem i jednością) – liczby, jak i działania na liczbach były wyjaśniane geometrycznie i tylko w ten sposób. Istotne jest wydzielenie pewnego obiektu (czy obiektów), który będzie podstawą dalszych konstrukcji. W programie arytmetyzacji bierze udział, z jednej strony bliski metodzie pitagorejskiej Cauchy, jak i oddalający się od niej Weierstrass, Dedekind i Cantor.

De l'Hospital, autor pierwszej książki dotyczącej rachunku różniczkowego i całkowego, traktował różniczki jako nowe liczby, o które wzbogacona została matematyka<sup>17</sup>. Wykonywał na nich działania arytmetyczne jak na zwykłych liczbach. Rozumienie pojęcia różniczki opiera się u niego na intuicji („*La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelee la difference*”), a aksjomaty pokazujące reguły operowania różniczkami są nośnikiem prawdy przekazywanej twierdzeniom rachunku w sposób dedukcyjny. Ta prawda aksjomatów opiera się na przypisaniu różniczkom realnego istnienia.

Oryginalne stanowisko, będące jednak w duchu programu Leibniza, reprezentuje Bernard Bolzano. Matematyka była dla niego nauką badającą ogólne prawa, które regulują istnienie rzeczywistości<sup>18</sup>. Przypisanie tak znaczącej roli



matematyce można odnaleźć chyba tylko w koncepcji pitagorejskiej – tam również matematyka przenikała rzeczywistość, a jej prawa były prawami istnienia.

Nie uznawał „diadycznego” sposobu budowy matematyki. Uważał, że w niedopuszczalny sposób narusza się metodę, gdy prawdy analizy czy algebry wyprowadza się przy pomocy pojęć geometrycznych. I nie istotne jest to, że prawdy geometryczne, z których się korzysta, są oczywiste. Są to jednak prawdy pochodne w stosunku do oczywistych prawd analizy (przykładem jest niezgodne z metodą matematyczną uzasadnianie twierdzenia Bolzano o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie rysunkami linii ciągłych w geometrycznym sensie). Odrzucał, z tego samego powodu, dowody mechaniczne, gdyż występujące w mechanice pojęcia np. ruchu, mimo że w ramach mechaniki oczywiste i zrozumiałe, nie mają uzasadnienia matematycznego – w nurcie platońskim czy archimedejskim tego typu podejście byłoby uzasadnione.

Podaje dwa szczególne powody, dla których pojęcie ruchu powinno być wyrzucone z geometrycznych rozważań. Po pierwsze, uważał, że idea ruchu wymaga pojęcia poruszającego się obiektu, które jest różne od zawierającej go przestrzeni. Lecz pojęcie „poruszającego się obiektu” jest pojęciem empirycznym i obcym „czystej” geometrii. Po drugie, Bolzano zakładał, że teoria ruchu wymaga uprzednio teorii przestrzeni tj. geometrii, ponieważ w celu pokazania możliwości jakiegoś ruchu wykorzystywanego do udowodnienia pewnego geometrycznego twierdzenia, trzeba używać samego twierdzenia geometrycznego dla tego dowodu. Stąd otrzymujemy błędne koło. Musimy najpierw zająć się czystą geometrią zanim będziemy rozważać jakikolwiek ruch. Ta eliminacja ruchu z geometrii jest zgodna z teoretycznymi definicjami Bolzano linii, powierzchni i bryły. Na przykład odchodząc od ówczesnego rozumienia linii jako drogi poruszającego się punktu, Bolzano usiłuje zdefiniować pojęcie linii niezależnie od jakiegokolwiek idei ruchu.

*Obiekt, który zawiera wszystkie i tylko te punkty, które leżą pomiędzy dwoma punktami  $a$  i  $b$  jest nazywany linią prostą pomiędzy  $a$  i  $b$ <sup>19</sup>.*

W tej definicji „pomiędzy” (*zwischen*) jest wyrażeniem technicznym poprzednio zdefiniowanym. Teoria linii prostej ma znaczący udział jako podstawa późniejszego rozwoju teorii punktów, linii, powierzchni i bryły.

Uznaje natomiast pojęcie wielkości nieskończenie małej (jak również nieskończenie wielkiej) i definiuje ją następująco: wielkość jest nieskończenie mała, jeśli dla ustalonej jednostki każda wielokrotność tej wielkości jest mniejsza od jednostki. Ta prosta definicja (wykorzystująca pojęcia logiczne oraz pojęcia wielkości i liczby) sprawia, że pojęcie różniczki można było w sposób spójny włączyć w strukturę analizy. Nie uznawał jednak różniczki jako liczby.

W dwóch paragrafach drugiej części *Betrachtungen*<sup>20</sup> Bolzano daje uwagi na temat stosowności pewnych definicji w geometrii. Krytykuje „brzegową” definicję bryły, powierzchni, linii i punktu. Bolzano przypisuje te defini-

cje Okhamowi. W celu poprawienia ich proponuje, aby myśleć o powierzchni, linii czy punkcie bez odwoływania się do pewnych ograniczających je brył. Definicje Ockhama będą lepsze, jeśli skonstruujemy je tak, aby pojęcie linii było oparte na pojęciu punktu, pojęcie powierzchni na pojęciu linii itd. W sumie możemy zobaczyć w *Betrachtungen* Bolzano zasady jego matematycznej filozofii zgodnej z programem Leibniza.

Właśnie w pracy *Betrachtungen* chyba najwyraźniej widoczna jest metoda Bolzano. Podkreśla w niej teoretyczną rolę matematyki i jej użyteczność w ćwiczeniu i wyostrzaniu umysłu. Podaje we wstępie dwie metodologiczne reguły dotyczące dowodu – reguł, które stały się częścią jego matematycznej metodologii:

1. Żaden rodzaj oczywistości danego stwierdzenia nie zwalnia z potrzeby udowodnienia go. Trzeba dążyć do wyprowadzenia wszystkich prawd matematyki z ich ostatecznych podstaw i do otrzymania największej możliwej jasności oraz porządku wśród wszystkich pojęć nauki. Ściśle logiczny porządek pojęć i praw jest sposobem odkrywania nowych prawd w matematyce.
2. Nie jest satysfakcjonujący dowód, jeśli nie jest wyprowadzony przy użyciu wyłącznie tych pojęć, które zawarte są w dowodzonej tezie. Jeśli dowód zawiera przypadkowe, obce pojęcia, to nie może być satysfakcjonujący. Na przykład uważa, że błędem w geometrii jest używanie płaszczyzny, kiedy rozważa się twierdzenia o kątach, prostych, liniach czy trójkątach. Płaszczyzna jest obca dla tych idei.

O ile reguła druga jest całkowicie zgodna z programem Leibniza, o tyle reguła pierwsza wprowadza nową (w stosunku do Leibniza) perspektywę patrzenia na matematykę. Znajdzie to pełny wyraz w późniejszych pracach Bolzano. Zajmiemy się tym w kolejnym rozdziale pracy.

Kolejną postacią realizującą program Leibniza jest Cauchy. W latach 1814–1824 rozpoczął przebudowę podstaw analizy przyjmując za wzór ścisłości geometrię. Te wysiłki zostały zebrane w dwóch książkach: *Analyse algébrique* oraz *Calculus infinitesimal*. Cauchy oparł swoje rozważania i metody uściślenia pojęć analizy na wynikach otrzymanych z badań nad zbieżnością szeregów nieskończonych. Używał, chociaż sporadycznie, techniki  $(\epsilon, \delta)$  do definiowania ciągłości, pochodnej i całki oraz w dowodach twierdzeń, w których występowały te pojęcia. Nie używał tej metody dość precyzyjnie, gdyż nie rozróżniał między zbieżnością i zbieżnością jednostajną, sądził, że funkcja wielu zmiennych ciągła ze względu na każdą ze zmiennych jest ciągła, jak również uważał, że szereg zbieżny funkcji ciągłych daje jako sumę funkcję ciągłą<sup>21</sup>. Jego rozważania sprawiły jednak, że pojęcie granicy stało się podstawowym i istotnym narzędziem analizy. Było jednak w znacznym stopniu rozumiane w sposób intuicyjny – było to zgodne z koncepcją Leibniza, w ramach której dopiero

pojęcia dalsze, budowane w oparciu o te podstawowe, uzyskiwały rangę obiektów w pełni matematycznych.

Również pojęcie wielkości nieskończenie małej było podstawowe w jego słynnym kursie analizy<sup>22</sup>. Tę wielkość traktuje nie jako liczbę, lecz jako zmienną, która przebiega wartości zbieżne do zera. Wielkości nieskończenie małe są to podstawowe byty specjalnego rodzaju. Bez żadnych oporów wykonuje Cauchy na wielkościach nieskończenie małych operacje arytmetyczne, jak na liczbach. Samo pojęcie funkcji jest dla niego pojęciem wtórnym zbudowanym na pojęciu wielkości nieskończenie małej, a nie na odwrót, jak jest w „klasycznej” analizie zbudowanej później, między innymi przez Weierstrassa, Dedekinda i Cantora (klasycznie funkcja rozumiana jest jako para zbiorów z ustalonym przyporządkowaniem elementów jednego zbioru elementom drugiego).

Dzięki temu, że nieskończenie mała traktowana jest jako byt idealny znajdujący się na pograniczu matematyki, można przypisać jej wiele takich cech, których połączenie byłoby niedopuszczalne w oparciu o ścisłą matematyczną metodę. Nieskończenie mała istnieje uprzednio wobec działalności matematycznej, dlatego może być częściowo liczbą a częściowo nie. Jest niepodzielna jak punkt a jednak posiada również pewną rozciągłość typową np. dla odcinka (różniczka  $dx$  to nieskończenie mały odcinek) – można więc skonstruować z nieskończenie małych odcinków jak i inne wielkości rozciągłe (przez odpowiednio rozumiane sumowanie).

## 6. Program Kartezjusza

D'Alembert wystąpił z ostrą krytyką pojęcia różniczki<sup>23</sup>. Sądził on, że pojęcie nieskończenie małej nie jest w rachunku różniczkowym potrzebne. Jest pojęciem sprzecznym w sobie, gdyż traktuje się ją jako wielkość znikającą, która jednak nie znikła całkowicie; albo ta wielkość nie znikła, czyli jest wielkością skończoną, albo znikła i wtedy po prostu jej nie ma. Nie istnieje jakiś tajemniczy stan pośredni – wpuszczanie do matematyki chimery może prowadzić do zasadniczych sprzeczności. Zamiast rozumieć pochodną jako stosunek wielkości nieskończenie małych wystarczy wprowadzić pojęcie granicy i pochodną rozumieć jako granicę stosunków odpowiednich wielkości (skończonych). Dla d'Alemberta wielkość  $a$  jest granicą wielkości  $b$ , jeśli  $b$  może zbliżać się do  $a$  na odległość mniejszą od jakiegokolwiek z góry zadanej. Znaczący to, że różnica między wielkością  $a$  i  $b$  (przez którą Leibniz rozumiał wielkość nieskończenie małą) nie jest żadną wielkością, jest czymś całkowicie niewyraźnym. Jednak ta różnica nie musi nas interesować przy rozpatrywaniu granicy. Zamiast używać metafizyczne pojęcie „nieskończenie małej” wystarczy wprowadzić pojęcie operacyjne granicy wielkości skończonych i efekt jest taki sam. Na tym właśnie polega metoda Kartezjusza: nie wprowadza się do nauki niepojmowalnych do końca bytów, lecz

przy pomocy przyjętych metod i w oparciu o proste obiekty (często z innych obszarów badawczych), konstruuje się kolejne, złożone.

Metodę granic d'Alemberta rozwinął Simon Lhuillier w pracy nadesłanej na konkurs ogłoszony w 1784 przez Królewską Akademię Nauk w Berlinie<sup>24</sup>. W konkursie tym chodziło o podanie jasnej i ścisłej teorii wielkości nieskończenie małych, a właściwie o wyeliminowanie tego pojęcia z matematyki, gdyż sądzono, że wielkość nieskończona zawiera sprzeczność. Chodziło również o wyjaśnienie jak to się dzieje, że ze sprzecznego założenia otrzymano tyle prawdziwych twierdzeń<sup>25</sup>. Należało w końcu zastąpić nieskończoność przez jasną matematyczną zasadę (założenia konkursu zostały sformułowane zgodnie z sugestiami Lagrange'a i odpowiadały, jak widać, metodzie Kartezjusza). Lhuillier

wprowadził dodatkowy symbol  $\frac{dP}{dx}$ , który nie był już rozumiany jako

stosunek dwóch wielkości (nieskończenie małych), lecz był nierozdzieloną całością. To nowe pojęcie otrzymuje przy pomocy operacji przejścia granicznego

$\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$ . Zamiast pojęcia wielkości nieskończenie małej stosuje pojęcie wiel-

kości zmiennej nie mającej granicy małości (*la faculté de ne pouvoir pas être terminée*). Jest to znowu pojęcie operacyjne raczej niż „aktualny” byt.

Podobnie w duchu kartezjańskim jest teoria funkcji pochodnych Lagrange'a<sup>26</sup>. Uważał on rachunek różniczkowy i całkowy Leibniza za rachunek kompensujących się błędów i sądził, że nie istnieje możliwość rozwiązania tego problemu w tym duchu. Bo jak można rozpatrywać stosunki między „zerami” (różniczkami), a później opuszczać wyrażenia, w których te „zera” występują. W teorii Lagrange'a, aby uniknąć przy definiowaniu pochodnej pojęcia nieskończenie małej (różniczki) wykorzystuje się metodę rozwijania funkcji  $f$  w szereg potęgowy. Pochodna  $f'$  funkcji  $f$  jest po prostu współczynnikiem przy pierwszej potędze rozwinięcia funkcji  $f$ . Pochodne kolejnych rzędów są współczynnikami rozwinięcia przy kolejnych składnikach rozwinięcia. Tę myśl uczynił Lagrange fundamentem całej analizy. Samo rozwijanie funkcji w szereg potęgowy należało przeprowadzić w sposób czysto algebraiczny. Zostało wyeliminowane pojęcie nieskończenie małej, wielkości znikającej, granicy, fluksji.

W oparciu więc o jasne i oczywiste pojęcie (pojęcie rozwinięcia w szereg) innej teorii można uniknąć potrzeby operowania pojęciami mętnymi mającymi uzasadnienie jedynie w intuicji. Całe rozumowanie oparte było jednak na założeniu, że każdą funkcję można rozwijać w szereg potęgowy (było to założenie powszechnie przyjmowane w XVIII wieku) i dodatkowo, że formalne przekształcenia algebraiczne na szeregach są zawsze dopuszczalne i zachowują własności odpowiadających im funkcji.

Zauważmy, że w przypadku metody Leibniza przyjmowało się jako intuicyjnie oczywiste pojęcie wielkości nieskończenie małej czy wielkości znikającej, natomiast Lagrange (realizujący program kartezjański) za takie intuicyjnie



oczywiste byty uznawał działania i metody algebraiczne oraz ich stosowanie do analizy. Według koncepcji Kartezjusza do metod badawczych docieramy poprzez ogólne przed-matematyczne rozważania i w samej matematyce są one traktowane już jako oczywiste źródło prawdy. W przypadku Leibniza tymi przed-matematycznymi bytami są nie metody badawcze, lecz pewne pojęcia (jak np. pojęcie wielkości nieskończenie małej).

Zauważmy, że metoda kartezjańska próbuje pokazać niesprzeczność drugiej alternatywy argumentu A3 Zenona z Elei (por. rozdział II § 5) – jeśli byt jest podzielny i podział ten przebiega w nieskończoność, to każda otrzymywana w trakcie podziału część ma wielkość; byt jest więc dowolnie dużą sumą wielkości, czyli sam jest nieskończony, co jest niedorzecznością. Tak argumentuje Zenon, a zgodnie z metodą kartezjańską trzeba odpowiedzieć, że nie rozpatruje się „dowolnie dużych sum wielkości”, lecz wyłącznie przeprowadza się operacje brania granicy wielkości skończonych – ta granica okazuje się w pewnych przypadkach skończona i znika tym samym zasadność paradoksu.

Natomiast metoda leibnizjańska ukazuje możliwość zneutralizowania pierwszej alternatywy argumentu Zenona – jeśli byt jest podzielny i efektem tego dzielenia są części niepodzielne, a więc pozbawione wielkości, to wtedy taka część pozbawiona wielkości po dołączeniu do jakiejś wielkości nie powiększa jej; sam byt, będący sumą takich części musi również być pozbawiony wielkości, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Jednak niepodzielne nieskończenie małe Leibniza nadają się do tworzenia wielkości (bytów podzielnych).

Jak pokażemy w rozdziale V w swojej filozofii Husserl przeciwstawia się nowożytniej idei nauki. Istnieje jednak przynajmniej jeden punkt, w którym jego poglądy okazują się bliżej wizji Leibniza niż Kartezjusza. To krótkie spojrzenie pozwoli, jak sądzę, lepiej zrozumieć analizowane różnice między tymi nowożytnymi filozofami. Niech podstawą będzie praca Husserla *O pochodzeniu geometrii*<sup>27</sup>.

Aby zrozumieć, czym jest wiedza geometryczna, jakie jest źródło jej sensu musimy spytać się o pierwotny sens przekazanej nam przez tradycję tej jedynej geometrii obowiązującej teraz i od zawsze. Husserl zauważa, że to, iż „wszystkie nowe użytki wyrażają rzeczywistą prawdę geometryczną, jest rzeczą a priori pewną”, pod warunkiem, że „reaktywują pierwotne aktywności zamknięte w podstawowych pojęciach, bez ‘co’ i ‘jak’ przednaukowych tworzyw tych aktywności”<sup>28</sup>. Jeśli tego nie czynią, jeśli nie reaktywują prapoczątków, a jedynie przekazują metody konstruowania nowych twierdzeń, to są nieautentyczne.

Husserl zarzuca geometrii i nie tylko geometrii brak autentyczności. Nauka musi wrócić do teoriopoznawczego uzasadnienia samej siebie, gdyż z zasady historia nauk szczegółowych, w sensie zwykłej historii faktów, nic z tego, co należy do jej tematu, nie może uczynić zrozumiałym<sup>29</sup>. Każdy obiekt (byt) istniejący w danej nauce rozwija się przyjmując ciągle nowe znaczenia – ma wewnętrzną strukturę sensu. Nie chodzi o badanie i porównywanie różnych faktów (sprowadza się to do patrzenia na naukę z perspektywy praktyk magicznych jej uprawia-

nia, gdyż właściwych niemal wyłącznie dla ludzi danej epoki), lecz o uchwycenie **jedności** danego obiektu występującego w różnych historycznych przejawach. Dany teraźniejszy obiekt jest nawarstwieniem sensów ufundowanych w pewnym pra-sensie, który badania historyczne powinny odkryć.

## Przypisy:

<sup>1</sup> F. Rosenzweig, *Gwiazda Zbawienia*. Tłum. T. Gadacz, Kraków 1998, s. 74-75.

<sup>2</sup> R. Descartes, *Discours de la methode*. Z oryginału francuskiego przełożyła, opatrzyła wstępem od tłumacza i przypisami Wanda Wojciechowska, Warszawa 1988 s. 22-23.

<sup>3</sup> Można w tym miejscu sformułować kryterium racjonalności sceptycyzmu: sceptycyzm (wątpienie) jest racjonalny, jeśli

a) nie poddaje w wątpliwość samego faktu myślenia oraz

b) jego efektem jest fakt myślenia, traktowanego jako nieprzekraczalny element świata.

<sup>4</sup> R. Descartes, *Medytacje o pierwszej filozofii*. Tłum. Izydora Dąmbska, Warszawa 1958 s. 87.

<sup>5</sup> Tamże s. 89.

<sup>6</sup> O ile *cogito* pełni rolę absolutu poznawczego w sposób bezpośredni i naturalny, o tyle w przypadku pojęcia Boga dopiero projekt nauki i jego skuteczność uprawomocnia tę rolę. Może to prowadzić do „uzależnienia” Boga od nauki.

<sup>7</sup> R. Descartes, *Rozprawa o metodzie*, s. 41-42.

<sup>8</sup> R. Descartes, *Medytacje o pierwszej filozofii*, s. 89.

<sup>9</sup> Uważam, że wyniki naukowe Newtona są dowodem możliwości kartezjańskiej koncepcji *mathesis universalis*. U Newtona z jednej strony jest ścisła matematyka, z drugiej fizyka, która zajmuje się przybliżoną konstrukcją form matematycznych. Różnicę między matematyką a fizyką można sprowadzić do stopnia ścisłości – między prawami matematyki a fizyki istnieje ciągle przejście (I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Cambridge 1972 s. 10). Dzięki tej ciągłości staje się możliwe przejście ze świata myśli, w którym powstaje matematyka, do świata materialnego opisywanego przez fizykę, bez tworzenia żadnych dodatkowych bytów. Przykładem jest stworzony przez Newtona rachunek różniczkowy wykorzystany do opisu zjawiska ruchu. Pojęcie ruchu, które od czasów starożytnych przyprawiało uczonych o zawrót głowy (*vide* paradoksy Zenona z Elei) zostało zmatematyzowane i stało się niesprzeczne. Podobnie argumentem za *mathesis universalis* było prawo powszechnej grawitacji. Ukazywało ono, że nie ma sprzeczności między prawami świata podksiężycowego a nadksiężycowego – obowiązują w nich te same prawa natury.

<sup>10</sup> G. W. Leibniz, *Opusculi et fragmenta inedita de Leibniz*, Paryż 1903 s. 49-57.

<sup>11</sup> G. W. Leibniz, *Early Mathematical Manuscripts*, Chicago 1920 s. 147.

<sup>12</sup> Tego typu zasad, jak zasada ciągłości, można wskazać w nauce nowożytnej więcej, np. zasadę najmniejszego działania, czy zasadę mówiącą o możliwości połączenia różnych wielkości przy pomocy funkcji. Nie jest ich jednak wiele, a każda z nich stanowi ogromne bogactwo problemów, których rozwiązywanie decydowało w znacznej mierze o kierunkach rozwoju nauki.

<sup>13</sup> Termin ten zastosował L. Carnot w pracy *Géométrie de position* (Paryż 1803), następnie Christan von Staudt i inni.

<sup>14</sup> G. Grua, *Textes inédits de G. W. Leibniz d'après les Manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre*, Paryż 1948, t. II ss. 553-555.

<sup>15</sup> C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*, Warszawa 1964 s. 311.

<sup>16</sup> G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.

<sup>17</sup> G. F. A. de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696.

<sup>18</sup> B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague 1817.

<sup>19</sup> Ein Ding, welches alle jene, und nur jene Punkte enthält, die zwischen den zwey Punkten *a* und *b* liegen, heisst eine gerade Linie zwischen *a* und *b* (B. Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Praga 1804 s. 57).

<sup>20</sup> B. Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, 1804 r.

<sup>21</sup> A. L. Cauchy, *Analyse algébrique*, 37-38.

<sup>22</sup> A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris 1821.

<sup>23</sup> J. R. d'Alembert: *Différentiel* oraz *Limite*. [w:] *Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières (Mathématiques)*. T. 4 oraz 9 Paris-Liège 1784-1789.

<sup>24</sup> S. Lhuillier, *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlin 1786.

<sup>25</sup> W tej dyskusji wziął również udział Berkeley wskazując na te właśnie sprzeczności leżące u podstaw matematyki. Według niego podważały one wartość nowej nauki.

<sup>26</sup> J. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797.

<sup>27</sup> E. Husserl, *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentionalhistorisches Problem*, [w:] „Revue Internationale de Philosophie” 1939 R. 1 nr 2 s. 203-225.

<sup>28</sup> Tamże s. 23-24.

<sup>29</sup> Tamże s. 30.





## Rozdział V

### Nowy program matematyzacji wiedzy

W XIX wieku pojawiły się w matematyce nowe metody badawcze i ponadto ujawniło się nowe spojrzenie na istotę i zadania matematyki. Dało to w konsekwencji możliwość głębszego wniknięcia w zagadnienie *continuum*. Bardzo istotne dla tych przeobrażeń było sformułowanie przez Bolzano i Riemanna nowego programu matematyzacji wiedzy. Była to idea nauki uniwersalnej na wzór *mathesis universalis* Kartezjusza czy Leibniza, jednak różniła się od tamtych w kilku punktach.

Przełom, który dokonał się za sprawą tych dziewiętnastowiecznych matematyków, doprowadził do powstania nowych jakościowo teorii matematycznych, lecz przede wszystkim był związany ze zmianą mentalności – zaczęła ona ogarniać kolejne obszary nauki. Bolzano rozpoczyna swoją działalność naukową w 1804 r. (pracą *Betrachtungen*), która kończy się wraz z jego śmiercią w 1848 r., natomiast twórczość Riemanna obejmowała okres 1851-1862 (na cztery lata przed śmiercią choroba praktycznie sparaliżowała twórczą działalność Riemanna) – lata te są czasem rodzenia się nowych idei, które stały się podstawą nauki współczesnej.

W pierwszej części rozdziału przyjrzymy się refleksji filozoficznej Riemanna nad nauką. Będzie to stanowiło podstawę przy analizowaniu różnic między nowożytną wizją nauki uniwersalnej (określoną głównie przez Kartezjusza i Leibniza) a paradygmatem, który wyłania się z refleksji Bolzano i Riemanna.

Filozoficzne wysiłki Riemana skoncentrowane są głównie w trzech pracach: *Zur Psychologie und Metaphysik* (Z psychologii i metafizyki), *Erkenntnistheoretisches* (Z dziedziny teorii poznania) oraz *Naturphilosophie* (Filozofia Naturalna)<sup>1</sup>. Prace te nie są obszerne, stanowią jednak zarys wielkiego planu budowy systemu filozoficznego w oparciu o wyniki i ustalenia nauk szczegółowych. Widać, że jedynie choroba i przedwczesna śmierć nie pozwoliły Riemannowi zrealizować tego dzieła. W *Dictionary of Scientific Biography* Hans Freudenthal pisze: „Rieman's evolution was slow and his life short. What his work lacks in quantity is more than compensated for by its superb quality. One of the most profound and imaginative mathematicians of all time, he had a strong inclination to philosophy, indeed, was a great philosopher. Had he lived and worked longer, philosophers would acknowledge him as one of them”<sup>2</sup>.

Warto zauważyć, że faktami naukowymi są dla Riemanna nie tylko wyniki nauk szczegółowych, lecz również przemyślenia i refleksje filozoficzne

m.in. Kanta i Herbarta. Nie istnieją w tej pracy aprioryczne ustalenia dotyczące zakresu i znaczenia omawianych pojęć – takie pojęcia jak np. „system pojęć” (*das Begriffssystem*), „objaśnianie przyrody” (*die Natur auffassen*), „powierzchniowa warstwa zjawisk” (*die Oberfläche der Erscheinungen*), „ciągła zmiana” (*die stetige Veränderung*) czy „związek przyczynowy” (*die Causalität*) uzyskują sens i właściwe (ściśle) znaczenie poprzez kontekst nauki, w który są uwikłane. Nie jest to powszechny sposób uprawiania filozofii, gdyż bez rozumienia wyników nauk szczegółowych, stanowiących bazę danych rozważań, te rozważania mogą zgubić swój sens. Dlatego kluczową częścią tego rozdziału, pozwalającą uchwycić koncepcję filozoficzną Riemanna, są te fragmenty, w których pokażę kontekst filozofii Riemanna tzn. niektóre jego idee i pomysły w obszarze matematyki.

Z drugiej strony filozofia poznania, którą Riemann przyjmował, stanowiła podstawę jego metod badawczych w obszarze matematyki, fizyki jak również w ramach tzw. filozofii naturalnej. Nie istniał dla niego rozdział pomiędzy różnymi obszarami wiedzy, a wszelkie zbyt daleko idące specjalizacje, tzn. specjalizacje, w których jest się głuchym na istotne wyniki innych nauk, były dla Riemanna zaprzeczeniem prawdziwej wiedzy – jego praca naukowa miała więc charakter unifikacyjny.

Mimo, iż raczej nie było bezpośredniego oddziaływania prac Bolzano na Riemanna, to jednak można traktować idee Riemanna jako kontynuację pomysłów Bolzano w zakresie przebudowy podstaw matematyki i budowy nowej koncepcji *mathesis universalis*. W ramach tej nowej koncepcji rodzą się pomysły prowadzące do teorii wymiaru, teorii *continuum* rzeczywistego Dedekinda czy teorii mnogości Cantora. W projekcie Bolzano pojawia się bardzo wyraźnie idea przebudowy podstaw logicznych matematyki. Miała ona duże znaczenie dla powstania nowych działów matematyki, chociaż ten wpływ dokonał się głównie za sprawą prac Riemanna.

Oczywiście konieczność przebudowy podstaw matematyki, w szczególności analizy, dostrzegana była i postulowana również przez innych matematyków, między innymi przez Cauchy’ego, Dirichleta, Dedekinda i Weierstrassa. Wszyscy oni byli niezadowoleni z braku solidnych podstaw analizy – chodziło głównie o sprecyzowanie lub wyeliminowanie takich pojęć jak granica, ciągłość, funkcja czy nieskończenie mała. Weierstrass np. proponuje, w swoim inauguracyjnym wykładzie na posiedzeniu Berlińskiej Akademii Nauk podjąć badania nad głębszym zrozumieniem relacji między matematyką a naukami przyrodniczymi – w tych badaniach upatruje szansę uzdrowienia analizy matematycznej.<sup>3</sup> Natomiast Dedekind stwierdza, że należy odrzucić błyskotliwą intuicję jako podstawę nowych matematycznych odkryć. Do zapewnienia matematyce właściwego rozwoju wystarczający jest rygor prostych algebraicznych prawd. Brak jest jednak u tych matematyków tak śmiałej wizji przebudowy całego gmachu wiedzy, jaką można dostrzec w pracach Bolzano i Riemanna, i oparcia tej przebudowy na nowych teoriach matematycznych, które należy dopiero stworzyć.

## 1. Filozofia poznania Riemanna

Zacznijmy od zadań jakie stawia Riemann nauce (i sobie) w pracy *Erkenntnistheoretisches*. Już zaraz na początku pisze: *Naturwissenschaft ist der Versuch, die Natur durch genaue Begriffe aufzufassen*.<sup>4</sup> Należy więc stworzyć system ścisłych pojęć (*genaue Begriffe*) i tylko one są w stanie „wpisać się” w przyrodę. Riemann sądzi, że nadszedł już czas dla nauki, aby wniknąć w istotę zjawisk przyrody głębiej niż to było zrobione przez Galileusza i Newtona w odniesieniu do astronomii i fizyki. Chodzi mu nie tyle o opisanie zjawisk przyrody (co, według niego, dobrze zrobili wyżej wspomniani uczeni), co o znalezienie przyczyn tych zjawisk. Pojęcia funkcjonujące w naukach tworzą pewien system, który powinien być tak uzupełniany lub przetwarzany, aby mógł wyjaśnić nieoczekiwane wcześniej doświadczenia – ten proces uzupełniania systemu pojęć doprowadza do wzrostu zdolności poznawczych i sprawia, że poznanie sięga poza powierzchnioną warstwę zjawisk, a więc do ich istoty. Według Riemanna system pojęć służy do logicznego objaśniania przyrody, czyli w połączeniu z poprzednim fragmentem, możemy sądzić, że logika systemu pojęć ma kluczowe znaczenie dla uchwycenia istoty obserwowanych zjawisk. I, co ważniejsze, zdolność przewidywania nowych zjawisk zależy wyłącznie od ścisłości pojęć. Z jednej strony, system pojęć jest uzupełnieniem postrzegania zmysłowego, natomiast z drugiej, obserwowane nieprzewidywanych przez system zdarzeń, prowadzi do uzupełnienia systemu pojęć. W ten sposób otrzymujemy ważne sprzężenie zwrotne między rzeczywistością a strukturą logiczną systemu pojęć, które, według Riemanna, umożliwia wniknięcie w istotę zjawisk.<sup>5</sup> Przy okazji możemy zwrócić uwagę na ukazany przez Riemanna ogólny mechanizm generowania nowych pojęć – nowe pojęcie rozszerzające i uzupełniające system zostaje wygenerowane, gdy podczas próby objaśniania zjawisk pojawia się sprzeczność między przewidywaniami teorii a tym, co rzeczywiście ma miejsce. Pojęcia mają swoją genezę w doświadczeniu zmysłowym i odpowiedzialny za ich powstanie jest wyłącznie „obszar styku” między logiczną strukturą systemu a zjawiskiem. Czym jest ten „obszar styku” – czy jest częścią świata zjawisk, czy częścią systemu pojęć, czy wreszcie ma swoją własną strukturę?

Riemann proponuje spojrzeć na ten problem poprzez, kluczowe dla poznania i wiedzy, pojęcia **ciągłej zmiany** (*stetigen Veränderung*) i **związku przyczynowego** (*Causalität*). Załóżmy, że obserwujemy przechodzenie pewnej rzeczy z jednego stanu w drugi, bez nagłej zmiany. Pojęcie, które „zderza się” z tym doświadczeniem, to pojęcie „rzeczy dla siebie”. Rzecz zostaje tym czym była, jednak nastąpiła „jakaś” zmiana. Chcąc ocalić racjonalność struktury *doświadczenie-pojęcie* musimy założyć, że rozpatrywana rzecz przechodzi z jednego stanu w drugi przez wszystkie stopnie pośrednie. Pojawia się więc pojęcie ciągłej zmiany. Ponadto, z tego samego powodu co powyżej, musimy założyć, iż rzecz zostałaby tym czym była, gdyby nie doszło do niej coś nowe-



go, czyli pojawia się pojęcie związku przyczynowego. Badając przyczynę zmienności badamy zarazem ten obszar styku między logiką a rzeczywistością, który generuje pojęcia. I jak pisze Riemann: W tym leży potrzeba badania przyczyny wszelkiej zmienności (*Hierin liegt der Antrieb, zu jeder Veränderung eine Ursache zu suchen*).<sup>6</sup>

Jest to postawienie ogólnego i odwiecznego „filozoficznego” problemu – wyjaśnienia czym jest jakakolwiek zmienność, jaka jest jej istota.

Chcąc odpowiedzialnie badać obszar styku między logiką a rzeczywistością, należy odpowiedzieć na pytanie, kiedy poznanie i rozumienie świata uznajemy za prawdziwe? To, co proponuje Riemann jest, na pierwszy rzut oka, wyłącznie pewną wersją klasycznej definicji prawdy:

**Poznanie jest prawdziwe, jeśli całokształt przedstawień odpowiada całokształtowi rzeczy (Wenn der Zusammenhang unserer Vorstellungen dem Zusammenhange der Dinge entspricht)**<sup>7</sup>

Poszczególne elementy systemu mogą znacznie się różnić od poszczególnych elementów rzeczywistości, jednak związki między tymi elementami muszą być jednakowe. Tym samym, ze związków między zjawiskami, otrzymujemy informacje o związkach między rzeczami. Jest to ten obszar rzeczywistości, który nie jest zamknięty przed możliwościami poznawczymi – umysł poznający ma możliwość dotarcia do istoty rzeczywistości. Co należy więc do istoty rzeczywistości, czyli w oparciu o co jest poznawany związek między rzeczami? I tutaj podaje Riemann dwa takie elementy:

1. Ilościowe, czasowo-przestrzenne zależności oraz
2. Stosunki intensywności danych własności i ich jakościowe rozróżnienia.

I znów, na przykładzie pojęcia związku przyczynowego oraz zmienności, Riemann wyjaśnia swoje stanowisko. Odwieczny problem zmienności staje się w rękach Riemanna „kamieniem filozoficznym”, pozwalającym zamienić *doxa* w *episteme*. Przyjrzyjmy się temu dokładniej. Ponieważ to, co tworzy strukturę tego pojęcia (tzn. pewien układ zależności między częściami składowymi) musi być takie samo w różnych rodzajach i przejawach zmienności (w oparciu o definicję prawdy Riemanna), więc otrzymujemy podział pojęcia zmienności na trzy części składowe:

A – „podmiot” zmienności, czyli to, co działa;

B – „przedmiot” zmienności, czyli to, do urzeczywistnienia czego dąży to, co działa.

C – zależność między podmiotem i przedmiotem zmienności, która sprowadza się do zdeterminowania przedmiotu zmienności przez podmiot zmienności, co oznacza, że działanie zależy wyłącznie od istoty działającego.

Przy takim podziale pojęcia zmienności można zauważyć, że konieczne jest, aby to co działa, nakierowane było na tworzenie lub zachowanie samego

siebie. W innym przypadku niemożliwe stałoby się całkowite zdeterminowanie przedmiotu zmienności podmiotem.

Gdyby tym działającym była rzecz (przez „rzecz” Riemann rozumie byt jednostkowy, coś, co jest maksymalnie proste, nie podlegające dalszemu rzeczywistemu podziałowi), to dochodzimy do stwierdzenia, że ta rzecz miałaby różne stopnie bycia, czyli nie byłaby do końca tym, czym jest. Taką możliwość Riemann odrzuca i tym samym otrzymuje konkluzję, że, jeśli coś działającego dąży do zachowania lub tworzenia samego siebie, to tym działającym może być wyłącznie stan lub stosunek – bo tylko one podlegają stopniowaniu. Rzeczą, w rozumieniu Riemanna, jest więc byt, który nie jest układem innych bytów – jest to możliwie najprostsza podstawa rzeczywistości. Jeśli więc dwie rzeczy  $a$  i  $b$  wchodzi z sobą w związek, dzięki pewnej przyczynie zewnętrznej, to albo z samej tej zależności, albo ze zmiany jej stopnia, może wynikać pewien skutek  $c$ . Prościej jest przyjąć, jak uważa Riemann, że  $c$  jest skutkiem ich zależności.

Rzeczywistość składa się więc z maksymalnie prostych bytów oraz z zależności między nimi. Jakikolwiek związek przyczynowy dotyczy zależności między rzeczami, a nie samych rzeczy. Tak samo jest w przypadku związku między podmiotem poznającym a rzeczywistością – poznawane są związki i zależności między rzeczami, czyli przyczyną prawdziwości poznania jest całość kształtu zależności między rzeczami. Pojęcie całokształtu usuwa niebezpieczeństwo posuwania się w konstrukcji związku przyczynowego *ad infinitum* – całokształt zależności jest niezmiennikiem poznania, więcej, absolutem poznawczym określającym, z jednej strony, strukturę rzeczywistości, a z drugiej, strukturę poznawczą (związek między podmiotem i rzeczywistością poznawaną) a w konsekwencji ujmującym prawdę procesu poznawczego.

Wszelkie związki przyczynowe sprowadzają się więc do zależności między rzeczami, a ponieważ te zależności odczytujemy z doświadczenia, stąd również związki przyczynowe należy ustanawiać w oparciu o doświadczenie. Jednak, ponieważ poznawanie rzeczywistości (które w istotny sposób zależne jest od systemu pojęć) należy do całokształtu zależności między rzeczami, istnieje obowiązek poprawiania i dopełniania obserwowanych zjawisk następującymi po nich rozumowaniami. W budowanej teorii naukowej, istotnymi składnikami budowli są hipotezy, przez które Riemann rozumie obserwacje (zależności między rzeczami) po ich rozumowej analizie, a nie czyste spekulacje czy „spekulacje” utworzone choćby w oparciu o dane doświadczalne. Przy takim rozumieniu hipotezy Riemann wyraźnie przeciwstawia się koncepcji Newtona, dla którego „*Quoniam quid enim ex phaenomenis non deducitur, hypothesis vocanda est*”. Hipoteza, w ujęciu Riemanna, to całokształt zależności między obserwowanymi zjawiskami, jak również między tymi zjawiskami a systemem uniesprzeczniających je pojęć. Według niego prawa ruchu są w istocie hipotezami, w jego rozumieniu tego słowa.<sup>8</sup>

Zauważmy, że tak „nowoczesne” rozumienie hipotezy (będącej nierozdzielny połączeniem faktów doświadczalnych i rozumowań) pojawiło się na

początku drugiej połowy dziewiętnastego wieku – przed wystąpieniami pozytywistów i neopozytywistów i wieloletnimi dyskusjami na temat „gołych faktów” w naukach przyrodniczych, i rzekomej konieczności eliminacji „spekulacji” z nauki.

## 2. Filozofia naturalna (Naturphilosophie)

Praca Riemanna dotycząca filozofii naturalnej miała być kontynuacją dzieła Newtona. Składa się ona z trzech części: *Molecularmechanik*, *Gravitation und Licht* oraz *Neue mathematische Principien der Naturphilosophie*. Chodziło w niej Riemannowi o znalezienie istoty zjawisk, których opis znajduje się w dziełach Newtona. Stanie się to możliwe poprzez wskazanie odpowiednich struktur matematycznych generujących dane prawa przyrody.

Riemann rozpoczyna od pytania: jak opisać ruch punktów materialnych  $m_1, m_2, \dots$  w przestrzeni, pod działaniem sił  $X_i, Y_i, Z_i, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ , jeśli siły  $X_i, Y_i, Z_i$  działają równolegle do osi układu współrzędnych, a punkt o masie  $m_i$  ma współrzędne  $x_i, y_i, z_i$ ?

Oczywiście zostało to już zrobione przez Newtona w jego mechanice, przy pomocy praw ruchu. Riemannowi chodzi jednak o to, aby znaleźć (zgodnie ze swoją koncepcją filozoficzną) taką ogólną matematyczną strukturę, która ujmowałaby występujące w opisywanym zjawisku zależności – wówczas prawa ruchu powinny wyłonić się z tej struktury przy pomocy pewnej hipotezy „generującej” (przez którą rozumiem hipotezę uzupełniającą tę strukturę, zgodnie z filozofią Riemanna). Przyjęta przez Riemanna struktura ma postać:

$$(S) \quad \sum m_i \left\{ \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z_i}{dt^2} - \frac{Z_i}{m_i} \right)^2 \right\}$$

Natomiast hipotezą generującą prawa ruchu okazuje się zasada najmniejszego działania domagająca się, aby powyższe wyrażenie stało się minimalne. Ponieważ minimalną wartością tego wyrażenia jest zero, więc otrzymujemy znane prawa ruchu:

$$(N) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i$$

Zauważmy, że wyrażenie (S) wraz ze sposobem otrzymania równań (N) ma bardzo ścisły związek z metodą, którą Dirichlet wprowadził w pracy *Über einen neun Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist* w roku 1850. Chodzi o znalezienie funkcji potencjału  $V$  w całym obszarze kuli określonej na jej brzegu, która spełnia równanie Laplace’a:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0$$

Ta metoda, nazwana przez Riemanna zasadą Dirichleta odgrywa ogromną rolę w wielu fizycznych i matematycznych teoriach. Riemann wyko-rzystał ją po raz pierwszy w pracy *Theorie der Abel'schen Functionen*.<sup>9</sup>

W kolejnym fragmencie zastanawia się Riemann nad przyczynami praw, które rządzą spadającymi ciałami oraz ruchem ciał niebieskich. Można je ująć w formę następujących założeń:

- 1) Istnieje nieskończona przestrzeń posiadająca własności opisywane przez geometrię oraz istnieją ciała ważkie, które zmieniają swoje położenie w tej przestrzeni w sposób ciągły.
- 2) W dowolnej chwili dowolny ważki punkt materialny posiada „coś”, czemu przysługuje wielkość i kierunek, i uwarunkowany przez nie ruch. Gdyby ciało materialne było w przestrzeni tylko jedno albo nie zmieniałoby ono swego położenia, albo poruszałoby się po prostej ze stałą prędkością (dlatego, że posiada to „coś”, co samo z siebie się nie zmienia). Nie można, jak uważa Riemann, uzasadniać powyższego prawa dynamiki zasadą racji do-statecznej (jak robił to Newton), gdyż przyczyna ruchu ciała materialnego winna znajdować się wewnątrz układu materii.
- 3) W dowolnej chwili w każdym punkcie istnieje „coś”, co ma określoną wielkość i kierunek (siła przyspieszenia), i co przekazuje znajdującemu się tam punktowi materialnemu (jakikolwiek by on nie był<sup>10</sup>) określony ruch, który nakłada się w sposób geometryczny na ruch, który ten punkt już po-siadał.
- 4) W każdym punkcie materialnym  $p$  istnieje „coś”, co ma określoną wielkość (absolutna siła ciężenia) i co wytwarza w każdym punkcie przestrzeni siłę przyspieszenia odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości od punktu  $p$ , i proporcjonalną do, właściwej temu punktowi, absolutnej siły ciężenia. Ta siła przyspieszenia sumuje się w sposób geometryczny ze wszystkimi innymi siłami przyspieszenia.

Widać wyraźnie, iż Riemann próbuje „domknąć” teorię Newtona, aby po-trzebne założenia nie były jakimiś dodatkowymi („filozoficznymi” czy „intu-icyjnymi”) założeniami, lecz stanowiły integralną część systemu. Trzeba zna-leźć taki system, który zawrze w sobie i uściśli wszystkie niezbędne zasady, pojęcia i struktury. I taki system, według Riemanna, jest możliwy. Według Riemanna, trzeba jednak przyjąć, że wszystkie własności przestrzeni są opisy-walne przez geometrię. A ponieważ do tych własności przestrzeni należy moż-liwość ciągłego przemieszczania się w niej ciał oraz zdolność przekazywania sił przyspieszenia i ciężenia, więc również sam ruch ciał, oddziaływania bezwład-nościowe i grawitacyjne muszą znaleźć opis w odpowiedniej strukturze geome-



trycznej. Ponadto siły te podlegają tym samym regułom matematycznym i można zamiast dwóch osobnych sił (przyspieszenia i absolutnej siły ciężenia) rozpatrywać w każdym punkcie ich sumę jako siłę ciężenia.

W dalszym ciągu rozważań Riemann stwierdza, że poza zjawiskami grawitacyjnymi istnieją jeszcze zjawiska rozchodzenia się światła. Wprowadza kolejne hipotezy, które mają uzupełnić budowany system, połączyć w jednym systemie te oddziaływania i doprowadzić do głębszego wnिकnięcia w przyczynę zjawisk:

1. Jednorodną materię, którą wypełniona jest przestrzeń, można traktować jak przestrzeń fizyczną, której punkty przemieszczają się w przestrzeni geometrycznej. Jedynymi zjawiskami, które mają być wyjaśnione ruchem tej materii, są siła ciężenia i rozchodzenie się światła.
2. Ruch tej materii rozkłada się na dwa ruchy – ruch, który wyjaśnia siłę ciężenia oraz ruch wyjaśniający zjawisko rozchodzenia się światła.

W oparciu o te założenia należy, według Riemanna, prowadzić dalsze badania, które powinny przebiegać w dwóch etapach:

1. Odkrywanie praw ruchu materii, dzięki czemu uzyska się opis zjawisk – jest to matematyczny etap badań.
2. Odkrywanie przyczyn, które powodują ruch materii – jest to etap filozoficzny, równie ważny jak pierwszy, a następujący w istotny sposób po etapie matematycznym. Ruchu materii nie można wyjaśnić w sposób fizyczny, poprzez przyciąganie i odpychanie się jej części. Należy poszukiwać „prawdziwych”, głębszych wyjaśnień tego ruchu. Według Riemanna przyczyna tego ruchu powinna tkwić w wewnętrznym układzie materii. I stąd nie jest właściwe wyjaśnianie praw ruchu zasadą przyczyny dostatecznej (jak robił to Newton), gdyż sama ta zasada jest pewnym bytem spoza układu materii, i należałoby dla układu materii wraz z tą zasadą zbudować pewien meta-układ, który miałby swoją wewnętrzną strukturę, opartą na logicznym układzie ścisłych pojęć.

Riemann poszukuje więc zasad, które stanowią podstawę praw ruchu, korzystając z doświadczenia wewnętrznego, a dokładniej analizując mechanizm postrzegania i zapamiętywania. Odwołuje się przy tym do rozważań i konkluzji filozoficznych Herberta. Tego typu metoda filozoficznych rozważań wynika z przyjętej przez niego definicji prawdy – prawdą jest to, co pozostaje niezmiennie, jednakowe w określeniu zależności między elementami różnych układów, w których te zależności występują.

Przypomnijmy krótko te poglądy Herberta, które miały szczególny wpływ na rozumowanie Riemanna. Herbart w swojej filozofii zasadniczo odszedł od Kanta. Sądził, że doświadczenie ma za przedmiot rzeczy uporządkowane przestrzennie i czasowo. Było to wyjście od potocznych przekonań i intuicji. Uważał jednak, że potoczne przekonania zawierają sprzeczności i filozo-

fia wychodząc od potocznych przekonań musi te sprzeczności wskazać, i zastąpić je pojęciami wolnymi od sprzeczności. Są trzy podstawowe sprzeczności dotyczące pojęcia rzeczy, własności rzeczy i jaźni:

1. Pojęcie rzeczy – jest skończoną jednością i zarazem podzielną w nieskończoność mnogością.
2. Własności rzeczy – są zależne od rzeczy, którym przysługują a zarazem są uwarunkowane przez inne czynniki.
3. Jaźń – jest jednością a zarazem obejmuje wiele stanów psychicznych.

Metafizyka (nauka) musi wyzwolić się od tych sprzecznych pojęć. W tym celu Herbart oparł się na dwóch podstawowych zasadach metafizycznych: 1. każdy elementarny byt działa tak, aby zachować siebie i przeciwdziała przez to innym bytom. 2. Całość świata wytworzona przez te wzajemne oddziaływania oddziałuje również na jednostki.

Według Herbarta istniejące są jedynie elementarne realne byty, które są od siebie niezależne i jakościowo różne. Jakości tych jednak nie poznajemy, lecz tylko stosunki między nimi. Wiedza o bycie może być jedynie formalna.

Głównym zastosowaniem jęgo metafizyki była psychologia. Za jednostki psychiczne uważał wyobrażenia. Walczą one o utrzymanie się w świadomości z innymi próbującymi je zastąpić wyobrażeniami. Stany psychiczne są kombinacją odpychających i przyciągających się wyobrażeń. Życie psychiczne to mechanika wyobrażeń poddana ścisłym prawom, które można ująć w formę matematyczną: 1. prawo kojarzenia-percepcji (wyobrażenia zależne są od bodźców i od związków z innymi wyobrażeniami); 2. Prawo apercepcji (wyobrażenia zależne są od całości nagromadzonych uprzednio w świadomości wyobrażeń i ważna jest kolejność w jakiej te wyobrażenia powstawały). 3. Prawo zależności percepcji od apercepcji. Każde wyobrażenie posiada więc swoją indywidualną historię, a popędy i uczucia to pewne odchylenia i zakłócenia w procesie powstawania wyobrażeń.

Opierając się na filozofii Herbarta Riemann sądzi, że do umysłu dochodzą w sposób ciągły liczne przedstawienia, które szybko z niego znikają, nie posiadając długotrwałego wpływu na spostrzeżenia. Natomiast u podstaw każdego aktu świadomości tkwi coś, co pozostaje po znikających przedstawieniach i ujawnia się dzięki przyczynom innego rodzaju, zawartych w procesie pamięci. Czym jest ta „pozostałość”, która wchodzi do umysłu przy każdym akcie postrzegania i znika ostatecznie, w tym samym momencie, ze świata zjawisk? Jest tym, co określa istotę każdego psychicznego aktu, gdyż pozostaje po każdym akcie postrzegania i zarazem może być odtworzona przy pomocy aktu innego rodzaju – aktu pamięci.

Analogicznie musi być w przypadku przyczyn ruchu, których należy poszukiwać w wewnętrznym układzie cząstek materialnych. I w ten sposób Riemann formułuje następującą hipotezę, wyrażającą podstawę praw ruchu:

**Przestrzeń jest wypełniona pewnego rodzaju materią, która w sposób ciągły zamienia się w wańkie atomy i w końcu znika z widzialnego świata.**

Innymi słowy, materia ze świata widzialnego przechodzi do świata niewidzialnego, a efektem tego procesu są ważkie atomy. Wążkie atomy są więc miejscem styku światów widzialnego i niewidzialnego – w każdy ważki atom wchodzi w każdej chwili pewna określona ilość materii, proporcjonalna sile przyciągania, i tam znika.

W oparciu o tę hipotezę próbuje Riemann wyjaśnić zjawisko powszechnego ciążenia (istnieje kilka prób wyjaśnienia tego zjawiska przez Newtona). Hipoteza została już sformułowana i budując logiczny system pojęć zawierający tę hipotezę oraz dane doświadczalne, jesteśmy w stanie poznać rzeczywistość materialną.

I dlatego Riemann stawia pytanie: jakie własności powinna posiadać materia wypełniająca przestrzeń, aby możliwa była realizacja tej hipotezy? Okazuje się, że powinna być jednorodną, nieściśliwą cieczą bez bezwładności, a ponadto, każdy ważki atom, w równych odcinkach czasu powinien przyjmować równe i proporcjonalne do masy atomu wielkości materii – wtedy nacisk doświadczany przez atom, znajdujący się w danym punkcie, byłby proporcjonalny do prędkości materii w tym punkcie. I w ten sposób otrzymujemy, że działanie siły grawitacji na ważki atom zależy wyłącznie od nacisku materii wypełniającej przestrzeń, w bezpośrednim sąsiedztwie atomu.

Założmy, że pewien poruszający punkt materialny  $O$  ma w chwili  $t$  współrzędne  $x, y, z$  (w prostokątnym układzie współrzędnych). Niech  $x', y', z'$  oznaczają współrzędne punktu  $O'$  (punkt  $O$  po czasie  $dt$ ), w tym samym układzie. Oczywiście współrzędne  $x', y', z'$  są funkcjami  $x, y, z$  i element długości  $ds' = dx' + dy' + dz'$  wyraża się przy pomocy jednorodnej formy drugiego stopnia względem  $dx, dy, dz$ :

$$ds' = G_1^2 dx^2 + G_2^2 dy^2 + G_3^2 dz^2$$

Riemann zakłada, że różnica między poprzednią formą cząstki, a jej formą w chwili badania, jest przyczyną sił dążących do zmiany formy cząstki. Siły, które dążą do zmniejszenia wielkości  $\lambda_1 = G_1 - 1, \lambda_2 = G_2, \lambda_3 = G_3$  (Riemann nazywa te wielkości głównymi rozszerzeniami cząstki w punkcie  $O$ , przy przejściu od pierwszej formy do drugiej), mogą być rozpatrywane jako funkcje liniowe tych wielkości.

Jeśli na daną cząstkę działa siła grawitacji, to siła ta rozkłada się na siłę, przy pomocy której cząstka przeciwstawia się zmianie objętości oraz siłę, która przeciwstawia się zmianie długości. Otrzymujemy więc następującą formułę:

$$a \frac{dV - dV'}{dV} + b \frac{ds - ds'}{ds}.$$

Przez  $dV$  Riemann rozumie objętość nieskończenie małej cząstki w chwili  $t$ , a przez  $dV'$  jej objętość w chwili  $t'$ . Wielkości  $a$  i  $b$  są ustalone dla danego nieskończenie małego przyrostu  $dt = t' - t$ . Riemann argumentuje, że nie istnieją żadne przyczyny pozwalające stwierdzić, że działanie obu tych składo-

wych zmienia się zgodnie z tym samym prawem. I pojawia się wzór, który uwzględnia wpływ wszystkich poprzedzających chwilę  $t'$  reakcji cząstki na zmianę jej formy:

$$\int_{-\infty}^{t'} \frac{dV - dV'}{dV} \psi(t' - t) dt + \int_{-\infty}^{t'} \frac{ds - ds'}{ds} \varphi(t' - t) dt.$$

W tym miejscu stawia Riemann kluczowe pytanie. Jakie powinny być funkcje  $\psi$  i  $\varphi$ , aby grawitacja, światło i ciepło mogło być przenoszone przez materię wypełniającą przestrzeń?

Znaczy to, że Riemann zdefiniował pewną matematyczną strukturę mającą odpowiadać rzeczywistym oddziaływaniom ważkiej materii. I w tej matematycznej strukturze szuka prawdy o rzeczywistości materialnej. Ponadto funkcje, które pojawiają się w tych matematycznych wzorach, muszą odpowiadać konkretnym oddziaływaniom materii. I tak siły grawitacyjne i elektrostatyczne wiążą się z oporem, jaki cząstka materialna przeciwstawia zmianie objętości, czyli odpowiadają funkcji  $\psi$ , natomiast rozchodzenie się światła i ciepła jest związane z oporem, jaki stawia cząstka przeciwstawiając się zmianie długości, czyli odpowiada funkcji  $\varphi$ .

Zgodnie z przyjętą definicją prawdy istotna jest zdefiniowana przez niego struktura matematyczna, która odpowiada strukturze rzeczywistości, natomiast elementy składowe tej struktury trzeba określić i dopełnić tak, aby powstały w ten sposób system pojęć był niesprzeczny, obejmując nie tylko elementy formalne, lecz również dane doświadczone – ma powstać logiczny system pojęć dotyczący całokształtu teorii. Podstawą tego systemu pojęć jest matematyka i poprzez nią docieramy do istoty rzeczywistości.

### 3. Bolzano i podstawy nowej idei nauki uniwersalnej

Przedstawiony powyżej zarys projektu Riemanna budowy nauki, opisującej działanie świata jak i podającej przyczyny zjawisk, jest idealnym przykładem ukazującym jak ten matematyk rozumiał ideę nauki uniwersalnej. W tym momencie abstrahuję od tego, na ile jego propozycja było sensowna w podanych szczegółach – chodzi o zrozumienie koncepcji, która była przez Riemanna realizowana w całej jego działalności naukowej.

W celu lepszego zrozumienia tej koncepcji przejdźmy do przedstawienia wcześniejszego programu Bolzano przebudowy matematyki. Program definicji podstawowych pojęć geometrii jest dla niego niezbędny do tego, aby postawić matematykę na solidnych podstawach. Bolzano rozpoczął realizację tego programu w publikacji *Beytrage* z 1810 r., chociaż już wcześniej w *Betrachtungen* (1804) znajduje się zarys tego programu, jak zauważyliśmy w poprzednim rozdziale.



Na początku *Beytrage* Bolzano stwierdza, że mimo tego, iż matematyka jest wśród nauk najbliższej doskonałości, to jednak zawiera kilka luk i nieścisłości – nawet pośród swoich najbardziej elementarnych teorii. Jedną z luk jest w geometrii, gdyż ciągle jeszcze brakuje precyzyjnej definicji większości ważnych pojęć: linii, powierzchni, bryły.<sup>11</sup>

Filozofia matematyki w *Beytrage* jest oparta na dążeniu do maksymalnej ścisłości. Druga część *Beytrage* składa się z filozoficznych analiz matematycznej metody. Bolzano jest krytyczny wobec ówczesnej metody matematycznej i próbuje otrzymać nowe wnioski zgodne ze swoją filozofią. Cechą charakterystyczną całej filozofii Bolzano jest pogląd, że wiedza matematyczna i naukowa jest obiektywna. W matematyce mamy do czynienia z obiektywnymi związkami zawartymi w twierdzeniach, a nie z subiektywnymi przekonaniem czy wierzeniami. Stąd dowód w matematyce nie ma na celu przekonania czytelnika do prawd, które zostały odkryte na innej drodze; to właśnie dowód ma za zadanie odsłonić obiektywne związki między twierdzeniami, w szczególności pomiędzy obiektywnymi prawdami. W 1810 Bolzano pisze co następuje:

*W dziedzinie prawdy tj. w całości wszystkich prawdziwych sądów przeważa obiektywny związek, który jest niezależny od naszego przypadkowego, subiektywnego uznania go i konsekwentnie niektóre z naszych sądów są podstawą dla innych, które z nich wynikają. Przedstawienie tego obiektywnego związku pomiędzy sądami tj. wybranie zbioru sądów i uporządkowanie go tak, aby każdy będący konsekwencją był tak właśnie przedstawiony i na odwrót, wydaje się właściwym celem realizowanym w nauce.*<sup>12</sup>

Szukanie logicznych podstaw wiedzy naukowej, jest zasadniczą kwestią w matematycznych badaniach Bolzano. To podejście znalazło najpełniejszy wyraz w późniejszym dziele Bolzano *Wissenschaftslehre*.<sup>13</sup> Istnieje znaczne podobieństwo jego podejścia do teorii konsekwencji logicznej i pojęcia prawdy do tego, które znajdujemy u Tarskiego sto lat później.<sup>14</sup> Jak zauważyliśmy w rozdziale 1 (paragraf 4) konsekwencją teorii Tarskiego (definicji prawdy) jest to, że sama możliwość sformułowania poprawnej definicji prawdy dla danego języka sformalizowanego jest dowodem jego niesprzeczności. A ponadto z twierdzenia o dedukcji wynika, że dany system definicji niesie ze sobą pewną obiektywną prawdę, gdyż wszystkie twierdzenia udowodnione w oparciu o dany system aksjomatyczny pozostają słuszne dla dowolnej interpretacji tego systemu.

Na czym polega geometryczny problem Bolzano? Pragnie on znaleźć „właściwe” definicje podstawowych pojęć geometrii. Ale co jest „właściwą” definicją dla Bolzano? W *Betrachtungen* znajdujemy następującą zasadę dotyczącą natury definicji:

*Prawdziwa definicja musi zawierać tylko takie oznaczenia definiowanego pojęcia, które odsłaniają jego istotę i bez których nie może być ono w ogóle pomyślane (Eine ächte definition nur solche Merkmale des erklärenden Begriffs enthalten muss, die sein Wesen ausmachen, und ohne welchen er gar nicht gedacht werden kann).*<sup>15</sup>

Powyższe rozumienie definicji można porównać do znaczenia jakie przypisuje Riemann ścisłym pojęciom w konstrukcji nauki. Tak tu jak i tam możliwe jest dotarcie do istoty rzeczy – to odpowiednio zdefiniowane pojęcia sprawiają, że jesteśmy w stanie rozumieć rzeczywistość.

W *Wissenschaftslehre* Bolzano pokazuje ogólnie wówczas przyjmowane rozumienie definicji matematycznej:

*Pierwszy rodzaj rozważań dotyczy zwykle idei i zdań, które są definicjami, przez które ja tutaj rozumiem nie co innego jak wyrażenia, które stwierdzają czy pewna idea lub zdanie jest prosta, czy złożona z części oraz, w ostatnim przypadku, z jakich części ona składa się i jak one są połączone.*<sup>16</sup>

Rozumienie definicji matematycznej przedstawione w *Betrachtungen* wyraźnie pogłębia powyższe określenie i nadaje mu właściwą (w rozumieniu Bolzano) perspektywę. Definicje są sprawozdaniem z analizy pojęć. Definicja mówi nam albo o tym czy pewne pojęcie lub idea jest prosta, albo o tym, czy jest złożona z pewnych innych idei połączonych razem w szczególny sposób. Tak więc definicja jest albo prawdziwa, albo fałszywa w zależności od tego czy stanowi poprawny raport z analizy pojęć, czy nie.

Teoria definicji Bolzano jest ściśle związana z analogiczną koncepcją Leibniza. Twierdzenia i pojęcia matematyczne są zdaniami oraz ideami w sobie i są zarazem niezależne od umysłu. Są one ściśle odróżnialne od pisanych, mówionych czy pomyślanych zdań i idei. Obiektywna idea jest niezależna od tego czy ktokolwiek ją pomyślał czy wypowiedział. Jaki jest status ontologiczny obiektywnych idei? Nie mają one istnienia jak byty rzeczywiste. Jedynie idee subiektywne istnieją realnie. Obiektywne idee są jedynie elementami świata znaczeń (jak trzeci świat Poppera). **Według Bolzano definicje są jedyną drogą dotarcia do świata istniejącego obiektywnie poprzez subiektywny świat myśli** (tak samo jest w przypadku Riemanna). Analiza i rozkład idei złożonych prowadzi do otrzymania całkowicie prostych idei. Świat pojęć Bolzano ma więc strukturę atomową. Próbuąc odkryć definicję szukamy tych najprostszych składników idei. Nie są one jedynie odkryciem naszego umysłu, lecz odkryciem istniejących realnie definicji poza naszym umysłem. Prawdziwe definicje (czyli zdające poprawny raport z analizy pojęć) są jedyne, ponieważ ukazują jedyny rozkład danego pojęcia na idee proste.

Dlaczego proste idee w sobie rzeczywiście istnieją? Gdyby nie istniały proste idee, wtedy moglibyśmy kontynuować podział naszych pojęć w nieskończoność. Jest to jednak nie do pomyślenia. Ponadto każda złożoność musi być wyjaśniana przez części, które są proste. Nigdy złożone części danej całości nie mogą stanowić jej wyjaśnienia. Analogicznie jak punkty są prostymi składnikami geometrycznych obiektów.

Z tych poszukiwań Bolzano i Riemanna wyłania się nowa koncepcja *mathesis universalis* odbiegająca w kilku istotnych punktach od wizji Kartezjusza czy Leibniza. Jak zobaczymy później jest ona najbardziej zbliżona do koncepcji Archimedesesa. Zanim jednak do tego przejdziemy ukażemy podobieństwo metod

badawczych powyższych matematyków do tych metod, które legły u podstaw trzech teorii matematycznych. Są to: teoria wymiaru, teoria liczb rzeczywistych oraz teoria mnogości. Dwie ostatnie narodziły się w XIX wieku, natomiast teoria wymiaru (będąca częścią topologii) dopiero w latach dwudziestych XX wieku. Wraz z nimi pokażemy pewne istotne dla uchwycenia problemu *continuum* pomysły Riemanna w zakresie jego teorii rozmierności. Te teorie są zarazem najważniejszą podstawą, na której oparło się powstanie topologii geometrycznej, w szczególności teorii *continuumów*. Jak zobaczymy dalej teoria *continuumów*, której głównymi twórcami są Brouwer i Janiszewski, stanowi idealny przykład realizacji nowej idei nauki uniwersalnej. Jak to jest możliwe w przypadku tak specjalistycznej teorii matematycznej? Czy znajdziemy w tej teorii jakieś odpowiedzi na ciągnący się od starożytności problem *continuum*? Czy rzeczywiście ta teoria bierze udział w dyskusji dotyczącej zasadniczych pytań filozofii i, czy daje jakieś istotne uwagi, spostrzeżenia? Spróbujemy odpowiedzieć na te pytania w dalszej części pracy.

#### 4. *Continuum* geometryczne Bolzano

Jak zauważył Hilbert, problemy są główną siłą napędową matematyki.<sup>17</sup> Często różne pojęcia są używane w matematyce intuicyjnie i nie widać potrzeby ich uściślenia do czasu, aż pojawią się sprzeczności. Wtedy uwaga matematyków koncentruje się na zagadnieniach, w których to pojęcie występuje i zostają często dostrzeżone zależności nie oczekiwane wcześniej. Tak było z pojęciem *wymiaru*, z badań nad którym wyłoniły się ważne zagadnienia matematyczne dopiero w XIX wieku. Jednak już od starożytności istniały próby zrozumienia i zdefiniowania pojęcia *wymiaru* oraz wyjaśnienia liczby wymiarów przestrzeni fizycznej. Nad kwestią tą pochylali się: pitagorejczycy, Arystoteles, Euklides, Ptolemeusz. Na początku XIX wieku Bernard Bolzano zmierzył się z tym problemem i zapoczątkował kilka interesujących rozwiązań. Chciałbym skoncentrować się na tych elementach rozważań Bolzano, które wiążą się jak najściślej z powstaniem samej teorii *continuumów* (chodzi o precyzowanie pojęcia rozciągłości), bez szczegółowego wchodzenia w zagadnienia genezy i powstania teorii wymiaru.<sup>18</sup> Według Bolzano istnieje ścisły związek między matematyką a filozofią. W duchu programu Leibniza szukał pojęć i struktur logicznych leżących u podstaw matematyki. Jednak w duchu nowego trendu, który dopiero w pełni ujawnił się w matematycznych badaniach Riemanna, szukał prawdziwych definicji dla podstawowych obiektów geometrii.

Teoria definicji Bolzano (przedstawiona w poprzednim paragrafie) stała się dla niego motywacją dla poszukiwania „prawdziwych” definicji linii, powierzchni, brył w oparciu o punkt jako proste pojęcie.

Szukał geometryczno-topologicznej podstawy dla całego gmachu analizy. Poszukiwania „prawdziwych” definicji, dla obiektów geometrycznych sta-

nowiących podstawę całego tego gmachu, doprowadziły go do badań *stricte* topologicznych. Jego prace to w dużej mierze sprawdzenie wartości różnego rodzaju definicji na wielu przykładach. Jaki był wpływ teorii definicji Bolzano na opracowanie przez niego topologicznych definicji?

Pragnął włączyć do matematyki te obiekty, które do jego czasów były w dużej mierze rozumiane intuicyjnie i miały jedynie przed-matematyczny „charakter”. Śledząc jego prace odnosi się jednak wrażenie, że jest to niekończący się ciąg bez przerwy poprawianych definicji, którym brakuje naturalnego zwieńczenia w postaci twierdzeń i dowodów. Czy może być w pełni wartościową teoria składająca się wyłącznie z definicji? Formułowanie i dowodzenie twierdzeń pozostawił Bolzano przyszłym pokoleniom. We wstępie do *Überhaltung* zostawia innym dokończenie swego dzieła. Ukazał w swej pracy możliwość budowania gmachu geometrii na podstawie teoriomnogościowej i topologicznej. Podane przez niego definicje otoczenia, punktu izolowanego, spójności stały się podstawą dalszych definicji – linii, powierzchni i bryły; były ważnym elementem ukazującym możliwość i potrzebę badań topologicznych. Te badania bowiem pozwoliły Bolzano na głęboką penetrację obszaru geometrii i wglądu w jej istotę. Doprowadziły go do uchwycenia po raz pierwszy wymiaru jako pojęcia topologicznego oraz do sformułowania jednego z ważniejszych twierdzeń topologii – twierdzenia Jordana o krzywych zamkniętych.<sup>19</sup> Jaki problem pozwolił Bolzano spojrzeć na geometrię z topologicznego punktu widzenia? Chodziło o problem podania definicji geometrycznych pojęć krzywej, powierzchni, bryły oraz ogólniej o zdefiniowanie geometrycznej rozciągłości i *continuum*. Ten problem doprowadził Bolzano do wyjścia z granic tradycyjnej geometrii.

Aby zobaczyć, dlaczego Bolzano zainteresował się geometrycznym problemem, musimy przebadать początki jego zainteresowania się matematyką i zobaczyć sytuację problemową w tradycyjnej geometrii około roku 1800, od którego jego praca naukowa się rozpoczyna. Lata 1796-1804 były kluczowymi latami formowania się intelektualnego rozwoju Bolzano. Od początku Bolzano patrzył na matematykę oczami filozofa. Pod tym względem przypominał Kartezjusza, który pokazał mocne metodologiczne ogniwo łączące matematykę i filozofię. Jeszcze bliżej był jednak metody Leibniza, która opierała się na poszukiwaniu wspólnego korzenia matematyki i filozofii w pojęciach, na których można te dziedziny wiedzy ufundować.

Bolzano był głównie zainteresowany logicznymi podstawami matematyki. Nowe wyniki i zastosowania miały być wynikiem tych uprzednich logicznych ustaleń. Aby jednak ocenić wkład Bolzano w myśl matematyczną, należy skoncentrować uwagę na budowaniu przez niego nowej metody – jest to główny cel jego pracy.

Zasadniczy wpływ na jego filozoficzną myśl (szczególnie filozofię logiki) miał podręcznik A. G. Baumgartena *Metaphysica*,<sup>20</sup> który jest streszczeniem filozofii Leibniza-Wolffa. Bolzano znalazł tam wiele nieprecyzyjnych



definicji, twierdzeń i dowodów, m.in. konstrukcję linii, powierzchni i brył przy pomocy skończonej liczby punktów.

Według Baumgartena linia jest układem punktów zestawionych ze sobą tak, że tworzą *continuum*. Podobnie powierzchnia jest ciągłym układem linii a bryła ciągłym układem powierzchni. Bolzano miał zastrzeżenie do tych definicji z powodu ich małej zawartości informacyjnej – nie podawały one w jaki sposób możliwe jest utworzenie z punktów linii, z linii powierzchni a z powierzchni brył. Trzeba znaleźć właściwą definicję ciągłości (rozciągłości), która sprawi, że taka konstrukcja będzie wykonalna. Jak duży ładunek informacyjny musi być zawarty w pojęciu rozciągłości, aby przejście od „jakości” dyskretnej (jaką jest zbiór punktów) do „jakości” ciągłej (czyli linii, powierzchni, brył) stało się wykonalne?

Istnieje jeszcze inna praca, która wywarła znaczący wpływ na matematyczną postawę Bolzano – jest to *Anfangsgründe der Arithmetik ...* Kästnara.<sup>21</sup> Kästnar udowodnił to, co zwykle było całkowicie pomijane. Te pojęcia, którymi zajął się Kästnar, traktowane były wcześniej jako intuicyjnie oczywiste. On jednak pragnął, aby stała się jasna podstawa, na której opierają się jego analizy. Rozpoczął od próby zdefiniowania *continuum* (rozciągłości):

*Wielkość ciągła (continuum) jest czymś, czego części są tak połączone, że kiedy jedna kończy się natychmiast zaczyna się druga oraz, że pomiędzy końcem jednej i początkiem drugiej nie istnieje nic, co nie byłoby tą wielkością.*<sup>22</sup>

Definicja ta jest bardzo zbliżona do definicji, którą podaje Arystoteles (por. roz. II § 4 niniejszej pracy). Arystoteles bowiem pisze, iż *continuum* jest to rzecz, która jest ciągła a jej części stykają się i nie są w stosunku kolejności. Przy czym wcześniej definiuje stosunek kolejności (o stosunku kolejności między rzeczami mówimy wtedy, gdy między nimi nie znajduje się żadna inna rzecz tego samego rodzaju) oraz ciągłość (rzeczy są ciągłe, gdy ich stykające się granice są te same). U Kästnara brak jest odwołania się do Arystotelesa, do tych analiz logicznych, które musiały zostać teraz powtórzone przez niego i przez kolejne pokolenia matematyków. Definicja Kästnara była za to częściowo motywowana krytyką pierwszego twierdzenia z I Księgi Elementów. Euklides, przy konstrukcji trójkąta równoramiennego przy danym odcinku, zakłada bez dowodu, że dwa okręgi użyte w dowodzie przecinają się w pewnym punkcie. Aby wypełnić tę lukę w rozumowaniu Euklidesa, Kästnar podał definicję i dodał specjalny aksjomat do systemu aksjomatów Euklidesa. I to było bardzo istotne – została podjęta próba włączenia pojęcia *continuum* w struktury matematyki.

Problem *continuum*, ukryty w pierwszym dowodzie Euklidesa, zmusił Bolzano do zajęcia się bliżej tą właśnie sytuacją i rozpoczęcia prób uchwycenia pojęcia *continuum* (i wymiaru).

Dla Kästnara rozciągłość geometryczna jest to przestrzeń wypełniona całkowicie przez ciągłe wielkości (jest to nawiązanie do arystotelesowskiego pojęcia stosunku kolejności między rzeczami). Na tej podstawie możemy zdefiniować bryłę, powierzchnię i linię:

*Bryła geometryczna jest rozciągłością otoczoną przez brzeg bryły ze wszystkich stron. Rozciągłością bryły na jej brzegu nazywa się powierzchnię a rozciągłością powierzchni na jej brzegu jest linia.*<sup>23</sup>

Kästnar dodaje, że punkt jest brzegiem linii i stąd brzegiem wszystkich rozciągłości. Tak więc zaczynając od bryły (czyli 3-wymiarowej rozciągłości) mamy, że jej brzegami są powierzchnie, brzegami powierzchni są linie a brzegami linii są punkty. W przeciwieństwie do Baumgartena, Kästnar argumentuje, że linia nie jest zbiorem w pewien sposób zestawionych ze sobą punktów i podobnie, powierzchnia nie jest zbiorem linii czy bryła zbiorem powierzchni. Teraz, przy pomocy definicji brzegowej jest możliwe wyobrażenie sobie punktów umiejscowionych gdziekolwiek na prostej tzn. brzegi nie muszą być rozumiane jako końce. W rzeczywistości, punkty są wszędzie na linii, nawet wtedy, gdy myśli się o linii jako generowanej przez ruch pojedynczego punktu.

Jednak dla Kästnara ta koncepcja nie implikuje, że linia jest jedynie zbiorem punktów. Rzeczywiście w swojej pierwszej pracy, w której przedstawił definicję brzegową, Kästnar próbuje pokazać, że ta definicja jest sprzeczna z traktowaniem linii jako zbioru punktów. Jeśli linia utworzona byłaby z punktów, wtedy dowolny punkt miałby swojego bezpośredniego sąsiada. Lecz między tymi sąsiednimi punktami mimo, że są one różne, nie istniałaby nawet najmniejsza dodatnia odległość. I również miara odległości, jakiegokolwiek punktu linii od tych dwóch punktów, byłaby taka sama. Można rzec, że dwa różne punkty są w rzeczywistości takie same. Sprzeczność, którą w tym miejscu Kästnar dostrzegł, pokazuje, iż dla niego punkt był pewnym obiektem jednoznacznie wyznaczonym przez jego odległość do innego ustalonego punktu. Brak jednak u niego większego zaangażowania w podjęcie filozoficzno-logicznych analiz nad statusem ontologicznym punktu.

W 1817 roku Bolzano napisał pracę,<sup>24</sup> w której poszukiwał dowodów (zgodnych z rygorami opisanymi w *Beyträge*) wzorów całkowych na długość krzywej, pól powierzchni i objętości brył. W tej pracy można odnaleźć rozwiązania problemu zdefiniowania podstawowych obiektów geometrycznych mające postać współczesnych definicji topologicznych. Pragnął on zarazem dać geometryczno-topologiczną podstawę całemu gmachowi analizy. Przyjmuje, że figury geometryczne (krzywe, powierzchnie i bryły) są zbiorem punktów i tym samym podstawą jego geometrii staje się teoria mnogości. Jednak istotne jest przede wszystkim wzajemne powiązanie tych punktów. I taki jest cel definicji – wyjaśnić, w jaki sposób punkty są w stanie utworzyć krzywe, powierzchnie i bryły. Spójrzmy jak Bolzano definiuje te podstawowe geometryczne figury:

Linia (krzywą) nazywamy obiekt przestrzenny o tej własności, że każdy punkt ma dowolnie małe otoczenia (kuliste), składające się co najmniej z jednego a co najwyżej ze skończonej liczby punktów.<sup>25</sup>

Powierzchnią nazywamy obiekt przestrzenny o tej własności, że każdy jej punkt ma dowolnie małe otoczenia (kuliste) składające się z co najmniej jednej i co najwyżej skończenie wielu linii.

*Bryłą nazywamy obiekt przestrzenny o tej własności, że każdy punkt ma dowolnie małe otoczenia składające się z co najmniej jednej spójnej powierzchni.*

Samą spójność Bolzano rozumie w sensie bycia jednym kawałkiem, a konkretnie definiuje w następujący sposób:

*Linia (powierzchnia, bryła) jest nazywana linią (powierzchnią, bryłą) spójną, jeśli każda jej część ma przynajmniej jeden punkt (linię, powierzchnię) wspólny z pozostałymi częściami, które muszą być same również liniami (powierzchniami, bryłami).<sup>26</sup>*

Z tych definicji oczywiście wynika jednorodność linii, powierzchni i brył. Na przykład dwa koła połączone odcinkiem nie tworzą, w myśl definicji Bolzano, spójnej powierzchni.

W latach trzydziestych Bolzano pisze kilka prac, w których podejmuje problem definicji geometrycznych. Szczególnie ważna jest niedokończona praca *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper*.<sup>27</sup> Uważa, że wartość poprzednich geometrycznych definicji zależy od zrozumienia i zdefiniowania najbardziej podstawowego pojęcia geometrii – pojęcia rozciągłości (Ausdehnung), na którym opiera się definicja linii, powierzchni i brył. Przecież te geometryczne figury są rodzajem przestrzennej rozciągłości.

Czym jest wobec tego rozciągłość? Według Bolzano jest czymś innym niż ciągłość (stetig), bo nie można pozbawić cechy rozciągłości np. krzywych składających się z kilku oddzielnych części. Jednak nie uznaje on za rozciągłość zbioru składającego się ze skończonej ilości punktów. Rozciągłość jest pewnego rodzaju całością (Ganze, Inbegriff), połączeniem w pewien sposób części w całość. Jak to się jednak dzieje, że pewien zbiór punktów tworzy geometryczną rozciągłość, a inny nie. Jak zauważa Bolzano, zależy to wszystko od tego czy w tym zbiorze są punkty izolowane, czy takowych nie ma. W ten sposób definicja rozciągłości zostaje oparta na definicji punktu izolowanego. W konsekwencji nowe pojęcie obiektu geometrycznego zostaje wyjaśnione przy pomocy topologicznego pojęcia punktu izolowanego. Jak Bolzano definiuje wobec tego punkt izolowany:

*Punkt i jest izolowany w danym obiekcie przestrzennym, jeśli istnieje taka odległość, że dla wszystkich mniejszych odległości otoczenia, o promieniu równym tej odległości, są puste.<sup>28</sup>*

Obiekt przestrzenny, który nie posiada punktów izolowanych jest według Bolzano rozciągłością (*continuum*). Łatwo zauważyć, że punkt izolowany w pewnym zbiorze, w sensie Bolzano, jest punktem, w którym zbiór jest w tym punkcie 0-wymiarowy w sensie Uryshona-Mengera.<sup>29</sup> Odwrotna implikacja nie zachodzi z tego powodu, że Bolzano rozpatruje wyłącznie otoczenia sferyczne.

W książce *Wissenschaftslehre*<sup>30</sup> Bolzano podejmuje problem definicji *continuum* i w znacznej mierze powtarza rozumowanie z pracy *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper*. Pojawia się jednak większa determinacja uściślenia wszystkich pojęć, które są elementami definicji

*continuum*. Pojęcie układu, kolekcji (*Inbegriff*) punktów (czy różnego rodzaju obiektów) jest według niego wieloznaczne. Dane obiekty mogą w różny sposób tworzyć daną kolekcję. Według Bolzano kolekcję należy przede wszystkim rozumieć jako układ obiektów składających się z przynajmniej dwóch dowolnych części (abstrakcyjnych lub realnych), przy czym te same elementy nie mogą pojawiać się wielokrotnie.<sup>31</sup>

Bolzano zauważa, że można wyróżnić kilka rodzajów kolekcji w zależności od tego czy spełniają, czy nie następujące własności:

1. Jeśli kolekcja  $M$  zawiera  $x$  jako swoją część, to również zawiera części  $x$  jako swoje części;
2. Jeśli kolekcja  $M$  zawiera  $x$  jako swoją część, to żadna część  $x$  nie jest częścią  $M$ ;
3. Kolekcja  $M$  jest niezmiennicza ze względu na permutacje jej elementów;
4. Kolekcja  $M$  nie jest niezmiennicza ze względu na permutacje jej elementów;
5. Dla każdego elementu kolekcji  $M$  istnieje bezpośredni poprzednik i następnik w  $M$ ;
6. Dla wszystkich  $x$  i  $y$  w  $M$  istnieje element  $z$  w  $M$  pomiędzy  $x$  i  $y$ .

Za szczególnie godne uwagi uważa Bolzano następujące połączenie powyższych własności:

Sumą (*Summe*) jest kolekcja spełniająca (1) i (3).

Zbiorem (*Menge*) jest kolekcja spełniająca (2) i (3).

Szeregiem (*Reihe*) jest kolekcja spełniająca (2), (4) i (5).

Ciągłym szeregiem (*stetige Reihe*) jest kolekcja spełniająca (2), (4), (6).<sup>32</sup>

We współczesnej terminologii szereg ciągły odpowiada zbiorowi gęsto uporządkowanemu np. liczby wymierne są szeregiem ciągłym. Przy powyższej definicji ma sens pojęcie zbioru nieskończonego – zbiór jest nieskończony, jeśli jest izomorficzny (przez izomorfizm Bolzano rozumie wzajemnie jednoznaczne ustawienie w pary „1-1”) ze swoim właściwym podzbiorem. Dopiero rozumienie zbioru jako kolekcji „niepodzielnych” elementów, niezmienniczej ze względu na permutację, daje możliwość jednoznacznego sformułowania powyższej własności zbioru nieskończonego. Bolzano zauważa, że zbiory skończone nie mają tej własności, jednak nie formułuje definicji zbioru nieskończonego, co uczynił dopiero Cantor.

Teraz może dopiero w sposób ścisły zdefiniować *continuum*:

Podzbiór  $K$  zawarty w  $R$  jest *continuum* względem  $R$ , jeśli dla każdego  $x \in K$  i dla każdego otoczenia  $N$  punktu  $x$  istnieje w  $N$  element  $z \in K$  różny od  $x$ .<sup>33</sup>

Powyższa definicja jest praktycznie identyczna z tą z pracy *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper*, mimo iż formalnie nie występuje w niej pojęcie punktu izolowanego. Istotne jest to, że, zamiast



mówić ogólnie o jakichś obiektach przestrzennych, używa zdefiniowanego przez siebie pojęcia zbioru.

Oczywiście *continuum* w sensie Bolzano nie jest jeszcze topologicznym *continuum* (por. rozdz. II § 5). Przede wszystkim rozumie otoczenia geometrycznie (geometryczne kule czy raczej sfery), a nie jako elementy abstrakcyjnie rozumianej topologii. Dlatego np. nie widać zależności *continuum* od rodziny otoczeń, bo ta u niego jest z góry ustalona. Bolzano zauważa jednak różnicę między *continuum* zdefiniowanym przez siebie a „*niecontinuum*”. W książce „Paradoksy nieskończoności”<sup>34</sup> podaje następujący przykład. Rozważmy odcinek  $az$ . Niech  $b$  będzie punktem środkowym między  $a$  i  $z$ ;  $c$  punktem środkowym między  $b$  i  $z$ ;  $d$  punktem środkowym między  $c$  i  $z$  itd. Jeśli wyrzucimy z tego odcinka wszystkie punkty środkowe, wtedy punkt  $z$  będzie punktem izolowanym i tak otrzymany zbiór nie będzie *continuum* w sensie Bolzano. Jeśli jednak wraz z punktami środkowymi wyrzucimy również punkt  $z$ , wtedy otrzymany zbiór będzie *continuum* w sensie Bolzano. Ten zbiór nie jest jednak *continuum* topologicznym.<sup>35</sup>

Podobnie jak Leibniz Bolzano wierzył, że istnieją najprostsze pojęcia, z których możemy budować bardziej skomplikowane. Jednak dla tych najprostszych pojęć domagał się definicji, czyli formalnego włączenia w strukturę matematyki. To wyróżniało metodę Bolzano od koncepcji Leibniza i było zbieżne z nową wizją nauki uniwersalnej, która w pełniejszy sposób została ujęta w rozważaniach Riemanna. Dlatego z ogromną konsekwencją domagał się Bolzano definicji dla dobrze znanych i rozumianych intuicyjnie pojęć geometrii: rozciągłości, linii, powierzchni, brył. Podstawę dla nich odnalazł w topologii, która za jego życia była słabo rozwiniętą i mało znaczącą dziedziną matematyki. Tym bardziej musi zastanawiać głęboka intuicja Bolzano, który przewidział ogromne znaczenie topologii dla zrozumienia podstaw geometrii i jej rozwoju.

## 5. Rozmaitość Riemanna a idea *continuum*

W swoim wykładzie habilitacyjnym próbuje Riemann określić logiczne związki między geometrią rozumianą jako czysta matematyka a jej zastosowaniami do przestrzeni fizycznej. Jednym z głównych celów, jakie stawia sobie Riemann, jest skonstruowanie pojęcia wielkości wielokrotnie rozciągłej przy pomocy ogólnych pojęć wielkości. Właśnie sprecyzowanie tego pojęcia jest istotnym przygotowaniem do zrozumienia związku pomiędzy geometrią i pojęciem przestrzeni. Pragnął on, aby ta teoria stała się zasadniczym i ogólnym schematem *analysis situs* (topologii). Sądził, że główna trudność leży w filozoficznej naturze tego problemu i że przed nim jedynie matematyk Gauss i filozof Herbart uczynili kilka istotnych uwag na ten temat.

Jak zauważyliśmy w poprzednich paragrafach Riemann wiele czerpał z poglądów Herbarta. Wpłynęły one również na jego rozumienie przestrzeni i na sposób jej matematyzacji.

Istotną częścią doktryny Herbarta jest pogląd, że nasza idea przestrzeni jest wyłącznie pewną sekwencją lub sekwencją-formą (*Reihe, Reiheform*). Również czas, kolory, dźwięki poznajemy jako pewne sekwencje – niekoniecznie liniowo uporządkowane. Ponieważ przestrzeń zmysłowa jest, według Herbarta, sekwencją sekwencji sekwencji, jest więc 3-wymiarowa. Praktycznie metafizyka Herbarta była teorią ciągłości objawiającej się poprzez czas, przestrzeń, ruch i materię. Sprzeczności występujące w potocznym intuicyjnym rozumieniu pojęcia ciągłości stanowiły przyczynę (i zarazem narzędzie) konstruowania pojęć linii prostej, płaszczyzny i geometrycznej przestrzeni.

Ten ogólny schemat budowania matematyki wywarł ogromny wpływ na Riemanna, szczególnie jeśli idzie o badanie podstaw geometrii. Zresztą również jego własne badania nad funkcjami zespolonymi doprowadziły go do uznania potrzeby topologicznych badań 2-wymiarowych powierzchni. Uważał, że bez tych badań niemożliwe jest zrozumienie dalszego rozwoju niektórych fragmentów matematyki<sup>36</sup>. Dlatego rozpoczął konstrukcję pojęcia wielkości wielokrotnie rozciąglej (*mehrfach ausgedehnte Grösse*).<sup>37</sup>

Również pewne uwagi Gaussa, dotyczące poszukiwań prawdziwej metafizyki dla wielkości urojonych, wywarły duży wpływ na Riemanna. Na przykład w liście do Hansena Gauss pisze:

*Prawdziwe znaczenie  $\sqrt{-1}$  stoi bardzo żywo przed moją duszą, lecz jest bardzo trudno wyrazić to w słowach, które mogą dać jedynie niewyraźny przelotny obraz.*<sup>38</sup>

Zdając sobie sprawę z tego, jak wiele problemów związanych z liczbami zespolonymi stało się możliwych do rozwiązania, dzięki interpretacji geometrycznej tych liczb jako punktów płaszczyzny, proponuje rozpocząć badania różnorodności 2-wymiarowych (i wyższych).<sup>39</sup>

Całą nadzieję widział w rozwoju *analysis situs*, dla której trzeba zbudować całkiem nowe metody. Mimo, że nie zgadza się z Kantem w wielu miejscach, przejął od niego pojęcie różnorodności (*Mannigfaltigkeit*) i wprowadził do matematyki. Na początku oznaczało ono dla niego bardzo ogólny obiekt geometryczny. Większej ścisłości nabiera dopiero w kolejnych pracach Riemanna.

Riemann wychodzi w swoich rozważaniach od analizy pojęcia wielkości. Dochodzi do wniosku, że bardziej ogólne jest pojęcie różnorodności, gdyż dane wielkości należy rozpatrywać jako części różnorodności. To nie różnorodność jest określana przez punkty, lecz punkty różnorodności określa się przy pomocy pewnej liczby współrzędnych liczbowych. Sposób przyporządkowania tych współrzędnych jest lokalnie taki sam, jednak może się zmieniać w różnych miejscach różnorodności. Riemann rozpatrywał różnorodności dyskretne (współrzędne poszczególnych punktów są określane przy pomocy liczb całkowitych) i ciągłe (liczby całkowite są niewystarczające do określenia współrzędnych

punktu). Głównie interesowały go rozmaitości ciągłe (uważał, że przestrzeń fizyczna jest raczej rozmaitością ciągłą) – ich istotę próbował uchwycić posługując się głównie wyrażeniami filozoficznymi. Wyrażenia matematyczne do tego potrzebne były dopiero powoli wykuwane poprzez te pierwotne „filozoficzne definicje”. Szczególnym przypadkiem rozmaitości była dla Riemanna wielkość wielokrotnie rozciągła i to pojęcie było zasadniczo zgodne ze współczesnym rozumieniem rozmaitości. Sama rozmaitość (w sensie Riemanna) oznaczała po prostu zbiór z wykluczeniem zbioru pustego czy zbioru jednoelementowego. Punktami tego zbioru były jednak całkiem abstrakcyjne elementy. Rozmaitością był zbiór funkcji określonych na danym obszarze czy zbiór wszystkich możliwych figur danego domkniętego obszaru przestrzeni. Jako „naturalny” przykład rozmaitości podawał Riemann zbiór kolorów i zbiór wszystkich pozycji przestrzennych obiektów postrzegania zmysłowego.<sup>40</sup>

Do czego było potrzebne Riemannowi pojęcie rozmaitości? W celu poddania badaniom matematycznym tych wielkości, które nie są mierzalne. Badamy je wtedy jako obiekty mające konkretne położenie, jako fragmenty rozmaitości, nie wyrażalne jednak przy pomocy żadnych jednostek liczbowych. Oto chyba najważniejszy tekst Riemanna poruszający tę kwestię. Zawiera się w nim zarazem wskazanie potrzeby badań topologicznych.

*Badania, które mogą być w tym przypadku ustanowione tworzą ogólny fragment nauki o wielkościach, w których wielkości są traktowane nie jako niezależne od położenia i nie jako wyrażalne przy pomocy jakiejś jednostki, lecz jako części rozmaitości.*<sup>41</sup>

Pojęcie ‘Grösse’ Riemann używa w sensie bardzo ogólnie rozumianej rozciągłości (niekoniecznie metrycznej). Samo pojęcie rozmaitości (*Manigfaltigkeit*) rozpatrywał w dwóch aspektach:

1. Jako narzędzie do tworzenia rozmaitości wielowymiarowych oraz
2. jako metodę określania punktów leżących w tej rozmaitości przy pomocy zbioru współrzędnych liczbowych.

Rozmaitość jest przez niego definiowana w sposób indukcyjny. Przez rozmaitość 1-wymiarową rozumie taką przestrzeń, w której ciągły ruch jest możliwy tylko w dwóch kierunkach. 2-wymiarową rozmaitość otrzymujemy przesuwając punkt po punkcie 1-wymiarową rozmaitości. Innymi słowy, ciągły ruch linii tworzy powierzchnię. Możemy ten proces kontynuować otrzymując rozmaitość dowolnie wysokiego wymiaru. Definicja podana przez Riemanna nie jest jednak zbyt precyzyjna:

*Jeżeli, zamiast traktować obiekty jako określone, rozważa się je jako zmienne, wtedy konstrukcje mogą być opisane jako złożenie zmiennej wymiaru  $n+1$  utworzonej ze zmiennej wymiaru  $n$  i zmiennej jedno-wymiarowej.*<sup>42</sup>

Według Riemanna  $n$ -wymiarowa rozmaitość jest 1-parametrową rodziną  $(n-1)$ -wymiarowych rozmaitości. Każdemu punktowi 1-wymiarowej rozmaitości przypisujemy pewną  $(n-1)$ -wymiarową podrozmaitość. Na przykład tworząc rozmaitość 2-wymiarową umieszczamy (w sposób ciągły) w każdym

punkcie rozmaitości 1-wymiarowej różne rozmaitości 1-wymiarowe. Rozmaitość  $n$ -wymiarowa jest więc funkcją ciągłą określoną na punktach rozmaitości 1-wymiarowej (zbiór parametrów), której wartościami są podrozmaitości  $(n-1)$ -wymiarowe. Gdy wartości funkcji określonej na 1-wymiarowej rozmaitości zmieniają się, wtedy  $(n-1)$ -wymiarowe rozmaitości (wartości tej funkcji) przechodzą w sposób ciągły jedna w drugą. Jak więc określić położenie w  $n$ -wymiarowej rozmaitości? Określone jest ono przez pewną  $(n-1)$ -podrozmaitość. Kontynuując ten proces powinniśmy w końcu dojść do punktu. Właściwie to dopiero liczba tych kroków określa wymiar rozmaitości w danym punkcie – otrzymujemy  $n$  liczb (współrzędnych)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  określających ten punkt (są one kolejnymi argumentami funkcji określonych w tym punkcie, przy czym zbiorem wartości jest rodzina podrozmaitości o stopniowo zmniejszającym się wymiarze). Możliwa jest sytuacja, według Riemanna, że nigdy nie dojdziemy do punktu, co by oznaczało, że wymiar rozmaitości jest nieskończony.

Trudnością podstawową z jaką spotkała się powyższa definicja była jej nieprecyzyjność spowodowana brakiem definicji pojęcia ciągłości. Pojęcie to było wówczas używane w matematyce w sposób nieformalny oraz intuicyjny. Oczywiście pojęcie rozciągłości, jako obiektu generowanego przez ciągły ruch (punktu, linii, powierzchni), miało również wyłącznie intuicyjny charakter. Riemannowska rozmaitość domagała się jednak przede wszystkim metody oznaczania współrzędnych punktów w rozmaitości (parametryzacji) ukazującej sposób położenia tych punktów (czyli ich topologię; współcześnie problem ten polega na określeniu lokalnego homeomorfizmu). Tego Riemann w swojej pracy nie zrobił. Ukazał jednak potrzebę badań topologicznych nad pojęciem rozciągłości i wskazał kierunki poszukiwań topologicznych podstaw geometrii.

## 6. Powstanie *continuum* arytmetycznego – Dedekind

W przypadku Bolzano dążenie do uściślenia podstaw geometrii i podania „właściwych” definicji kluczowych pojęć geometrii doprowadziło go do konieczności sformułowania definicji *continuum* geometrycznego. Podobnie program uściślenia podstaw analizy i podania ścisłych definicji takich pojęć jak np. ciągłość, granica, szereg, całka, nieskończenie mała doprowadził do podania przez R. Dedekinda definicji liczb rzeczywistych przy pomocy metod algebraicznych. Można powiedzieć, że wysiłki te zostały uwieńczone powstaniem *continuum* algebraicznego.

Dla Starożytnych pojęcie *continuum* było pojęciem geometrycznym (a zarazem fizycznym). Już od początku pojawił się problem jak podać odpowiednik arytmetyczny tego pojęcia czyli jak uchwycić to pojęcie przy pomocy liczb (naturalnych) – tych podstawowych (a właściwie jedynych, jak wtedy powszechnie uważano) bytów arytmetycznych.



Punktem wyjścia w próbie dojścia do *continuum* arytmetycznego był ciąg liczb naturalnych. W celu wykorzystania liczb nie tylko do liczenia, lecz również do mierzenia wielkości ciągłych, trzeba było utworzyć ułamki jako stosunki liczb. Cały ten proces funkcjonował w klimacie sporu czy arytmetyka, czy geometria ma być podstawą konstrukcji pojęć matematycznych. Spróbujmy zrekonstruować tę próbę dojścia do *continuum* arytmetycznego (tak jak czyni to H. Weyl<sup>43</sup>, wskazując na możliwość ciągłego przejścia między matematyką starożytną a koncepcją Dedekinda, oraz sam Dedekind<sup>44</sup>), która w starożytności miała miejsce głównie za przyczyną Eudoksosa oraz Archimedesesa. Zobaczmy czym różni się podejście dziewiętnastowiecznego matematyka Dedekinda do problemu *continuum* arytmetycznego od podejścia starożytnych i dlaczego dopiero podejście Dedekinda zaowocowało pełnym sukcesem w zdefiniowaniu takiego *continuum*.

Mając dwa odcinki  $a$  i  $b$  na prostej możemy je dodawać i w wyniku tej operacji otrzymujemy pewien odcinek  $a + b$ . Wykorzystując metodę rekurencji można zdefiniować odcinek  $na$ , dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ , w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 1a &= a; \\ n a &= (n - 1)a + a \end{aligned}$$

Podobnie, dla dowolnego odcinka  $a$  oraz liczby naturalnej  $n$ , istnieje dokładnie jeden odcinek  $x$  taki, że  $nx = a$  (jest to fakt geometryczny). W ten sposób otrzymujemy podział odcinka  $a$  na  $n$  części i w konsekwencji ułamek  $1/n$  oznaczający operację tego podziału tzn.  $x = a/n = (1/n)a$ . Operację podziału możemy powtarzać  $m$  razy i w konsekwencji otrzymujemy ułamek  $m/n$  jako złożenie  $m$  razy operacji podziału  $1/n$ . Nie istotne jest to jaki odcinek  $a$  jest przedmiotem podziału – ważny jest jedynie efekt tego podziału. Również w operacyjny sposób można wprowadzić mnożenie i dodawanie tak otrzymanych ułamków: iloczyn  $(m/n)(m_1/n_1)$  jako złożenie  $mm_1$  razy podziału  $1/nn_1$ ; natomiast sumę  $(m/n) + (m_1/n_1)$  jako złożenie  $(mn_1 + nm_1)$  razy operacji podziału  $1/nn_1$ . I znowu suma i iloczyn ułamków jest ułamkiem niezależnym od wyboru odcinka  $a$ , czyli prawa działań na ułamkach są niezależne od wielkości, mogą więc być traktowane w sposób czysto abstrakcyjny.

Mimo, iż impulsem do tworzenia ułamków był podział wielkości (geometrycznych), to jednak ułamki można otrzymać niezależnie od tych wielkości, wyłącznie w oparciu o liczby naturalne: dwie liczby naturalne  $m$  i  $n$  w sposób całkowity wyznaczają ułamek  $m/n$ . Jeśli wykonując operację  $m/n$  na dowolnej wielkości  $x$  otrzymujemy wielkość  $y$  (jest to równoważne faktowi, że składając  $m$  razy wielkość  $x$  oraz  $n$  razy wielkość  $y$  otrzymamy tę samą wielkość, czyli  $mx = ny$ ) i wykonując operację  $m_1/n_1$  na wielkości  $x$  również otrzymamy wielkość  $y$ , to znaczy, że operacje (czyli w konsekwencji ułamki)  $m/n$  i  $m_1/n_1$  są równe. Dzięki traktowaniu liczb naturalnych jako wielkości (każdej liczbie naturalnej możemy przypisać pewną wielkość) jesteśmy w stanie wyeliminować koniecz-

ność posługiwania się wszystkimi możliwymi wielkościami  $x$  i  $y$ : możemy założyć, że ułamki  $m/n$  i  $m_1/n_1$  są równe, jeśli  $mn_1 = nm_1$ . W ten sposób ułamki zaczynają istnieć jako idealne obiekty, gdyż uzyskują tożsamość i możliwość „samodzielnego” działania (bez odwoływania się do zastosowań). Ponadto wszystkie podstawowe prawa działań na liczbach naturalnych stosują się w przypadku tych nowych bytów. Można je więc traktować jako liczby – są one jednak zależne od rozumienia wielkości geometrycznych i dokonywanych na nich działań.

W tym miejscu widoczne jest, że otrzymanie tych nowych liczb możliwe jest również w sposób czysto arytmetyczny poprzez rozszerzenie wykonywania dzielenia na wszystkie liczby (co w przypadku liczb naturalnych możliwe było tylko sporadycznie).

Dlaczego więc w analogiczny sposób nie potraktować drugiego działania tzn. dodawania i związanego z nim odejmowania? Otrzymamy klasę obiektów będących różnicami liczb  $x - y$ . Dwa nowe obiekty  $x - y$  i  $x_1 - y_1$  są równe, jeśli  $x + y_1 = y + x_1$ . W ten sposób powstają liczby wymierne (zawierające  $0 = x - x$  oraz liczby ujemne tzn.  $x - y$ , gdy  $x < y$ ). To uogólnienie nie miało jednak miejsca w starożytności.

Jednak nie wszystkie działania są w tym zbiorze wykonalne. Niemożliwe jest dzielenie przez zero. Zastosowanie więc tej samej procedury do dwóch różnych działań, w celu otrzymania jednego zbioru obiektów, na których te działania będą wykonalne, prowadzi do powstania obiektu, który tej tezy nie spełnia.

Przyjrzyjmy się tym własnościom charakteryzującym liczby naturalne, które umożliwiają przeprowadzanie konstrukcji nowych obiektów matematycznych. Przede wszystkim ciąg liczb naturalnych ma swój początek, zaczyna się liczbą 1. Ponadto, w oparciu o dowolną liczbę  $n$  możemy otrzymać liczbę kolejną  $n + 1$ , nazywaną następnikiem liczby  $n$ . Żadna liczba nie powtarza się w tym ciągu, każda kolejna liczba istotnie różni się od wszystkich poprzednich. Otrzymujemy dzięki temu nieskończoną ilość obiektów istotnie różnych. Metoda konstrukcji kolejnych liczb naturalnych zawiera w sobie metodę indukcji zupełnej, dzięki której możemy badać i określać własności nieskończonej ilości obiektów, które zostały ponumerowane liczbami naturalnymi. Metoda ta „naśladuje” konstrukcję ciągu liczb naturalnych i składa się z dwóch etapów: (A) sprawdzamy czy własność  $W$  jest prawdziwa dla obiektu o numerze 1; (B) dowodzimy, że zachodzenie własności  $W$ , dla dowolnego obiektu o numerze  $n$ , pociąga za sobą zachodzenie tej własności dla obiektu o numerze  $n + 1$ . W oparciu o etapy (A) i (B) wnioskujemy, na mocy indukcji zupełnej, że własność  $W$  jest prawdziwa dla wszystkich obiektów. Ta metoda dowodzenia matematycznego nie była znana Starożytnym, pojawiła się dopiero w czasach nowożytnych w pracach Pascala i Bernoulliego.

Posłużmy się pewną analogią między strukturą ciągu liczb naturalnych (czyli w konsekwencji metodą indukcji zupełnej) a zasadą przyczynowości. Ponieważ każdą liczbę (oprócz liczby 1) możemy otrzymać z poprzedniej oraz w oparciu o liczby już skonstruowane możemy zdefiniować liczby następne, więc analogicznie jest w odniesieniu do opisywanych zdarzeń: dane zdarzenie jest skutkiem zdarzeń bezpośrednio go poprzedzających i przyczyną zdarzeń następujących po nim. Ponieważ liczba 1 nie ma poprzednika, również w opisie zdarzeń musimy rozpoczynać od przyjęcia pewnych warunków początkowych. Jak w przypadku liczb naturalnych można, dzięki **zasadzie indukcji zupełnej**, opisać nieskończoną (a więc nieuchwytną wprost) ich ilość, tak również możliwe jest wyjaśnienie nieskończonej całości zdarzeń poprzez ich **lokalną** analizę. Jedynym ograniczeniem jest podanie warunków początkowych (w odniesieniu do liczb naturalnych chodzi o znalezienie pierwszej liczby w ich ciągu, która spełnia badaną własność). To wszystko jest możliwe mimo faktycznej niepowtarzalności zdarzeń – również w ciągu liczb nie ma liczb **powtarzających się** (każda liczba posiada pewne własności, których nie ma żadna inna) a jednak można **odtworzać** kolejne elementy w oparciu o poprzednie.

Mimo, iż nie możemy zdefiniować wszystkich liczb naturalnych, to jednak, ponieważ przy pomocy danych liczb mamy jednoznacznie zdeterminowane kolejne liczby, w jakiś sposób dostępny jest cały nieskończony ciąg tych liczb. Procedura jednoznacznego generowania kolejnych dowolnych elementów pełni rolę kryterium ich istnienia jako całości nawet, jeśli ta całość jest nieskończona.

Zauważmy, że istotnym elementem struktury ciągu liczb naturalnych jest pojęcie następnika, czyli w konsekwencji pojęcia kolejności i uporządkowania: dwie dowolne liczby naturalne  $m$  i  $n$  tworzą parę uporządkowaną  $(m, n)$  tzn. liczba  $m$  jest wcześniej w ciągu niż liczba  $n$  ( $m < n$ ). Ponadto, konstrukcja oraz istnienie liczby  $n$  są zależne od liczby  $m$ . Jednak w pełni zdeterminowane liczbą  $m$  (oraz liczbami mniejszymi od  $m$ ) jest wyłącznie istnienie liczby bezpośrednio następującej po  $m$ , czyli liczby  $m + 1$ . Liczba  $m + 1$  staje się nowym bytem, która dopiero (wraz z poprzedzającymi ją) określa w pełni kolejną liczbę  $m + 2$ . Aby dało się przejść do kolejnych liczb naturalnych muszą „zaistnieć” wszystkie poprzednie (na tym założeniu opiera się prawdziwość indukcji zupełnej).

Tym samym idea ciągu liczb naturalnych częściowo zbliża się do pojęcia funkcji jako zbioru par uporządkowanych, które mają spełniać następujący warunek: jeśli  $(m, n)$  i  $(m, k)$  są elementami funkcji, to  $n=k$ . W przypadku ciągu liczb naturalnych ten warunek jest spełniony wyłącznie w odniesieniu do par, w których drugim elementem pary jest bezpośredni następnik pierwszego elementu. Z tego, że  $(m, n)$  i  $(m, k)$  są parami uporządkowanymi liczb naturalnych nie wynika oczywiście, że  $n=k$ , jeśli  $n$  i  $k$  nie są bezpośrednimi następnikami liczby  $m$ . Może prawdziwy jest następujący związek: póki nie nastąpiło uznanie stosunków liczb naturalnych jako liczb (wymiernych), nie mogło zaistnieć ogólne pojęcie funkcji (jeśli uznajemy, że to pojęcie powstaje korzystając ze struktury liczb).

Liczby wymierne spełniają wszystkie „podstawowe” prawa działań na liczbach naturalnych. Jednak nie wszystkie własności są zachowane – w odniesieniu do liczb wymiernych nie działa zasada indukcji zupełnej, gdyż żadna liczba wymierna nie posiada swojego bezpośredniego następnika. Mimo tego porządek liniowy wśród tych liczb jest zachowany tzn. mając dwie liczby wymierne zawsze możemy wskazać, która jest następnikiem a która poprzednikiem. W przypadku liczb naturalnych z tego, że liczba  $n + 1$  następuje bezpośrednio po liczbie  $n$ , wynika istnienie uporządkowania tych liczb; w odniesieniu do liczb wymiernych mimo, że przesłanka rozumowania nie jest spełniona zachowuje ważność sam wniosek. Nie ma więc naturalnej metody przyporządkowania pierwszego elementu pary (dwóch liczb wymiernych) elementowi drugiemu – ustalonemu elementowi  $p$  przyporządkowanych jest wiele następników, z których żaden nie jest w jakikolwiek sposób wyróżniony, jak jest w przypadku bezpośredniego następnika w ciągu liczb naturalnych. Ustalenie takiej jednoznaczności jest możliwe wyłącznie w sposób arbitralny, na zasadzie konwencji. Należy więc poszukiwać innej podstawy **jednoznaczności uporządkowania** liczb wymiernych. Okazuje się nią idea odwzorowania między liczbami a prostą geometryczną. Jeśli posiadamy wyłącznie pojęcie liczb naturalnych, to możliwe jest ewentualnie określanie przy pomocy tych liczb i ich stosunków różnych wielkości geometrycznych np. długości odcinków, powierzchni figur – liczby (mające strukturę dyskretną) nie mogą całkowicie odpowiadać punktom geometrycznym (mającym strukturę ciągłą). Dopiero liczby wymierne ujmują pewną istotną cechę *continuum*: dla dowolnych (różnych) dwóch liczb wymiernych istnieje trzecia liczba (różna od nich) leżąca między nimi (ta cecha nazywa się gęstością). W tym momencie czymś naturalnym jest próba przyporządkowania podobnych do siebie struktur. Liczby wymierne tworzą więc pewnego rodzaju *continuum* arytmetyczne.

Ponieważ nie można przejść od jednej liczby wymiernej do następnej (żadna liczba wymierna nie posiada bezpośredniego następnika), więc powiązanie zasady przyczynowości z tymi liczbami (tak jak to ma miejsce w przypadku liczb naturalnych) musiałoby się wiązać z istotną zmianą tej zasady. Myślę, że może stąd brała się tak długo trwająca niechęć do uznania stosunków liczb naturalnych jako pełnoprawnych liczb<sup>45</sup>. W celu przejścia od jednej liczby naturalnej do innej trzeba przejść przez wszystkie liczby pośrednie. Myśląc kategoriami wynikającymi ze struktury liczb naturalnych trudno zrozumieć jak możliwe jest oddziaływanie grawitacyjne np. Słońca na Ziemię, skoro brak jest elementów pośrednich przekazujących tę grawitację. Jeśli chodzi o liczby wymierne, to możliwe jest zbadanie własności danej liczby mimo, że nie możemy własności tych wyprowadzić z elementu początkowego przechodząc przez wszystkie liczby pośrednie. Przy tym badaniu trzeba odwołać się do „całości” tzn. do liczb z pewnego otoczenia badanej liczby. W odniesieniu do liczb wymiernych pojawia się nowy rodzaj zależności między obiektami. Może jest to nowa zasada przyczynowości odmienna od klasycznej (przyczyna  $\rightarrow$  skutek) – zamiast



szukać przyczyny zdarzenia, określamy obszar elementów oddziaływających na to zdarzenie (obszar oddziaływania).

Mimo, że w ciągu liczb wymiernych nie ma liczb kolejno po sobie następujących, to jednak możliwe jest przejście od liczby  $p$  do  $q$ . Tę możliwość ukazuje zasada Archimedesesa, która stwierdza, że dla dowolnych liczb  $p$  i  $q$  ( $q > p$ ) istnieje liczba naturalna  $n$  taka, że  $np > q$ . Możemy dobrać liczbę  $n$  tak, aby była minimalną liczbą dającą pożądaną nierówność – jednak najczęściej nie otrzymujemy dokładnie liczby  $q$ , lecz osiągamy pewne otoczenie tej liczby. Zasada Archimedesesa sprawia, że zostaje utrzymana zasada przyczynowości, jednak tylko z pewnym przybliżeniem. Ponadto, zasada ta wyklucza istnienie nieskończonego małych oraz nieskończonego dużych wielkości liczbowych (a więc wielkości nieosiągalnych w procesie skończonego dzielenia lub dodawania danej wielkości liczbowej).

Starożytni odkryli istnienie wielkości, których nie da się wyrazić przy pomocy stosunku liczb naturalnych. Chodzi o stosunek długości przekątnej kwadratu do długości jego boku – stosunek ten oznaczamy symbolem  $\sqrt{2}$  (jest to pierwsza poznana liczba niewymierna). Okazuje się, że przy pomocy aksjomatu Archimedesesa można zdefiniować stosunek dowolnych odcinków wykorzystując wyłącznie własności liczb naturalnych. Stosunki długości odcinków  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{a'}{b'}$  są równe, jeśli dla dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $m$  prawdziwe są następujące warunki: (1)  $na > mb$ , to  $na' > mb'$ ; (2)  $na = mb$ , to  $na' = mb'$ ; (3)

$na < mb$ , to  $na' < mb'$ . Wszystkie ułamki  $\frac{m}{n}$  dzielą się na trzy klasy, w zależności od tego, czy spełniają (1), (2) czy (3) warunek. Drugi warunek wyznacza klasę wszystkich ułamków równych, czyli ustaloną liczbę wymierną dodatnią. Tę metodę mierzenia (jak zauważyliśmy w rozdziale II) przy pomocy liczb naturalnych wszelkich stosunków (również niewymiernych) podał wielki matematyk starożytności – Eudoksos.

Dowolna liczba rzeczywista jest więc rozumiana jako stosunek pewnych dwóch odcinków (postulat Eudoksosa). W konsekwencji podział (liczb wymiernych na trzy klasy), który wyznacza liczby rzeczywiste, jest zależny od geometrii. Liczby rzeczywiste nie stają się w matematyce greckiej niezależnymi arytmetycznymi bytami, podobnie jak nie stały się nimi liczby wymierne. Nie można więc mówić w przypadku teorii Eudoksosa o powstaniu samodzielnego *continuum* arytmetycznego.

W wieku XIX Dedekind podjął ideę Eudoksosa, jednak, dzięki zastosowaniu innej metody podejścia do tego problemu, mógł przyjąć dodatkowe założenia i uniezależnić pojęcie liczby rzeczywistej od własności geometrycznych. Stało się to w pracy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* napisanej w 1858 r. a opublikowanej w roku 1872. Sam Dedekind przywiązywał do swojego odkrycia bardzo duże znaczenie i często z pietyzmem podkreślał, że miało to miejsce

24 listopada 1858 r., i że poprzez to odkrycie doszedł do prawdziwej definicji ciągłości (*continuum* rzeczywistego). Zobaczmy na czym polegało to odkrycie.

Na samym początku porównuje on liczby wymierne z punktami na prostej geometrycznej. Podaje trzy analogiczne własności, które przysługują tak prostej jak i liczbom wymiernym.<sup>46</sup> (Patrz tabela)

Własność (3) nosi nazwę „podziału Dedekinda”. Według Dedekinda ta analogia sugeruje istnienie odpowiedniości między prostą geometryczną a liczbami wymiernymi – wystarczy ustalić na prostej punkt początkowy i obrać jednostkę. Okazuje się jednak, że na prostej jest nieskończenie więcej punktów niż liczb wymiernych. Jeśli chcemy wyrazić arytmetycznie wszystkie własności *continuum* geometrycznego (a takie było pragnienie Dedekinda), to absolutnie konieczną rzeczą staje się skonstruowanie „narzędzia” w postaci liczb obejmujących, oprócz liczb wymiernych, nowe liczby niewymierne. Ma to się dokonać w oparciu o liczby wymierne i ich własności – i wtedy nowe liczby będą miały taką samą ciągłość jak prosta geometryczna. Na czym ma polegać ta ciągłość?

| Liczby wymierne                                                                                                                                                                                                                          | Prosta geometryczna                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) Dla dowolnych liczb $a, b, c$ , jeśli $a > b$ i $b > c$ , to $a > c$ .                                                                                                                                                               | (1') Dla trzech punktów $a, b, c$ , jeśli $a$ jest na prawo od $b$ , $b$ na prawo od $c$ , to $a$ jest na prawo od $c$ .       |
| (2) Dla dowolnych liczb $a$ i $c$ istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych pomiędzy nimi.                                                                                                                                           | (2') Dla dowolnych punktów $a$ i $c$ istnieje nieskończenie wiele punktów między nimi.                                         |
| (3) Liczba $a$ dzieli liczby wymierne na dwie klasy: klasę $A_1$ taką, że, jeśli $a_1$ jest w $A_1$ , to $a_1 < a$ ; i klasę $A_2$ taką, że, jeśli $a_2$ jest w $A_2$ , to $a_2 > a$ . Liczba $a$ może być albo w $A_1$ , albo w $A_2$ . | (3') Punkt $p$ dzieli punkty prostej na dwie klasy: klasę $P_1$ punktów na lewo od $p$ i klasę $P_2$ punktów na prawo od $p$ . |

Można ją odnaleźć dowodząc podstawowych własności tak otrzymanego *continuum* arytmetycznego. W konsekwencji okazuje się, że długość danego odcinka, rozumiana jako stosunek danego odcinka do odcinka jednostkowego, jest wyznaczona arytmetycznie przez odpowiedni podział liczb wymiernych (aksjomat Dedekinda). Tym samym każdemu punktowi prostej geometrycznej odpowiada pewna liczba rzeczywista (prosta rzeczywista zostaje pozbawiona „luk”, staje się zupełna) – zamiast badać prostą geometryczną i punkty leżące na niej wystarczy rozpatrywać prostą rzeczywistą i tworzące je liczby. *Continuum* rzeczywiste (bo nowym liczbom nadano nazwę „rzeczywiste”) składa się więc z pojedynczych liczb (to tak jakby prosta składała się z pojedynczych punktów) – to co było niemożliwe dla starożytnych stało się faktem.

Podajmy kolejny przykład rozważań „ciągłościowych”. Jeśli krawędź sześciianu wzrasta w sposób ciągły od 1 do 2, to również w sposób ciągły musi

zmienić się jego objętość od 1 do 8; i stąd wnioskujemy, że objętość musi przyjmować, między innymi, wartość 2. W ten sposób można teoretycznie rozstrzygnąć słynne zagadnienie dotyczące podwojenia sześcianu<sup>47</sup>. Również dopiero w oparciu o aksjomat Dedekinda mamy pewność, że ciągła krzywa łącząca wnętrze koła z punktami zewnętrznymi przecina jego brzeg. Pojęcie liczby rzeczywistej wprowadzone przez Dedekinda sprawiło, że marzenie pitagorejczyków zostało zrealizowane: arytmetyka stała się niezależna od geometrii, a co więcej, to właśnie arytmetyka postuluje istnienie geometrycznych wielkości, których sama geometria nie dostrzega<sup>48</sup>.

## 7. Pojęcie *continuum* a teoria mnogości

Jednym z głównych problemów, który ukazał potrzebę zajęcia się pojęciem zbioru i uczynienia go bytem matematycznym był problem przedstawiania funkcji przy pomocy szeregów trygonometrycznych:  $\frac{1}{2}a_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ .

Zaczął się wszystko w pracy Fouriera na temat przepływu ciepła. Fourier założył, że dowolna funkcja posiada reprezentację trygonometryczną i podał postać współczynników tego rozwinięcia. Wagę metody dostrzegł Cauchy w pracy *Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques*<sup>49</sup> z roku 1823, sądził jednak, że każdy szereg trygonometryczny jest zbieżny i reprezentuje pewną funkcję. Zupełnie nie zgadzał się z takim podejściem Dirichlet wskazując przykład szeregu naprzemiennego, posiadającego dwie różne granice. Taki szereg nie mógł bowiem reprezentować funkcji z powodu braku jednoznaczności. Badając jakie funkcje można przedstawiać przy pomocy szeregów trygonometrycznych doszedł do sformułowania twierdzenia (zwanego warunkiem Dirichleta) będącego warunkiem wystarczającym (ale nie koniecznym) takich reprezentacji:

*Jeśli funkcja  $\varphi(x)$  (której wszystkie wartości są skończone i określone) posiada tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości pomiędzy punktami granicznymi  $-\pi$  i  $\pi$  oraz jeśli w dodatku nie ma więcej niż skończoną liczbę maksimów i minimów pomiędzy tymi punktami, to szereg trygonometryczny jest zbieżny i w każdym punkcie ma granicę określoną wyrażeniem:  $\frac{1}{2}(\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon))$ , przy czym  $\varepsilon$  oznacza nieskończenie małą liczbę<sup>50</sup>.*

Dopiero spojrzenie na całe zagadnienie z ogólniejszego punktu widzenia pozwoliło sformułować warunek konieczny i wystarczający. Udało się to Riemannowi w jego *Habilitationschrift*<sup>51</sup> z 1854 r. Poprzez prowadzone badania chciał dowiedzieć się jak wiele nieciągłych funkcji można przedstawić w postaci szeregu Fouriera oraz jakie własności musi posiadać funkcja, aby

istniał szereg Fouriera zbieżny do wartości tej funkcji w każdym punkcie. Równocześnie postawił ten problem w odniesieniu do całkowalności funkcji.

Jak wiadomo to doprowadziło go do definicji całki (zwanej całką Riemanna). W końcu przy pomocy pojęcia funkcji całkowalnej definiuje warunek konieczny i wystarczający przedstawiania funkcji, mającej punkty nieciągłości, w szereg trygonometryczny.

Z wyjątkiem funkcji, które mają nieskończenie wiele maksimów i minimów, dla reprezentacji funkcji  $f(x)$  w postaci szeregu trygonometrycznego (którego współczynniki zmierzają do zera) wystarczające i konieczne jest, aby, jeśli funkcja staje się nieskończona dla  $x = a$ , to  $f(a+t)t$  oraz  $f(a-t)t$  stały się nieskończenie małe, przy czym  $f(a+t) + f(a-t)$  są całkowalne aż do  $t = 0$ .

Na koniec rozważań zajął się funkcjami nieciągłymi, które mają nieskończenie wiele oscylacji na danym skończonym odcinku. Riemann spostrzegł, że takie funkcje są czasami całkowalne, nawet jeśli nie są przedstawialne przy pomocy szeregów Fouriera. Podaje następujący przykład:

$$\int f(x)dx = \varphi(x) \cos \psi(x),$$

przy czym zakłada, że funkcja  $\varphi(x)$  jest dowolnie mała, a  $\psi(x)$  dowolnie duża dla nieskończenie wielu wartości  $x$  oraz te funkcje są w sposób ciągły różniczkowalne poza pewną nieskończoną liczbą maksimów (minimów). Mimo całkowalności szereg Fouriera utworzony z tych funkcji nie jest zbieżny.

Również odwrotnie: istnieją funkcje niecałkowalne na dowolnie małym odcinku, jednakże, dla nieskończenie wielu wartości na tym odcinku, szereg trygonometryczny jest zbieżny.

Riemann podaje przykład następującej funkcji:

$$\sum \frac{(nx)}{n}$$

gdzie  $(x)$  oznacza różnicę między  $x$  i najbliższą liczbą całkowitą. Jeśli  $x$  leży dokładnie pośrodku między dwiema liczbami całkowitymi, to  $(x)$  oznacza zero.

Ta funkcja ma następującą reprezentację w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$\sum_{1,\infty}^n \frac{(-1)^n \sin 2\pi nx}{n\pi}$$

gdzie  $\sum_{1,\infty}^n (-1)^n$  oznacza sumę jedynek (ze znakiem  $+$  lub  $-$ ), przy czym,

jeśli  $n$  jest parzyste, to ta suma jest dodatnia, a jeśli nieparzyste, to ujemna.

Powyższa funkcja nie jest ograniczona na żadnym dowolnie małym przedziale, a więc jest niecałkowalna.



Tym samym pokazał Riemann różnicę między całkowalnością a rozwi-  
jalnością w szereg trygonometryczny. I w związku z tym postawił pytanie: czy  
funkcja rozwijalna w szereg trygonometryczny może mieć jeszcze inne rozwi-  
nięcie trygonometryczne?

E. Heine podkreślał ogromne znaczenie tego pytania w pracy z 1870 r.<sup>52</sup>.  
Zachęcał Cantora do zajęcia się tym problemem i podkreślał, że nawet najwięk-  
sze umysły takie jak Dirichlet, Lipschitz czy Riemann nie podołali problemowi  
jednoznaczności rozwinięcia. Sam Heine w powyższej pracy podał pewne roz-  
wiązanie tego zagadnienia w postaci następującego kryterium:

*Funkcja  $f(x)$ , ciągła poza co najwyżej skończoną ilością punktów, może być  
przedstawiona w jeden sposób przy pomocy szeregu trygonometrycznego, jeśli  
szereg ten jest wszędzie jednostajnie zbieżny. Ta reprezentacja ma miejsce na  
przedziale  $(-\pi, \pi)$ .*

Cantor dość szybko znalazł ogólne rozwiązanie tego problemu w posta-  
ci kryterium:

*Jeśli funkcja zmiennej rzeczywistej  $f(x)$  jest dana szeregiem trygonometrycz-  
nym zbieżnym dla każdej wartości  $x$ , wtedy nie istnieje inny szereg trygonome-  
tryczny tej samej postaci, który podobnie byłby zbieżny dla każdej wartości  $x$   
i przedstawiał funkcję  $f(x)$ .*

Żadnych dodatkowych założeń co do funkcji ani zbieżności, byle tylko  
ta zbieżność miała miejsce wszędzie a funkcja była rzeczywista. Samo pojęcie  
funkcji rzeczywistej mogło się pojawić jednak dopiero po zdefiniowaniu liczb  
rzeczywistych. I to właśnie uczynił Cantor. Do jego czasów operowano liczbami  
rzeczywistymi, które pojawiały się jako pierwiastki niektórych równań, jed-  
nak nie istniała definicja liczby rzeczywistej i samo to pojęcie rozumiano intu-  
icyjnie.

Przyjrzyjmy się pracy Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus  
der Theorie der trigonometrischen Reihen* z 1871 r.<sup>53</sup>, w której wprowadza po-  
jęcie liczby rzeczywistej.

Na początku wprowadza pojęcie ciągu fundamentalnego:

Nieskończony ciąg

$$(*) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

jest nazywany ciągiem fundamentalnym, jeśli istnieje liczba całkowita  
 $N$  taka, że dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej  $\varepsilon$  mamy  $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ ,  
dla dowolnych  $m$  i dla wszystkich  $n > N$ <sup>54</sup>.

Jeśli ciąg  $(*)$  spełnia powyższy warunek, to Cantor mówi, że ciąg ten  
ma określoną granicę  $b$ . Jednak ciąg  $\{a_n\}$  nie posiada dla Cantora aktualnie  
granicy  $b$ , lecz jedynie jest związany z pewnym symbolem  $b$ . Jest to bardzo  
ważne, gdyż w tym momencie Cantor nie traktuje tego ciągu jako liczby – jest

to tylko symbol (*Zeichen*). Dopiero po zdefiniowaniu porządku na tak otrzymanych symbolach nazywa je liczbami (*Zahlengrößen*).

Porządek wprowadza w następujący sposób. Dowolnym ciągom fundamentalnym  $\{a_n\}, \{a'_n\}$  odpowiadają symbole  $b$  i  $b'$ .

1.  $b = b'$ , jeśli istnieje liczba  $N$  taka, że  $a_n - a'_n < \varepsilon$ , dla wszystkich  $n > N$ ;
2.  $b > b'$ , jeśli istnieje liczba  $N$  taka, że  $a_n - a'_n > \varepsilon$ , dla wszystkich  $n > N$ ;
3.  $b < b'$ , jeśli istnieje liczba  $N$  taka, że  $a_n - a'_n < -\varepsilon$ , dla wszystkich  $n > N$ .

Cantor zauważa, że dla dowolnych ciągów albo  $a = b$ , albo  $a > b$ , albo  $a < b$ . Oznacza to, że między tak określonymi symbolami można wprowadzić porządek liniowy, taki sam jaki istnieje między liczbami wymiernymi. Ponadto, jeśli  $b$  jest granicą ciągu, to  $b - a_n$  staje się dowolnie małe<sup>55</sup>.

W ten sposób otrzymuje Cantor nowe liczby, które oznacza symbolem  $B$ . Nie mają one jednak, według niego, sensu same w sobie. Są zależne od zdefiniowanych wcześniej ciągów. Ich sens określony jest przez twierdzenia, w których występują. Mają one inny rodzaj obiektywności (istnienia) niż liczby wymierne (które tworzą klasę oznaczaną przez Cantora symbolem  $A$ ). Czy mają szansę stać się bytami w sobie? To rozważa Cantor w dalszej części.

Najpierw podejmuje problem identyfikacji tak otrzymanych liczb z punktami geometrycznego *continuum*. Dla liczb wymiernych jest to oczywiste. Przy ustalonym początku i jednostce na osi liczbowej punktowi  $p$  odpowiada wymierny stosunek odległości tego punktu od początku. Pozostałe punkty prostej mogą być osiągnięte przy pomocy ciągu liczb wymiernych  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , który przybliży dany punkt  $q$  dowolnie blisko. Ten ciąg można traktować jako liczbę z klasy  $B$ . Czyli każdemu punktowi na prostej odpowiada dokładnie jedna liczba (każdy inny ciąg przybliżający punkt  $q$  musiałby być równy ciągowi  $\{a_n\}$ , na podstawie własności, wprowadzonego przez Cantora, porządku).

W ten sposób prosta geometryczna jest zanurzalna w klasie  $B$  nowo otrzymanych liczb. Aby otrzymać również przyporządkowanie odwrotne Cantor wprowadza aksjomat regulujący tę kwestię.

*Dla każdej liczby istnieje określony punkt na prostej, którego współrzędna jest równa temu punktowi*<sup>56</sup>.

Czy można znaleźć uzasadnienie matematyczne tego aksjomatu? Powyższy aksjomat stwierdza, że prosta jest na tyle bogata, że można w niej umieścić wszystkie nowo zdefiniowane liczby – nie ma „dziur” z punktu widzenia klasy liczb  $B$ . Prowadzi to do spostrzeżenia, że punktów na prostej jest „tyle samo” co liczb w klasie  $B$ . Potrzeba wprowadzenia powyższego aksjomatu pokazuje, iż

dwie nieskończone klasy mogłyby mieć różną ilość elementów. W celu rozstrzygnięcia tej kwestii należy zająć się danymi obiektami wyłącznie ze względu na ilość elementów, które posiadają. Cantor proponuje klasy zawierające liczby nazywać zbiorami wartości (*Werthmenge*), a obiekty zawierające punkty zbiorami punktowymi (*Punktmenge*)<sup>57</sup>. I w oparciu o ogólne pojęcie zbioru punktowego wprowadza pojęcie punktu skupienia (granicznego) zbioru (*Grenzpunkt einer Punktmenge*):

*Przez punkt skupienia zbioru P rozumiem punkt linii prostej, dla którego, w dowolnym jego otoczeniu, można znaleźć dowolnie wiele punktów zbioru P, przy czym może się zdarzyć, że sam punkt skupienia należy do tego zbioru. Przez otoczenie (Umgebung) rozumiem odcinek zawierający ten punkt w swoim wnętrzu*<sup>58</sup>.

Powyższe pojęcie nie jest pojęciem „pustym”, gdyż, jak łatwo zauważyć, każdy zbiór nieskończony (na ograniczonym przedziale) ma przynajmniej jeden punkt skupienia. Jest to inne sformułowanie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa mówiącego, że każdy ograniczony ciąg posiada podciąg zbieżny. Podejście Cantora ukazuje znaczenie przestrzeni, które posiadają powyższą własność (są to np. zbiory nieskończone i ograniczone) – właśnie to podejście doprowadziło później do wprowadzenia ogólnego pojęcia zwartości<sup>59</sup>.

Może więc teraz Cantor wprowadzić pojęcie pierwszej pochodnej  $P'$  zbioru  $P$  (*erste abgeleitete Punktmenge von P*) jako zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru  $P$ . Dlaczego to pojęcie jest takie ważne? Bo okazuje się, że pochodna wszystkich punktów wymiernych na prostej jest równa zbiorowi  $B$ , tworzy więc liniowe *continuum* rzeczywiste. Operacja pochodnej może więc być generatorem *continuum*. To naprowadziło Cantora na definicję *zbioru doskonałego* jako takiego, który zawiera wszystkie swoje punkty skupienia i składa się wyłącznie z punktów skupienia. Okazuje się jednak, że zbiór doskonały nie realizuje wszystkich własności *continuum* – może brakować mu spoistości, jak pokazuje przykład zbioru Cantora skonstruowanego przez niego w pracy z 1883 r.<sup>60</sup>

W celu usunięcia tej trudności wprowadza definicję zbioru spójnego: *Zbiór punktowy T jest spójny, jeśli dla dowolnych jego punktów  $t$  i  $t'$  oraz dowolnej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje skończona liczba punktów  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ze zbioru T takich, że odległości  $tt_1, t_1t_2, \dots, t_nt'$  są mniejsze niż  $\varepsilon$* .<sup>61</sup>

Dla Cantora *continuum* jest to zbiór, który jest doskonały i spójny. W przypadku domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni euklidesowej definicja Cantora pokrywa się ze współczesnym rozumieniem *continuum* topologicznego.

Zauważmy, że do zdefiniowania punktu skupienia potrzebne jest Cantorowi pojęcie otoczenia punktu. Używa również pojęcia „wnętrza” (*Innere*); ze sposobu użycia tego pojęcia przez Cantora widać jego ogólność – punkt dowolnego zbioru jest jego punktem wewnętrznym, jeśli istnieje kula o dostatecznie małym promieniu i środku w tym punkcie całkowicie zawarta w tym zbiorze. Aż do czasów Hausdorffa, który podał w 1914 r.<sup>62</sup> aksjomatyczne i w pełni ogólne ujęcie topologii, tak rozumiano otwartość. W ten sposób wchodzi do

matematyki pojęcie otwartości, na którym wspiera się konstrukcja topologii i wielu kluczowych pojęć używanych we współczesnej matematyce (jak pokazaliśmy w rozdziale II, § 5 na pojęciu zbioru otwartego oparta jest definicja zbioru zwartego i spójnego czyli w konsekwencji *continuum* topologicznego).

W naturalny sposób z tych rozważań wyłania się idea odwzorowania wzajemnie jednoznacznego (1-1) między różnego typu zbiorami (*Werthmenge* i *Punktmenge*). To skłoniło Cantora do badań teoriomnogościowych. W 1874 roku publikuje Cantor pierwszą czysto teoriomnogościową pracę: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*<sup>63</sup>, w której dowodzi, że zbiór liczb algebraicznych (pierwiastki równań wielomianowych o współczynnikach wymiernych) jest równoliczny (*abzählbar*) ze zbiorem liczb naturalnych. Udowodnił również, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych i dla dowolnego odcinka prostej rzeczywistej można znaleźć na tym odcinku liczbę, która nie występuje w danym ciągu. Z tego faktu wynika, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny (*unanbzählbar*).

W kolejnej pracy wprowadził pojęcie mocy zbioru (*Mächtigkeit*) jako klasy wszystkich zbiorów równej mocy<sup>64</sup>. Wyróżnił dwie klasy zbiorów: zbiory równej mocy (równoliczne) ze zbiorem liczb naturalnych (zbiory przeliczalne) oraz zbiory równoliczne ze zdefiniowanym przez siebie *continuum* rzeczywistym (zbiory ciągłe). Wykazał, że do zbiorów przeliczalnych należą liczby wymierne oraz algebraiczne a do zbiorów ciągłych dowolne odcinki, odcinki z wyrzuconą przeliczalną ilością punktów, kwadrat a nawet sześciąt. Wykazał również, że zbiory przeliczalne i ciągłe są różnej mocy. Na tym więc polega różnica w istnieniu między liczbami wymiernymi  $A$  oraz liczbami rzeczywistymi  $B$  – posiadają inną nieskończoność.

Wynik ustalający wzajemną odpowiedniość między odcinkiem i kwadratem wydawał się niezmiernie paradoksalny – jak dwie współrzędne mogą być zredukowane do jednej? Cantor dochodził do niego przez kilka lat: rodził się on głównie w korespondencji z Dedekindem. W liście z roku 1872 pisał do Dedekinda: *Czy może płaszczyzna (kwadrat zawierający swój brzeg) być odwzorowana wzajemnie jednoznacznie na prostą (odcinek zawierający brzeg) tak, aby każdemu punktowi płaszczyzny odpowiadał punkt prostej i na odwrót, każdemu punktowi prostej odpowiadał punkt płaszczyzny*<sup>65</sup>. Po dłuższej korespondencji 20 czerwca 1877 roku wreszcie znajduje pozytywne rozwiązanie tego problemu: *Powierzchnie, bryły i nawet figury  $n$ -wymiarowe mogą być odwzorowane wzajemnie jednoznacznie na prostą*<sup>66</sup>.

Ten wynik Cantora pokazuje, że zwiększenie wymiaru nie wiąże się ze wzrostem mocy zbioru. Wzrastać musi więc coś innego – jak się później okazało jest to rozciągłość (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne i ciągłe zachowuje wymiar). Stało się jasne, że pojęcie rozciągłości ma kluczowe znaczenie (przynajmniej dla uchwycenia pojęcia wymiaru).

W naturalny sposób liczby rzeczywiste dzielą się na dwie klasy: zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych. Liczby wymierne mają mniej-



szą moc niż liczby rzeczywiste. A jak jest z liczbami niewymiernymi? I znów Cantor w korespondencji z Dedekindem udowodnił, że liczb niewymiernych na odcinku  $(0,1)$  jest tyle samo co wszystkich liczb tego odcinka<sup>67</sup>. Przechodząc od liczb niewymiernych do wszystkich liczb rzeczywistych nie otrzymujemy wzrostu mocy zbioru. Jednak zbiór liczb niewymiernych zasadniczo różni się od liczb rzeczywistych – temu pierwszemu brakuje np. pewnej „spoistości”, którą posiada cały odcinek czy prosta. Co to za własność, która rozróżnia te zbiory? Jak ująć ją w sposób matematyczny? I w ten sposób znowu dochodzimy do pojęcia rozciągłości (*continuum*) leżącego u podstaw powyższego rozróżnienia. Wprowadzenie tego pojęcia usuwa paradoksalność powyższych wyników.

Czymś naturalnym w tym miejscu wydawało się przyjąć hipotezę, że istnieją tylko dwie, wskazane powyżej, moce. Cantor tego nie uczynił, lecz rozpoczął badania, w których doszedł do stwierdzenia, że istnieją dowolnie duże moce (różnych nieskończoności jest nieskończenie wiele). Później w oparciu o wcześniejsze badania zaczął rozwijać teorię liczb pozaskończonych<sup>68</sup>. Metoda, którą wprowadził działała jak maszynka produkująca dowolnie duże liczby nieskończone.

To wprowadzenie do matematyki pojęcia nieskończoności (i to jeszcze w takim bogactwie) spotkało się ze strony dużej ilości matematyków z silnym oporem. Między innymi sam Gauss przeciwstawiał się z całą stanowczością teorii zbiorów nieskończonych. W liście do Heinricha Schumachera pisze:

*Odnosnie twojego dowodu, protestuję przede wszystkim przeciwko używaniu nieskończonej wielkości jako czegoś całkowicie jednego, co w matematyce jest niedopuszczalne. Nieskończoność jest tylko façon de parler, w którym mówi się właśnie o granicach*<sup>69</sup>.

Jednak dzięki metodzie Cantora stało się możliwe matematyczne ujęcie pojęcia *continuum*. Musimy w tym celu rozpatrywać nie pojedyncze liczby, lecz klasy liczb (podzbiory liczb naturalnych). O ile pojedyncze punkty są od siebie oddzielone, to odpowiednie podzbiory tych liczb „stykają się” ze sobą. Przedmiotem badań teorii *continuum* są więc podzbiory liczb naturalnych. Okazuje się, że pojęcia: „istnieje” oraz „dla każdego” można stosować nie tylko w przypadku liczb naturalnych, lecz również w odniesieniu do miejsca w *continuum* – aby określić pewną liczbę rzeczywistą wystarczy wskazać odpowiedni podzbiór liczb naturalnych (ciąg fundamentalny liczb wymiernych), tworzących liczbę rzeczywistą. Ponieważ mamy ogólne prawo określające sposób powstawania takich liczb, są one dane naraz (są to wszystkie możliwe konstrukcje), a nie krok po kroku w ramach przeprowadzonych konstrukcji. Teoria mnogości uznaje następujące stwierdzenie: klasa wszystkich możliwych podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest zbiorem. Tym samym zbiór liczb rzeczywistych uzyskuje status aktualnego istnienia – *continuum* staje się więc bytem w sobie.

Czym w tym ujęciu okazuje się „miejsce” w *continuum*, punkt, do którego nie może nas doprowadzić żaden skończony (czy nawet nieskończony przeliczalny) podział *continuum* (ponadto, jak zauważył Arystoteles, z tych

punktów *continuum*ów nie jest możliwe odtworzenie z powrotem tego *continuum*?) Miejszem w *continuum* rzeczywistym jest liczba rzeczywista, czyli odpowiedni podzbiór liczb naturalnych. Odcinki czy inne *continua* są to rodziny zbiorów zadaną odpowiednią strukturą. Dopiero podejście teoriomnogościowe sprawia, że możliwe jest odtworzenie z „miejsc” *continuum* całego *continuum*<sup>70</sup>. Teoria mnogości zajmuje się, w przypadku liczb naturalnych, całością jego podzbiorów jako zamkniętym układem istniejących w sobie obiektów. Tym samym do matematyki wkracza nieskończoność aktualna i ona to w konsekwencji sprawia, że możliwe jest udowodnienie faktów, które są intuicyjnie oczywiste, lecz wcześniej były nieuchwytnie dla matematycznego dowodzenia. Należą do nich, między innymi: przechodzenie funkcji ciągłej przez wszystkie wartości pośrednie (twierdzenie Darboux), niemożność odwzorowania przestrzeni jednowymiarowej na przestrzeń dwuwymiarową w sposób ciągły i wzajemnie jednoznaczny (twierdzenie o niezmienniczości wymiaru) czy podział płaszczyzny na dwa obszary przy pomocy krzywej zwykłej zamkniętej bez samoprzecięć (twierdzenie Jordana). Oczywiście, poza potwierdzeniem naszej intuicji dowodzi się wiele faktów, które ją przekraczają i zdają się jej przeczyć.

Sama definicja zbioru nieskończonego, przyjęta w teorii mnogości, ukazuje, że nieskończoność jest pierwotna w stosunku do skończoności. Zgodnie z tą definicją zbiór jest nieskończony, jeśli można go odwzorować w sposób wzajemnie jednoznaczny na jego podzbiór właściwy. Nieskończoność jest więc jakby konstruowana poprzez wskazanie odpowiedniego zbioru i funkcji. Na przykład, jeśli chodzi o zbiór liczb naturalnych, to jest on nieskończony, gdyż istnieje zbiór liczb parzystych (jako podzbiór liczb naturalnych) i funkcja  $f(n) = 2n$  (różnowartościowa) odwzorowująca zbiór liczb naturalnych na ten podzbiór. Skończoność definiujemy niekonstrukcyjnie, przy pomocy negacji nieskończoności – zbiór jest skończony, jeśli **nie istnieje** funkcja wzajemnie jednoznaczna na żaden jego podzbiór właściwy. Znowu wydaje się to sprzeczne z intuicją.

Dzięki językowi teorii mnogości posługiwanie się intuicją staje się zbędne oraz w wielu przypadkach niewskazane. Na przykład poprzez wprowadzenie pojęcia *łańcucha* możemy wyeliminować używanie nieprecyzyjnej idei „i tak dalej” w stwierdzeniu: każda liczba naturalna może być osiągnięta, gdy rozpoczynając od liczby 1 będziemy brać kolejne następniki  $n(1) = 2$ ,  $n(2) = 3$  itd. aż dojdziemy do każdej z góry wyznaczonej liczby. Ta eliminacja nieścisłości jest zarazem eliminacją intuicyjnego używania i rozumienia pojęcia „nieskończonej operacji”. Wygląda ona następująco. Zbiór  $C$  nazywamy *łańcuchem*, jeśli wraz z każdą liczbą  $x$  zawiera jej następnik, czyli  $x+1$ . Powyższe stwierdzenie przyjmuje teraz postać: każdy łańcuch, który zawiera 1 jest identyczny z całym zbiorem liczb naturalnych. Aby to stwierdzenie miało jednak sens trzeba uprzednio nadać status obiektywnego istnienia zbiorowi liczb naturalnych.

Jedną z najważniejszych metod stosowanych w teorii mnogości jest *aksjomat wyboru*. Ukazuje on jak nasza intuicja ściśle związana jest z liczbami naturalnymi. Aksjomat ten stwierdza, że w przypadku dowolnej rodziny zbior-

rów istnieje zbiór zawierający po jednym elemencie z każdego zbioru tej rodziny. Aksjomat ten wydaje się intuicyjnie oczywisty: jeśli przed nami przesuwają się taśmy zawierające pojemniki z kulami, to możliwe jest wyjmowanie po jednej kuli z każdego pojemnika i wrzucenie ich do nowego stojącego koło nas. Jednak, jeśli tempo przesuwania się taśmy wzrasta, to taka czynność stanie się w pewnym momencie niemożliwa – zabraknie czasu. Tak jak kończy się **możliwość** wyjmowania kul przy zbyt dużej prędkości, tak również kończy się **intuicja**, gdy rodzina zbiorów staje się nieskończona. Ta intuicja jest ograniczona przez strukturę zbioru liczb naturalnych.

Aksjomatowi wyboru równoważne okazuje się twierdzenie Zermelo, które stwierdza, że każdy zbiór można dobrze uporządkować<sup>71</sup>. Idea dobrego początku jest ideą kluczową i charakterystyczną dla zbioru liczb naturalnych – na niej ufundowana jest bowiem zasada indukcji matematycznej<sup>72</sup>. Każdy więc zbiór (np. zbiór liczb rzeczywistych) można tak uporządkować, aby „odzyskać” podstawową własność zbioru liczb naturalnych. Może więc wszystko, jak sądzili pitagorejczycy, sprowadza się do liczb (naturalnych)?

## 8. Nowa idea nauki uniwersalnej

Kartezjańskie *cogito* jest granicznym obiektem procesu radykalnego wątpienia. Nazwałem je absolutem poznawczym, gdyż dopiero po doświadczeniu istnienia *cogito* rozpoczyna się poznawanie rzeczywistości. Dokonując więc, w ramach tej koncepcji, przejść granicznych, nie mamy tak naprawdę możliwości wyjścia poza obszar subiektywności – to, co otrzymamy w granicy (nowego?), to tylko i wyłącznie *cogito*, gdyż jedynym przejściem granicznym dającym nowe informacje jest radykalne wątpienie – prowadzi ono do powstania metody konstrukcji wiedzy i rekonstrukcji świata. *Cogito* odkrywa w sobie ideę nieskończonego i doskonałego Bytu, co w konsekwencji daje wiedzę o materialnym świecie, jednak do otrzymania tej wiedzy potrzebny jest, jak zauważyłem w rozdziale 4, dowód na istnienie absolutu poznawczego. Sama konstruowana nauka jest przede wszystkim dowodem na istnienie tego absolutu.

Również w przypadku Leibniza nie mamy możliwości wyjścia poza pierwotne intuicje i obiekty skonstruowane w oparciu o te intuicje. „Prawdziwa” twórczość ma miejsce na początku, gdzie umysł w nieskończonym procesie dociera do prawdziwych elementów rzeczywistości, które stanowią podstawę konstrukcji gmachu wiedzy. Tak w przypadku Kartezjusza jak i Leibniza dalszy bieg pracy uczonego biegnie spokojnie naprzód bez konieczności uruchamiania jakichś nieskończonych czy granicznych procesów. Te procesy zostały przeprowadzone na początku i stworzyły trwałe i stabilne fundamenty dalszego rozwoju.

Jak pokazałem w poprzednich paragrafach, na przykładzie Bolzano, Riemanna, Dedekinda i Cantora, w XIX wieku można dostrzec zakwestionowanie powyższego schematu budowy i konstrukcji nauki. Podstawa, na której wspierał

się gmach matematyki, okazała się pełna niejasności, problemów i sprzeczności. Matematyka została zmuszona wobec tego do wejścia na obszary wcześniej zastrzeżone. Podjęto próby uchwycenia metodą matematyczną *continuum* geometrycznego, pojęcia wymiaru, różnorodności, zbioru nieskończonego. Tym samym uznano za źródła poznawcze inne procesy graniczne (poza zasadą ciągłości).

Jak zobaczymy w dalszej części okazało się, że do otrzymania wiedzy wykraczającej poza idee znajdujące się w umyśle wystarczy stosować różnego rodzaju procesy graniczne, bez konieczności dowodu na istnienie absolutu poznawczego. Następuje więc istotne uproszczenie modelu naukowości. Jednak sam absolut poznawczy zostaje. Jak sądzę, w pojęciu **niezmiennika** możemy odnaleźć ideę jednego z ważniejszych absolutów poznawczych nowej idei nauki uniwersalnej. Ta idea sprowadza się do odnajdywania istotnych własności danej struktury poprzez wykonywanie na niej pewnej operacji. Własności, które po wykonaniu danej operacji zachowują się są traktowane jako te, które charakteryzują badany obiekt. Całokształt tak otrzymanych własności i zależności stanowi istotę badanego obiektu. Pojęcie **całokształtu** ogranicza ciąg wzajemnych zależności, staje się niezmiennikiem poznania określającym z jednej strony strukturę rzeczywistości, a z drugiej prawdę procesu poznawczego (jak sądził Riemann). Tę ideę, jak pisaaliśmy w § 3, ukazywał również Bolzano mówiąc, że w matematyce mamy do czynienia z obiektywnymi związkami zawartymi w twierdzeniach a nie z subiektywnymi przekonaniem czy wierzeniami. Dowód ma za zadanie odsłonić obiektywne związki między twierdzeniami, w szczególności pomiędzy obiektywnymi prawdami. Natomiast prawdziwa definicja musi zawierać tylko takie oznaczenia definiowanego pojęcia, aby odsłaniała jego istotę – odpowiednio bogaty system właściwych pojęć, ujęty w strukturę definicji, daje możliwość dotarcia do istoty rzeczywistości. Według Bolzano właściwe definicje są jedyną drogą dotarcia do świata (istniejącego obiektywnie) poprzez subiektywny świat myśli.

Przypomnijmy, że w nowożytnym modelu naukowości wiedzę uzyskiwało się w dwóch etapach:

1. Etap upraszczania i redukcji, w wyniku którego otrzymujemy absolut poznawczy i podstawowe elementy konstrukcji wiedzy (jest to etap „infinitystyczny” opierający się na przejściu granicznym).

2. Etap konstrukcyjny, gdzie z elementów podstawowych, otrzymanych w etapie pierwszym, buduje się wszelką możliwą wiedzę (jest to etap finitystyczny – konstrukcje mają charakter skończony).

Jak zauważyłem w rozdziale IV, uprawomocnieniem etapu drugiego (i zarazem uzupełnieniem pierwszego) jest dowód na istnienie absolutu poznawczego.

Natomiast nowe metody wprowadzone w matematyce XIX-wiecznej opierają się w pewnym sensie na odwróceniu kolejności powyższych etapów.

1. Najpierw w wyniku konstrukcji czy na podstawie definicji (np. pojęcia liczby rzeczywistej, pojęcia zbioru, rozciągłości) otrzymujemy zbiór własności, które są niezmiennikami pewnego typu operacji (są to np. własności wspólne dla prostej geometrycznej i liczb rzeczywistych czy „niezmiennik” teorii mnogości –



moc zbioru). Istotne znaczenie ma tutaj wydzielenie operacji i działań, które traktowane są jako generatory niezmienniczych własności. W przypadku topologii takim działaniem jest homeomorfizm, a jeśli chodzi o teorię mnogości odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne.

2. Następnie ma miejsce etap różnorodnych konstrukcji granicznych. Jedną z pierwszych konstrukcji tego typu jest, skonstruowany przez Cantora, słynny „zbiór Cantora”. Ten zbiór ma podstawowe znaczenie zarówno dla topologii, jak i dla teorii mnogości. Później mamy do czynienia w matematyce z całą lawiną konstrukcji granicznych. Są one nieodzownym źródłem nowych matematycznych bytów i własności.

Przyjrzyjmy się konstrukcji zbioru Cantora, aby zobaczyć, jak moc zbioru, jako absolut poznawczy, daje możliwość przeprowadzenia tej konstrukcji i w konsekwencji odkrycia nieznanych uprzednio własności.

Konstrukcja przebiega następująco:

Z odcinka domkniętego  $[0,1]$  wyrzucamy odcinek otwarty  $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ . Z pozostałych dwóch odcinków domkniętych znów wyrzucamy odcinki „środkowe”  $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$  i  $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$ . Tę procedurę powtarzamy nieskończenie wiele razy. Zbiór,

który zostanie po wyrzuceniu tych wszystkich odcinków otwartych, to właśnie zbiór Cantora<sup>73</sup>. Widać wyraźnie, że ta konstrukcja jest typową procedurą graniczną. Z punktu widzenia zasady ciągłości, tego typu konstrukcja nie jest niczym interesującym, gdyż wszystkie ewentualne własności tak otrzymanego zbioru są już własnościami odcinka  $[0,1]$  (jest to przecież tylko układ nieskończenie małych odcinków). Dopiero w nowym spojrzeniu na matematykę tego typu konstrukcja uzyskuje sens. Ponadto ważne jest to, iż moc całego odcinka jest nieprzeliczalna, a ilość kroków konstrukcji jest przeliczalna (czyli mocy mniejszej) i stąd, otrzymany w ten sposób zbiór, ma szansę być niepusty, a więc może w ogóle zaistnieć jako świat nowych własności. I rzeczywiście, zbiór Cantora jest skarbnicą własności topologicznych i teoriomnogościowych.

Sama konstrukcja zbioru Cantora polegająca na wyrzucaniu kolejnych „środkowych” odcinków wydaje się zupełnie niszczyć strukturę *continuum* odcinka. I tak jest rzeczywiście. Otrzymany zbiór Cantora jest niespójny (nawet całkowicie niespójny – najmniejsza jego część nie posiada części spójnych). Jednak zachowuje pewne własności *continuum*: jest zwarty i w sobie gęsty (każdy punkt zbioru Cantora jest granicą punktów tego zbioru). Oprócz „widocznych” punktów zbioru Cantora (końce wyrzucanych odcinków tzw. punkty wymierne zbioru Cantora) istnieją jeszcze punkty „niewidoczne” (wewnętrzne, niewymierne punkty zbioru Cantora) w zbiorze Cantora. Można powiedzieć, że te wewnętrzne punkty, dzięki którym zbiór Cantora jest w sobie gęsty, decydują o spoistości odcinka, gdyż przeliczalna operacja nie była w stanie ich usunąć.

Zresztą, o ile punktów wymiernych jest przeliczalnie wiele, to zbiór punktów niewymiernych zbioru Cantora jest nieprzeliczalny (czyli ma „tyle samo” punktów co odcinek). Powyższy fakt jest prawie regułą we wszystkich „patologicznych” konstrukcjach przeprowadzanych później w matematyce – to co niewidoczne jest niemal wszystkim. Ta niewidoczność nie oznacza, że dane obiekty nie są uchwytnie dla metod matematycznych – te obiekty są jedynie niewidoczne dla uprzednio ukształtowanej intuicji. W nowej metodzie dopiero nowe konstrukcje stanowią podstawę budowy odpowiednich skojarzeń i „nowej” intuicji.

Zauważmy, że pojawienie się „różnych nieskończoności” nie jest możliwe w nowożytnym schemacie poznawczym. Próba otrzymania w tym schemacie nowych nieskończonych bytów prowadzi do sprzeczności, których w żaden sposób nie da się usunąć. Najbardziej spektakularnym przykładem jest tzw. paradoks rodziny (zbioru) wszystkich zbiorów.

W paradoksie tym, przyjmując założenie o istnieniu zbioru wszystkich zbiorów i wykorzystując pojęcie mocy zbioru, dochodzi się do sprzeczności. Uważam, że sprzeczność tego paradoksu nie jest widoczna, gdy jesteśmy całkowicie zamknięci w nowożytnym ideale naukowości.

W celu naświetlenia tego problemu przyjrzyjmy się idei dowodu twierdzenia Cantora, mówiącego o tym, że moc rodziny wszystkich podzbiorów danego zbioru  $X$  jest większa od mocy tego zbioru. Właśnie w oparciu o to twierdzenie możemy np. stwierdzić, że istnieje moc większa od nieskończonej mocy zbioru liczb naturalnych. Dowód twierdzenia Cantora jest prowadzony metodą „nie wprost”.

Niech  $P(X)$  oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ . Załóżmy, że moc zbioru  $X$  jest większa lub równa mocy zbioru  $P(X)$  co oznacza, że istnieje funkcja różnowartościowa  $F : X \rightarrow P(X)$  ze zbioru  $X$  na zbiór  $P(X)$ . Zauważmy, że zbiór  $Z = \{x : x \notin F(x)\}$  (który należy oczywiście do rodziny  $P(X)$ ) nie może być obrazem żadnego elementu z  $X$  poprzez funkcję  $F$ . Przypuśćmy, że istnieje punkt  $c$  taki, że  $Z = F(c)$ . Na podstawie definicji zbioru  $Z$  zachodzi następująca równoważność  $x \in Z \Leftrightarrow x \notin F(x)$ . Podstawiając do powyższej równoważności  $x = c$  otrzymujemy  $c \in Z \Leftrightarrow c \notin F(c)$ . Oznacza to, że  $Z \neq F(c)$ . Tym samym otrzymaliśmy sprzeczność.

Spójrzmy na konsekwencje tego twierdzenia.

Gdyby istniało uniwersum  $U$  zawierające wszystkie możliwe zbiory, to rodzina (zbiór)  $2^U$  wszystkich podzbiorów tego uniwersum też musiałaby być jego elementem, czyli moc zbioru  $2^U$  byłaby mniejsza (lub równa) od mocy

zbioru  $U$ . Twierdzenie Cantora mówi jednak, że moc zbioru  $2^U$  jest większa od mocy zbioru  $U$ . I otrzymujemy sprzeczność.

Które założenia tego rozumowania doprowadziły do sprzeczności? Najczęściej jako przyczynę sprzeczności podaje się założenie mówiące, iż rodzina wszystkich podzbiorów  $U$  jest zbiorem. Czy jednak określenie zbioru jest na tyle precyzyjne, że pozwala jednoznacznie stwierdzić, iż uniwersum (zawierające wszystkie zbiory) samo nie może być zbiorem (czy pojęcie zbioru jest na tyle „mocnym” pojęciem, że dzieli wszystkie obiekty na zbiory i nie-zbiory)? Może ważniejsze jest drugie odpowiedzialne za fałsz założenie, czyli stwierdzenie o istnieniu uniwersum  $U$  zawierającego wszystkie możliwe zbiory. Jak bowiem może istnieć coś co jest całkowicie nieokreślone?

Zauważmy, że ta sprzeczność jest całkiem oczywista i naturalna w nowym ideale nauki i uderza równocześnie w optymizm poznawczy Kartezjusza. Mówi ona, że nie możemy w pierwotnie nieokreślonym świecie (uniwersum) przeprowadzać procesów granicznych, nieskończonych (jak np. radykalne wątplenie, tworzenie rodziny wszystkich zbiorów), bo możemy dojść do sprzeczności. Obszar, w którym przeprowadza się tego typu procesy musi być uprzednio określony (najpierw etap finitystyczny a dopiero potem infinitystyczny). „Tajemniczość” powyżej analizowanej sprzeczności jest charakterystyczną cechą nowożytnej wizji nauki uniwersalnej. W nowym podejściu do matematyki ukazana sprzeczność mówi nam jedynie o nieistnieniu matematycznych narzędzi (w ramach posiadanych teorii), które pozwalałaby takie uniwersum „ogarnąć”. Jednak dalszy rozwój matematyki może takie narzędzia dostarczyć.

Uważam, że pełniejsze zrozumienie przebudowy gmachu wiedzy w XIX wieku i jej znaczenie można otrzymać poprzez analizę poglądów E. Husserla dotyczących ideału racjonalności i metody konstrukcji wiedzy pewnej. Husserl kwestionował naukowy ideał racjonalności i w swej krytyce odnosił się zarówno do ideału nowożytnego jak i do tego, który powstawał w czasie jego życia (nie dostrzegał znaczenia przemian, które dokonywały się w XIX wieku). Pragnął zbudować uniwersalną, bezzakołoniową filozofię, która zastąpiłaby naukę w odpowiedzi na podstawowe pytania dotyczące egzystencji i bytu.

Według tego filozofa „każde przeżycie intelektualne i każde przeżycie w ogóle, jeśli zostało spełnione, może zostać uczynione przedmiotem czystego oglądania i uchwytowania, i w oglądaniu tym będzie ono stanowiło daną absolutną”<sup>74</sup>. Te dane absolutne, to nic innego, jak absoluty poznawcze (obiekty graniczne) dające podstawę i możliwość ustanowienia teorii poznania. One właśnie mają za zadanie uczynić jawną istotę poznania polegającą w znacznej mierze na roszczeniu do prawomocnego obowiązywania, a w konsekwencji doprowadzić poznanie do bezpośredniej samoprezentacji i sprawić by stało się daną absolutną.

W przypadku Kartezjusza tą daną absolutną jest wyłącznie *cogito* – podmiot poznający. Rozjaśnienie istoty poznania ma nastąpić w wyniku kon-

strukcji (finitystycznej) nauki uniwersalnej, a nie w pierwotnie samoprezentującym się akcie – bez skonstruowania nauk, stanowiąca ich podstawę metoda radykalnego wątpienia i fakt *cogito*, nie mają wiarygodności i ugruntowania.

To sprzężenie zwrotne między naukami i teorią poznania (otrzymane w wyniku refleksji poznawczej dane absolutne są podstawą konstrukcji wszelkich nauk, natomiast same te nauki uprawomocniają tę refleksję) będące kluczowe dla Kartezjusza, Leibniza jak również dla Bolzano czy Riemanna, jest całkowicie nie do przyjęcia dla Husserla.

Według Husserla „nie wolno dedukować z czegoś, o czego istnieniu tylko się wie, ale czego się nie widzi. Oglądania nie da się udowodnić ani wydedukować. Oczywiście nonsensem jest dążenie do rozjaśnienia możliwości (i to już możliwości bezpośrednich) poprzez logiczne wywodzenie z wiedzy nieintuicyjnej. Mogę więc być zupełnie pewien, że istnieją transcendentne światy, mogę pozostawić pełną moc obowiązującą wszystkim naukom naturalnym, niczego jednakże nie wolno mi od nich zapożyczać”<sup>75</sup>.

Zgodnie z nowym ideałem nauki do wiedzy docieramy w wyniku przejść granicznych (procesów nieskończonych) następujących po etapie logiczno-dedukcyjnych konstrukcji, co jest niedopuszczalne dla Husserla, który twierdzi, że oglądania nie da się udowodnić ani wydedukować. Wszystko, co istotne, ma być dane w uprzedzającym rozumowanie oglądzie.

Jak zauważyliśmy w § 5 Gauss sprzeciwiał się w sposób zasadniczy wprowadzaniu do matematyki zbiorów nieskończonych. Według niego można oczywiście używać słowa nieskończoność w matematyce, ale tylko jako pewien wygodny sposób wyrażania się. Niedopuszczalne jest natomiast włączanie nieskończoności w struktury matematyki.

Takie myślenie jest zgodne z nowożytną wizją matematyki uniwersalnej, gdzie wszelkie operacje graniczne, procesy nieskończone miały przedmatematyczny charakter. Uległo to zasadniczej zmianie przynajmniej w przypadku takich matematyków jak Bolzano, Riemann, Dedekind czy Cantor. Wiazało się to zarazem z wprowadzeniem do matematyki nowych pojęć i powstaniem nowych dyscyplin. Pojęciem, które w badaniach tych matematyków okazało się szczególnie ważne, było pojęcie *continuum*. Powoli stawało się ono bytem matematycznym. Narodzenie się tego pojęcia nastąpiło na początku XX wieku w pracach Brouwera i Janiszewskiego w postaci *continuum* topologicznego. Już jednak wcześniej okazało się ono ściśle powiązane z pojęciami figur geometrycznych, wymiaru, *continuum* rzeczywistego, różności czy zbioru nieskończonego. Zrozumiano, że wprowadzenie tego pojęcia do matematyki jest niezbędne, jeśli chce się poprawnie zdefiniować np. pojęcie krzywej, płaszczyzny czy wymiaru.

Cantor w dwóch podstawowych i obszernych pracach z 1883: *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* oraz *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* podjął się obrony zbiorów nieskończonych. Przeciwwstawił się w tych pracach całej tradycji poczynając od Arystotelesa a koń-



cząc na Gaussie. W tej obronie chyba w najpełniejszy sposób widoczna jest nowa metoda wprowadzona do matematyki przez Cantora (i innych omawianych w tym rozdziale matematyków).

W paragrafie 4 *Grundlagen* polemizuje z argumentem Arystotelesa o „anihilacji liczby”, gdyby przyjąć istnienie liczby nieskończonej. Oto rozumowanie Arystotelesa:

Dla dowolnych dwóch liczb  $a$  i  $b$  mamy  $a + b > a$ ,  $a + b > b$ . Jednakże, gdyby  $b$  była nieskończona, to dla dowolnej liczby  $a$  prawdziwa byłaby następująca równość:  $a + \infty = \infty$ . To zdaje się przeczyć dobrze znanej własności, że dodanie dwóch liczb powinno dać wzrost wielkości – tu liczba  $a$  znika w liczbie  $\infty$ . Trzeba więc usunąć liczby nieskończone, bo ich wprowadzenie doprowadza do sprzeczności z ogólnie rozumianym zachowaniem się liczb.

Jednak Cantor argumentuje, że liczby  $\omega$ ,  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$  itd. różnią się od siebie jako liczby nieskończone (liczba  $\omega$  jest to liczba nieskończona odpowiadająca zbiorowi liczb naturalnych a liczba  $\omega + 1$  jest kolejną po niej liczbą nieskończoną) i dlatego argument anihilacji liczb skończonych 1, 2, ... przez liczbę nieskończoną  $\omega$  nie jest słuszny.<sup>76</sup> Cantor w *Grundlagen* pochyla się również nad poglądami matematyków i filozofów XVII wieku, które dotyczą pojęcia nieskończoności. Zarówno Locke, Kartezjusz, Spinoza, Hobbes, Berkeley jak i Leibniz krytykowali wprowadzanie nieskończoności aktualnej do matematyki. Uważali, że liczba może być tylko predykatem tego co skończone, bo nieskończoność (Absolut) przynależy jedynie Bogu. Inaczej Bóg byłby ograniczony definicją nieskończoności, co jest niemożliwe. Nieskończoność (aktualna), podobnie jak Bóg, jest niepojmowalna i nie można jej ująć przy pomocy struktur matematycznych. Cantor jednak z całą mocą podkreśla, że jego teoria nie zajmuje się nieskończonością absolutną, która przynależy jedynie Bogu i nie może być modyfikowana przez liczby skończone (jak liczby nieskończone Cantora).<sup>77</sup>

Według Cantora liczby nieskończone tworzą całkowicie nowy rodzaj liczb, których natura jest zależna od natury rzeczy i jest obiektem badań, a nie dowolnych spekulacji – trzeba wnikać w jego teorię, aby dyskutować o liczbach nieskończonych, które on rozważa.<sup>78</sup>

Wysiłki Bolzano związane z definicją zbioru i próbą wprowadzenia zbioru nieskończonego do matematyki były znane Cantorowi. W *Grundlagen* z podziwem odnosi się do wyników, które osiągnął Bolzano w pracy *Paradoxien des Unendlichen*. Traktował swoje rozważania jako kontynuację i uzupełnienie tego, czego zabrakło w pracach Bolzano. A według Cantora zabrakło tam przede wszystkim formalnej definicji nieskończoności aktualnej oraz pojęcia mocy zbioru, zbioru przeliczalnego i nieprzeliczalnego.

Przez większość ówczesnie żyjących matematyków, filozofów (i teologów) Cantor był krytykowany za swoją teorię zbiorów nieskończonych. Od pewnego momentu jego praca naukowa polegała na ciągłych polemikach, zwalczaniu

krytycznych uwag i opinii czy poszukiwaniu argumentów filozoficznych za „prawomocnością” wprowadzenia nieskończoności aktualnej do matematyki. Prace Bolzano, które były ogólnie dostępne (wydawane w języku niemieckim w Lipsku, Pradze czy Wiedniu), były niemal powszechnie przemilczane. Nie licząc Cantora, dopiero Herman Hankel pełniej zainteresował się pracami Bolzano i w artykule „Grenze”, który ukazał się w *Ersch-Gruber Encyklopädie* w 1871 r., wskazał po raz pierwszy na znaczenie jego prac (na temat szeregów nieskończonych). Również wyniki Riemanna dotyczące nowej idei nauki uniwersalnej nie spotkały się na początku ze zbytnim zainteresowaniem. Wolno przedzierały się do świadomości ówczesnego świata nauki nowe idee.

Bardzo spektakularnym przykładem jest ostra opozycja Kroneckera wobec teorii liczb rzeczywistych (tak Cantora jak i Dedekinda) oraz teorii liczb nieskończonych Cantora. Kronecker zgadzał się całkowicie, że należy zbudować solidne podstawy analizy matematycznej i całej matematyki. Uważał jednak, że wszystkie twierdzenia należy wyrazić w postaci twierdzeń o liczbach naturalnych, które są jedyną pewną podstawą matematyki. Nie widział potrzeby wprowadzania całkiem nowych pojęć – i uważał takie praktyki za szkodliwe.

Jednak np. dla Dedekinda największy i najowocniejszy postęp w matematyce może być osiągnięty poprzez wytworzenie i wprowadzenie nowych pojęć. Stare pojęcia bardzo słabo wyjaśniają nowe zjawiska i problemy, które pojawiły się w matematyce<sup>79</sup>

Przykładowo opierając się na starym intuicyjnie rozumianym pojęciu ciągłości (przy pomocy ciągłego ruchu punktu) nie jesteśmy w stanie wytłumaczyć ani zrozumieć nowo skonstruowanych funkcji ciągłych, które nie są w żadnym punkcie różniczkowalne. Dedekind nie obawiał się korzystać z różnych obszarów wiedzy w celu skonstruowania nowych potrzebnych pojęć. Jak wiedzieliśmy w paragrafie 6, wykorzystał analogię między własnościami liczb wymiernych i punktów na prostej geometrycznej, aby wprowadzić nowe liczby – liczby rzeczywiste. Było to niedopuszczalne dla Kroneckera, który uznawał tylko jedną podstawę dla nowych konstrukcji i definicji – liczby naturalne i ich własności. Według niego należy uwolnić analizę z ciągłego odwoływania się do geometrii<sup>80</sup>.

W próbach Riemanna budowy teorii funkcji (zespolonej) na innej podstawie niż arytmetyczna, widział Kronecker jedynie kurczowe trzymanie się intuicyjnego rozumienia funkcji jako krzywej na płaszczyźnie (Riemann korzystał z interpretacji geometrycznej liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny). Jak pisze Casaroti Kronecker uważał, że: *funkcję można zawsze traktować jako ciągłą w dowolnej części płaszczyzny, w której ją rozpatrujemy tzn., zawsze możemy tak funkcję zmodyfikować, aby omijała punkty krytyczne, tak jak gdyby takie punkty nie mogły całkiem przerwać jej ciągłości między poszczególnymi częściami płaszczyzny*<sup>81</sup>. Kronecker podaje przykład następującej funkcji:

$$\theta_0(q) = 1 + 2 \sum_{v=1} q^{v^2} = 1 + 2q + 2q^4 + \dots,$$

która jest zdefiniowana tylko dla  $|q| < 1$ . Aby rozpatrywać tę funkcję poza kołem o promieniu 1 należałoby uciec się do całkiem innych środków. W tym przypadku jednak otrzymana funkcja (jako funkcja zespolona) miałaby osobliwość w punkcie  $q = 1$  (czyli na okręgu). Tego typu patologiczne zachowanie się funkcji jest niedopuszczalne<sup>82</sup>.

Sama idea liczb niewymiernych była również dla Kroneckera nie do przyjęcia. Nawet ogólne pojęcie szeregu nieskończonego tzn. takiego, który przekracza ustaloną moc zmiennych, jest według niego dopuszczalne tylko w szczególnym przypadku, gdy na bazie praw arytmetyki tworzy się wyrażenia utworzone ze skończonych elementów. Dzięki temu mogą zachować charakter szeregu skończonego<sup>83</sup>.

W oparciu o rozważania i wyniki naukowe Bolzano, Riemana, Dedekinda i Cantora możemy pokusić się teraz o sformułowanie podstawowych elementów określających nową wizję *mathesis universalis*. Są one decydujące dla zrozumienia przemian, które dokonały się w matematyce (i nie tylko) na przełomie XIX i XX wieku.

1. Nadanie statusu obiektywnego istnienia obiektom „nieskończonym” (np. zbiór liczb naturalnych, *continuum* rzeczywiste).
2. Wprowadzenie pojęcia zbioru jako układu „niepodzielnych” elementów (jako elementy danego zbioru są one niepodzielne, chociaż w innym układzie mogą być podzielne np. człowiek jako element zbioru wszystkich ludzi jest niepodzielny, a jako zbiór komórek jest podzielny).
3. Odejście od intuicji jako wystarczającego narzędzia tworzenia obiektów leżących u podstaw matematyki (np. pojęcia różniczki, ciągłości, granicy, funkcji były w schemacie nowożytnym przed-matematycznymi, intuicyjnie rozumianymi obiektami).
4. Budowanie intuicji matematycznej w oparciu o wykonywane konstrukcje (mają one na początku paradoksalny i nie-intuicyjny charakter) i definicje.
5. Włączanie do matematyki obiektów, pojęć z innych dziedzin wiedzy z zachowaniem (przynajmniej w pewnym stopniu) znaczeń, odniesień i pierwotnych intuicji (np. pojęcie nieskończoności, ciągłości, *continuum*).
6. Generowanie nowych własności poprzez pewne nieskończone procesy i przejścia graniczne niedopuszczalne we wcześniejszych metodach matematyki. Dane konstrukcje mają teraz własności, których nie posiadają obiekty leżące u podstaw tych konstrukcji i równocześnie zachowują wiele kluczowych własności tych obiektów (np. zbiór Cantora ma własności, których nie posiada odcinek – nigdziegęstość – a równocześnie jest zwarty i w sobie gęsty) – jest to połączenie wydawałoby się sprzecznych własności.

Nowa wizja nauki uniwersalnej, która wyłania się z tych nowych metod badawczych, jest w dość dużym stopniu związana z metodą Archimedesu bu-

dowy matematyki. Przypomnijmy, że dla niego uniwersalność matematyki polega na tym, iż metody różnych nauk mogą zostać przez matematykę zaadoptowane i wykorzystane do odkrycia faktów matematycznych. Ta uniwersalność nie jest uniwersalnością matematycznej metody uniesprzeczniającej różne obszary rzeczywistości (jak jest u Platona), ani pitagorejską uniwersalnością matematyki nadającej światu status racjonalności i realności, lecz uniwersalnością struktury matematycznej, która jest w stanie wchłonąć całą różnorodność sposobów dochodzenia do prawdy (por. rozdz. 3, § 15).



**Przypisy:**

<sup>1</sup> B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*. Leipzig. Wyd. przez H. Webera i R. Dedekinda. B. G. Teubner 1876 s. 489-506.

<sup>2</sup> H. Freundethal, *Riemann, Georg Friedrich Bernhard* [w:] *Dictionary of Scientific Biography*, T. 11, New York 1975 s. 448.

<sup>3</sup> K. Weierstrass, *Werke*, s. 223-224.

<sup>4</sup> B. Riemann, dz. cyt., s. 489.

<sup>5</sup> Nach den Begriffen, durch welche wir die Natur auffassen, werden nicht bloss in jedem Augenblick die Wahrnehmungen ergänzt, sondern auch künftige Wahrnehmungen als nothwendig, oder, insofern das Begriffssystem dazu nicht vollständig genug ist, als wahr scheinlich vorher bestimmt (Tamże, s. 489).

<sup>6</sup> Tamże, s. 490.

<sup>7</sup> Tamże, s. 491.

<sup>8</sup> Das Trägheitsgesetz ist die Hypothese: Wenn ein materieller Punkt allein in der Welt vorhanden wäre und sich im Raum mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewege, so würde er diese Geschwindigkeit beständig behalten (Tamże, s. 493).

<sup>9</sup> Tamże, s. 81-135. Na s. 90 Riemann powołuje się na Dirichleta stosującego tę zasadę.

<sup>10</sup> Można założyć, że Riemann ma na myśli, iż nie koniecznie musi to być punkt materialny ważki, czyli posiadający masę spoczynkową.

<sup>11</sup> Hier mangelt es zur Stunde noch an einer bestimmten Erklärung der wichtigen Begriffes Linie, Fläche, Körper (B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung*, Praga 1810).

<sup>12</sup> Tamże, s. 31.

<sup>13</sup> B. Bolzano, *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*, 4 tomy, Leipzig 1837.

<sup>14</sup> Por. A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne, Prawda*, T. 1, Warszawa 1995.

<sup>15</sup> B. Bolzano, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Praga 1804, s. 46.

<sup>16</sup> B. Bolzano, *Wissenschaftslehre*, s. 330-331.

<sup>17</sup> Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im Allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. ...Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont (D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, „Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. Zu Göttingen. Math.-phys. Kl.” (1900), 253-254).

<sup>18</sup> Dokładną analizę wkładu Bolzano w powstanie teorii wymiaru przedstawił Dale M. Johnson w pracy *Prelude to dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano*, „Arch. History Exact Sci” 17 (1977) s. 261-295. W analizach tego paragrafu korzystam częściowo z analiz zawartych w tym artykule.

<sup>19</sup> Por. Dale M. Johnson, *Prelude to dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano*, „Arch. History Exact Sci.” 17 (1977) s. 279-280.

<sup>20</sup> A. G. Baumgarten, *Metaphysica*. „Hala Magdeburgica” 1779.

<sup>21</sup> A. G. Kästnar *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv. Der mathematische Anfangsgründe*, wyd. 6, Göttingen 1800 (wyd. pierwsze w roku 1758).

<sup>22</sup> Eine stetige Grösse (continuum) heisst, deren Theile alle so zusammenhängen, dass, so einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Grösse gehörte. Tamże, s. 176.

<sup>23</sup> Tamże, s. 177.

<sup>24</sup> B. Bolzano, *Die drey Probleme der Rectification, der Complation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt*, Leipzig 1817.

<sup>25</sup> Przez otoczenie danego punktu w zbiorze  $Z$  Bolzano rozumie zbiór przecięcia sfery o środku w tym punkcie ze zbiorem  $Z$ .

<sup>26</sup> B. Bolzano, *Die drey Probleme der Rectification*, s. 20-21.

<sup>27</sup> Dale M. Johnson, *Prelude to dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano*, „Arch. History Exact Sci.” 17 (1977) s. 281.

<sup>28</sup> Tamże, s. 282.

<sup>29</sup> Ośrodkowa metryczna przestrzeń ma wymiar 0 w punkcie  $p$ , jeśli  $p$  ma dowolnie małe otoczenie o pustych brzegach. Indukcyjnie można zdefiniować, że przestrzeń ma wymiar  $n$  w punkcie  $p$ , jeśli punkt  $p$  posiada dowolnie małe otoczenia o brzegu  $(n-1)$ -wymiarowym (Hurewicz, Wallman, *Dimension theory*, 1948, s. 10 i dalsze).

<sup>30</sup> B. Bolzano, *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*, Leipzig 1837.

<sup>31</sup> Tamże, § 82.

<sup>32</sup> Tamże, § 84 i 85.

<sup>33</sup> Tamże, § 315.7

<sup>34</sup> B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851, § 41.

<sup>35</sup> Zauważmy, że również zbiór liczb wymiernych jest continuum w sensie Bolzano.

<sup>36</sup> Bei der Untersuchung der Functionen, welche aus der Intergration vollständiger Differentialien entstehen, sind einige der analysis situs angehörige Sätze fast unentbehrlich. (B. Riemann: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*.)

<sup>37</sup> Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausge dehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren (B. Riemann, s. 272).

<sup>38</sup> C. F. Gauss, *Werke XII*, Göttingen 1929 s. 8.

<sup>39</sup> C. F. Gauss, *Werke II*, Göttingen 1863 s. 178.

<sup>40</sup> R. Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1978 s. 85

<sup>41</sup> Die Untersuchungen, welche sich in diesem Falle über sie anstellen lassen, bilden einen allgemeinen von Massbestimmungen unabhängigen Theil der Grössenlehre, wo die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und nicht als durch eine Einheit ausdrückbar, sondern als Gebite in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden (B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*. Leipzig 1892 s. 274).

<sup>42</sup> Wenn man, anstatt den Begriff als bestimmbar, seinen Gegenstand als veränderlich betrachtet, so kann diese Construction bezeichnet werden als eine Zusammensetzung einer Veränderlichkeit von  $n+1$  Dimensionen und aus einer Veränderlichkeit von Einer Dimension. Tamże s. 275.

<sup>43</sup> Hermann Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton 1949 s. 30-54; H. Weyl: *The Continuum: a Critical Examination of the Foundation of Analysis*. Tłum. St. Pollard i Th. Bole, 51-117, 1987.

<sup>44</sup> R. Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Leipzig 1872.

<sup>45</sup> Zauważmy, że również przy wprowadzaniu liczb całkowitych pojawia się problem. Ciąg liczb całkowitych nie posiada wyróżnionego elementu (mimo, iż 1 jest elementem neutralnym mnożenia, a 0 dodawania) tak jak to miało miejsce w przypadku liczb naturalnych. Struktura ciągu liczb całkowitych odrzuca tym samym ideę warunku początkowego – ideę punktu startowego zdarzeń. Dopiero połączenie konstrukcji ułamków z konstrukcją liczb ujemnych (czyli powstanie liczb wymiernych) prowadzi do wyróżnienia jednego elementu – jest nim 0, jedyna liczba, z którą wiążą się ograniczenia wykonywania podstawowych działań arytmetycznych, dokładniej 0 jest tą liczbą przez którą nie można dzielić. To niespodziewane wyróżnienie liczby 0 ratuje ideę warunku początkowego.

<sup>46</sup> R. Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Leipzig 1872 s. 7-8.

<sup>47</sup> W zagadnieniu tym chodziło o skonstruowaniu (przy pomocy cyrkla i linijki) krawędzi sześcianu mającego dwa razy większą objętość niż sześcián dany. Dzięki aksjomatowi Dedekinda możemy stwierdzić, że taki sześcián istnieje, ale nic nie wiemy o możliwościach konstrukcji. Niemożność takiej konstrukcji wynika z teorii Galoisa.

<sup>48</sup> Myślę, że proces poddawania się umysłu pod dyktando *continuum* liczbowego (wymiernego lub rzeczywistego) i odejścia od myślenia kategoriami struktury liczb naturalnych jest procesem powolnym, jednak poprzez zastosowanie tego pojęcia w naukach fizycznych widzimy konieczność zmiany mentalności. Chodzi głównie o trudności związane z zasadą przyczynowości w mechanice kwantowej.

<sup>49</sup> A. L. Cauchy, „Mémoires de l'Académie des Sciences” 6, 1827 Paris s. 603-612.

<sup>50</sup> P. G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 4, s. 168-169.

<sup>51</sup> B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, „Habilitationsschrift” Göttingen 1867, s. 87-131.

<sup>52</sup> E. Heine, *Ueber trigonometrische Reihen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 71 s. 172-188.

<sup>53</sup> G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, „Mathematische Annalen” 5, 1872 s. 123-132.

<sup>54</sup> Tamże, s. 123-124.

<sup>55</sup> Tamże, s. 124.

<sup>56</sup> Tamże, s. 128.

<sup>57</sup> Tamże, s. 128.

<sup>58</sup> Tamże, s. 129.

<sup>59</sup> Można ogólnie zdefiniować zwartość następująco: Przestrzeń jest zwarta, jeśli każdy nieskończony podzbiór tej przestrzeni posiada punkt skupienia. To uogólnienie miało miejsce w 1906 r. w pracy Frecheta, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rend. Palermo, t. XXII, s. 1-74).

<sup>60</sup> G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, „Mathematischen Annalen” 21, 1883, Przypis 11 s. 590.

<sup>61</sup> Tamże, s. 575-6.

<sup>62</sup> F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914.

<sup>63</sup> G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, „n. J. Für die r. und a. Math.” 77, 1874 s. 258-262

<sup>64</sup> G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, część I, „Mathematischen Annalen” 15, 1879 s. 1-7.

<sup>65</sup> *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Wyd. E. Noether & J. Cavaillès. Paris 1937 s. 20.

<sup>66</sup> Tamże, s. 25.

<sup>67</sup> Tamże, s. 30.

<sup>68</sup> G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, „Mathematische Annalen” 17, 1881, 355-358.

<sup>69</sup> K. F. Gauss, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Tom II, Altona 1860 s. 269.

<sup>70</sup> Jest to odpowiedź na paradoks  $A_3$  Zenona z Elei, o którym pisaliśmy w rozdziale II, § 5. Dokładniej ta kwestia będzie przedstawiona w § 6 rozdziału 6 oraz w §1 rozdziału 7.

<sup>71</sup> Zbiór  $(M, \leq)$  jest dobrze uporządkowany, jeśli spełnia następujące własności:

a)  $a \leq a$  (zwrotność)

b)  $a \leq b$  i  $b \leq a$ , to  $a = b$  (antysymetria)

c)  $a \leq b$  i  $b \leq c$ , to  $a \leq c$  (przechodność)

d)  $a \leq b$  lub  $b \leq a$ , dla dowolnych elementów  $a, b \in M$  (spójność)

e) każdy podzbiór niepusty zbioru  $M$  ma element najmniejszy.

Jeśli zbiór  $M$  spełnia własności a – c, to nazywa się *częściowo uporządkowany*, a jeśli spełnia dodatkowo własność d, to nosi nazwę zbioru *liniowo uporządkowanego*.

<sup>72</sup> Jeśli każdemu elementowi  $k$  zbioru dobrze uporządkowanego  $M$  odpowiada pewne twierdzenie  $Z(k)$ , przy czym z prawdziwości twierdzenia  $Z(l)$ , dla każdego  $l < k$ , wynika prawdziwość twierdzenia  $Z(k)$ , to prawdziwe jest twierdzenie  $Z(k)$ , dla wszystkich  $k \in M$ .

<sup>73</sup> Por. np. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977 s. 194-195

<sup>74</sup> E. Hussler, *Die Idee der Phänomenologie*, Tłum. J. Sidorek, Warszawa 1990 s. 41

<sup>75</sup> Tamże, s. 50-51

<sup>76</sup> G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig 1883 s. 173-175.

<sup>77</sup> Tamże, s. 175-183

<sup>78</sup> G. Cantor, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik” 88, 1886, 224-223.

<sup>79</sup> R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg. [w:] *Dedekind* (1930-1932) 3 s. 338.

<sup>80</sup> U. Bottazini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Trans. W. Van Egmond, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo 1986 s. 262.

<sup>81</sup> Tamże, s. 263.

<sup>82</sup> Tamże, s. 264



- <sup>83</sup> L. Kronecker, *Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ 99, 1866 s. 329-371.

## Rozdział VI

### Powstanie *continuum* topologicznego

#### 1. Filozofia matematyki Zygmunta Janiszewskiego

Janiszewski, wraz z Sierpińskim i Mazurkiewiczem, stanowił główny filar Polskiej Szkoły Matematycznej. Już wtedy, gdy młodzi matematycy Janiszewski i Mazurkiewicz zostają w 1915 roku profesorami nowo powstałego Uniwersytetu Warszawskiego, można mówić o początkach tej szkoły. Natomiast kilka lat później, gdy Polska odzyskuje niepodległość, istnieje już w Warszawie silna grupa matematyków skupiona wokół zagadnień teoriomnogościowych i topologicznych. W 1918 roku przyjeżdża do Warszawy Władysław Sierpiński (nauczyciel akademicki Mazurkiewicza) i rozwój środowiska matematycznego zostaje jeszcze bardziej przyspieszony. W latach 20-tych istnieje już w Warszawie jedno z najsilniejszych centrów matematyki na świecie (podobnie intensywny rozwój matematyki można zaobserwować również we Lwowie).

Szczególnie ważną postacią, mającą ogromny wkład w rozwój topologii, był Zygmunt Janiszewski. Po ukończeniu w 1907 roku szkoły średniej we Lwowie, studiuje w Zurychu, Monachium, Getyndze i Paryżu mając za nauczycieli takich profesorów jak: Hilbert, Minkowski, Zermelo, Hadamard, Lebesgue, Picard, Poincaré. W Paryżu, pod kierunkiem Lebesgue'a, robi w 1911 roku doktorat na podstawie pracy „*Sur la continus irreductibles entre deux points*”. Niosła ona ze sobą znaczący wkład w rozwój topologii.

Działalność naukowa Janiszewskiego przypada na lata 1909-1920 (umiera w czasie wojny bolszewickiej w wieku zaledwie 31 lat). Mimo tak krótkiego okresu pracy był twórcą wielu istotnych idei. Oprócz zagadnień ściśle matematycznych zajmował się również problemami związanymi z filozofią oraz dydaktyką matematyki. W cyklu prac, które ukazały się w „Poradniku dla samouków” oraz w „Przeglądzie Filozoficznym”, podjął się podsumowania rozwoju matematyki w latach przełomu wieków ze zwróceniem szczególnej uwagi na kluczowe trendy rozwojowe (m.in. w celu wykorzystania tych uwag przez polskie środowisko matematyczne do stworzenia znaczącego i prężnego ośrodka rozwoju matematyki). Chociaż tego *explicite* Janiszewski nie pisze, jego twórczość jest nawiązaniem do idei *mathesis universalis* wielkich matematyków XIX wieku, o których pisałem w poprzednim rozdziale. Przyjrzyjmy się na

początku dokładniej jego filozoficznym pracom, aby zobaczyć jak rozumie tę ideę.

Zaraz na początku pracy *Zagadnienia filozoficzne w matematyce* znajduje się wypowiedź, którą można odczytać jako przeciwstawienie się idei nauki uniwersalnej w wydaniu Kartezjusza czy Leibniza.

*Tak więc nie do matematyki należeć będzie zagadnienie, czy istnieją w przyrodzie aktualnie nieskończenie małe odcinki, oraz zagadnienie (obejmujące poprzednie), czym jest i jakie ma własności przestrzeń fizyczna. Zagadnień tego rodzaju – jako dotyczących przedmiotów niematematycznych – nie zaliczamy do filozofii matematyki<sup>1</sup>.*

Nie można więc, według Janiszewskiego, wchodzić z metodą matematyczną na obszar, który należy do kompetencji innych dziedzin wiedzy (filozofii fizyki). Czy nie jest to pójście drogą sztywnego podziału kompetencji nauk, który zaproponował Arystoteles? Z punktu widzenia starożytnej (czy nawet nowożytnej) wizji nauki uniwersalnej tak to wygląda. Jednak nowa idea nauki uniwersalnej, która powstała w XIX wieku, w czym innym widziała uniwersalność matematyki – nie we wchodzeniu z metodami czy strukturami matematyki na różne obszary wiedzy, lecz w wykorzystywaniu przez matematykę wyników innych dziedzin poznania do tworzenia nowych struktur matematycznych. Jak zobaczymy dalej, tą samą drogą podąża Janiszewski.

W dalszej części formułuje zasadnicze zagadnienie dotyczące prawd matematycznych, które, według niego, ma polegać na rozstrzygnięciu czy dowody matematyczne są w zupełności dedukcyjne i *a priori*, czy też, jak w innych naukach, opierają się na indukcji i doświadczeniu<sup>2</sup>.

Na przykład, dla Poincaré'go, zasada indukcji zupełnej jest sądem syntetycznym *a priori*, natomiast formaliści uważają, że można ją udowodnić za pomocą prawd logicznych lub wyprowadzić jako część składową własności ciągu liczb naturalnych. Janiszewski uważa, że spór o charakter indukcji zupełnej jest w gruncie rzeczy sporem o istotę liczb naturalnych. Nie jesteśmy w stanie stwierdzić jaki jest charakter prawd matematycznych bez uprzedniego ustalenia poglądów na charakter przedmiotów, których te prawdy dotyczą. W tym miejscu Janiszewski uzależnia metody dowodzenia od założeń ontologicznych – to tak jakby powrócił do punktu wyjścia, nie uwzględniając przewrotu Kartezjusza i rewolucji Kanta, w kwestii zależności praw rozumowań i metod poznawczych od ontologii. Zauważmy jednak, że w ramach nowych idei stworzonych przez Bolzano-Riemanna-Dedekinda-Cantora nie możemy tworzyć struktur matematyki opierając się na gruncie, uprzedniej wobec matematycznych badań, metodologii czy intuicji (jak było u Kartezjusza czy Leibniza).

Kolejnym przykładem jest spór między idealistami i realistami o charakter zbioru. Idealiści uważają zbiór za określony, jeśli dana jest cecha charakterystyczna tworzących go elementów tj. taka, którą posiadają wszystkie elementy tego zbioru i tylko one. Natomiast realiści żądają więcej, aby była podana metoda pozwalająca określić dowolny element określanego zbioru. Tym

samym odrzucają zbiory nieskończone oraz pewnik Zermelo o możliwości dobrego uporządkowania dowolnego zbioru.

Musimy podkreślić, że spór pomiędzy idealistami a realistami, o którym pisze Janiszewski, to zasadniczo spór między nową ideą matematyki a starym (nowożytnym) schematem. Można łatwo wywnioskować, po której stronie tej polemiki znajduje się Janiszewski, szczególnie gdy wskazuje nowe fakty odkryte w jego czasach przez matematykę i uważane przez większość za paradoksalne. Są to, między innymi, prawdy następujące:

1. część może być równa całości;
2. istnieje krzywa ciągła nie posiadająca stycznej w żadnym punkcie;
3. istnieje zbiór w sobie gęsty i zarazem nigdziegęsty.

Według Janiszewskiego te fakty nie są paradoksalne – przekraczają tylko wyobraźnię oraz potoczną intuicję, jednak ich opis jest logicznie i matematycznie poprawny. Dla nowożytnej (kartezjańsko-leibnizjańskiej) idei matematyki są to paradoksy, gdyż pokazują oderwanie się matematyki od jej realnych i intuicyjnych korzeni, co jest niedopuszczalne. O antynomii możemy mówić tylko wtedy, jak sądzi Janiszewski, gdy mamy do czynienia z formalnie udowodnioną sprzecznością – dowód ma być tak ścisły jak innych twierdzeń matematyki. Antynomie nie mogą się pojawiać na obrzeżach matematyki, które częściowo są a częściowo nie są matematyczne (gdyż takowych nie ma), lecz muszą dotyczyć wyłącznie jej najwłaściwszych struktur. Okazuje się wówczas, że matematyka początku XX wieku wcale nie jest taka paradoksalna.

Kluczowy dla matematyki jest problem wewnętrznej niesprzeczności aksjomatów. Są trzy drogi podejścia do tego problemu:

1. Można traktować aksjomaty jako intuicyjnie oczywiste.
2. Należy znaleźć przedmioty, które realizują układ tych aksjomatów (budowa modelu).
3. Należy wykazać, że żadne dwa wnioski wyprowadzone z układu aksjomatów nie mogą być ze sobą sprzeczne (metoda Hilberta).

Również w przypadku tego problemu widać różnicę między kartezjańsko-leibnizjańską ideą nauki uniwersalnej a ideą Bolzano-Riemanna-Dedekinda-Cantora. Szczególnie drugi sposób rozwiązania problemu niesprzeczności aksjomatów odpowiada nowej wizji nauki uniwersalnej – w oparciu o układ aksjomatów konstruujemy pewien matematyczny model; sam fakt jego istnienia jest wystarczający do tego, aby uwiarygodnić przyjęte aksjomaty i nadać im określoną matematyczną treść (bez tego modelu te aksjomaty mogą nie mieć sensu).

Pojęcie przestrzeni jest centralnym pojęciem rozpatrywanym w matematyce. Pochylając się nad istniejącymi rezultatami związanymi z pojęciem przestrzeni możemy odpowiedzieć (teraz lub w przyszłości) na następujące pytania:

1. Jaka jest geneza przestrzeni – czy posiadamy ją a priori, czy z doświadczenia?;



2. Czy przestrzeń ma swój własny byt (Kartezjusz), czy jest własnością ciał (Leibniz), czy formą subiektywną naszego oglądu (Kant)?;

3. Jaką geometrię posiada przestrzeń? To pytanie możemy rozpatrywać w trzech aspektach:

- a) geometrii ciał, która bada przestrzenne własności ciał,
- b) geometrii przestrzeni idealnej, bez ciał,
- c) geometrii matematycznej, która jest badaniem różnorodności przedmiotów idealnych powiązanych aksjomatami i abstrahuje od przestrzenności postrzegając tylko związki między elementami.

Idealizacja, która ma miejsce w matematyce, jest szczególnego rodzaju. Janiszewski podaje prosty przykład. Zakłada się w geometrii, że zmiana położenia ciała nie zmienia jego rozmiarów. Mówiąc o niezmienniczości rozmiarów zakładamy, że istnieje jakaś „długość” sama w sobie, że posiadanie przez ciało pewnej długości znaczy coś więcej niż przystawanie tego ciała do innego ciała. To powyższe założenie nie może być w żaden sposób sprawdzone. Nie ma ono w ogóle sensu, dopóki nie wprowadzi się pojęcia długości jako pojęcia pierwotnego a wraz z nim i przestrzeni idealnej.

Filozofia matematyki ma według Janiszewskiego swoje specyficzne problemy badawcze, które nie należą do samej matematyki. Jest to przede wszystkim kwestia rozstrzygnięcia czy przestrzeń idealna to tylko hipoteza (i fikcja), czy też ma ona byt realny. Janiszewski uważa, że „toczący się spór filozoficzny nie dotyczy ani świata doświadczalnego, ani różnorodności matematycznych, lecz tego czy posiadamy ideę prostej przestrzennej i czy te własności są własnościami prostej euklidesowej oraz czy ta idea jest niezbędną do ujmowania zjawisk świata zewnętrznego”<sup>3</sup>. Aby jednak podjąć kompetentnie takie badania trzeba, jak sądzi Janiszewski, znać dobrze teorię mnogości, arytmetykę, podstawy geometrii, podstawowe pojęcia analizy nieskończonościowej, logistykę (czyli logikę matematyczną) oraz mieć ogólne wykształcenie filozoficzne. Dopiero w oparciu o tę wiedzę można podjąć się opracowania metod badawczych w ramach filozofii matematyki i rozpocząć określone dla tej dziedziny nauki badania.

Tak wyraźne wydzielenie pewnych obszarów badawczych i jednoznaczne przypisanie ich do nowej dziedziny wiedzy (nowej, gdyż trzeba ją zbudować w oparciu o nowo powstałe teorie i rezultaty matematyczne) – filozofii matematyki – ma niebagatelne znaczenie. Nauka, według Janiszewskiego, ma rzeczywiście uniwersalny charakter. Powinna podjąć wszelkie wyzwania, jednak nie koniecznie istniejącymi metodami. Przy opracowywaniu nowych metod korzystać jednak musi z wyników innych nauk, bowiem podział kompetencji nie może wiązać się z zamykaniem się na pozostałe dziedziny wiedzy. Janiszewski w bardzo ostrzych słowach podsumowuje badania, które miały miejsce do jego czasów. „Z literatury (bardzo obfitej) broniącej istnienia przestrzeni idealnej absolutnej i jej euklidesowości, nie znamy nic, mającego wartość naukową. Są to tylko mniemania, odczucia niedostatecznie zanalizowane, albo

błędne dedukcje, oraz dyskusje z matematykami polegające na nieporozumieniach i nieznajomości matematyki”<sup>4</sup>.

Te poglądy Janiszewskiego są więc kontynuacją idei nauki uniwersalnej, opracowanej przez Bolzano i Riemanna, w przypadku filozofii matematyki. Powstały nowe działy matematyki oraz nowe istotne wyniki i są one koniecznością, i szansą dla filozofii. Cóż dla Janiszewskiego jest szczególnie istotne w tych osiągnięciach ostatnich lat:

1. Krytyczna rewizja matematyki, samych jej podstaw i budowanie na podstawach wyłącznie logicznych;
2. Powstanie teorii równań całkowych (Volterra, Fredholm), funkcji automorficznych (Klein, Poincaré), grup przekształceń Liego oraz teorii mnogości Cantora;
3. Wpływ pojęcia zbioru na inne działy matematyki – wygenerowanie nowych płodnych pytań i przyspieszenie rozwoju;
4. Wpływ pojęcia grupy na wiele działów nauki;
5. Rozwój metody aksjomatycznej – dostrzeżenie, iż aksjomaty są warunkiem koniecznym i wystarczającym do ugruntowania teorii. Dzięki metodzie aksjomatycznej możemy:
  - przenosić całe teorie z jednej dziedziny do drugiej (ma to miejsce np. pomiędzy topologią, teorią mnogości i teorią grup), gdyż dzięki posiadaniu tych samych aksjomatów nie ma potrzeby powtórznego dowodzenia,
  - głębiej wniknąć w istotę teorii wyszukując (w aksjomatach) te własności, na których ta teoria się opiera,
  - wprowadzać nowe pojęcia – szuka się nowych pojęć czyniących zadość pewnym warunkom (np. całka Lebesgue’a),
  - abstrahować od wszystkich własności indywidualnych tworzących daną teorię i badać tylko formę logiczną.
6. Rozwój teorii funkcji rzeczywistej – chodzi o badanie funkcji „prawie dowolnych” analogicznie jak w topologii bada się figury „prawie dowolne”. Tak ogólne badania są możliwe dzięki teorii mnogości i nowym subtelnym pojęciom wypracowanym przez topologię, czy teorię całki<sup>5</sup>.

Patrząc na aktualny rozwój matematyki dostrzega Janiszewski dwa podstawowe kierunki, w których powinna pójść matematyka, aby jej rozwój był rzeczywiście płodny:

1. Bliższe zetknięcie się logiki i matematyki m.in. w celu wyjaśnienia paradoksów teorii mnogości;
2. Stosowanie w sposób szeroki matematyki w innych naukach. Jest to możliwe i konieczne, gdyż ogólność prawd odkrywanych przez matematykę ma wartość sama w sobie.

Jako przykład wzajemnego przenikania ogólnych prawd pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy podaje Janiszewski rozwój logiki matematycznej<sup>6</sup>. Logika wyróżnia dwa zasadnicze elementy myśli: pojęcie i sąd. Przez cały czas istniały dwa zasadniczo odrębne teorie logiczne: jedna zajmująca się stosunkami zacho-

dzącymi między pojęciami a druga między sędami. Okazało się jednak, a stało się to między innymi dzięki powstaniu teorii zbiorów, że tym różnym teoriom odpowiada ten sam rachunek logiczny – jest to rachunek logiki matematycznej. Logika matematyczna bada bardziej złożone formy od tych, które badała logika tradycyjna ( $A$  jest  $B$ ), gdyż operuje operacjami mnożenia i dodawania logicznego oraz przeczenia. W tej nowej logice istnieje całkowity dualizm praw ukazujących związek między pojęciami i praw, które mówią o wynikaniu pomiędzy sędami oraz między funkcjami logicznymi „i” oraz „lub” (algebra Boole’a).

I stąd rodzi się zadanie dla każdej nauki. Chodzi o wykazanie związku między jej prawdami i o znalezienie zupełnego układu niezależnych od siebie praw (w logice – praw logicznych). Każda prawdziwa nauka powinna wynajdować związki między faktami swojej dziedziny badań – taki jest sens twierdzeń i ich dowodów.

## 2. Wprowadzenie topologicznych pojęć spójności i zwartości

Rozważania i wyniki osiągnięte przez Bolzano, Cantora, Weierstrassa, Dedekinda, Riemanna i innych pozwoliły na sformułowanie dwóch zasadniczych dla powstania topologii geometrycznej pojęć: zwartości i spójności. Stało się to na przełomie wieku XIX i XX w pracach Jordana (pojęcie spójności, 1893) i Frécheta (pojęcie zwartości, 1906). Wprowadzenie ogólnego pojęcia zwartości stało się możliwe dzięki wynikom Borela i Lebesgue’a (twierdzenie Borela-Lebesgue’a) które mówią, iż z każdego pokrycie otwartego odcinka domkniętego można wybrać podpokrycie skończone. Uogólnienia tego Fréchet dokonał dzięki dostrzeżeniu ścisłego związku między powyższym twierdzeniem a twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa.

Pojęcie spójności jest kluczowym pojęciem we współczesnej matematyce. Wcześniej (tzn. aż do rozpoczęcia przebudowy podstaw matematyki w XIX wieku) miało ono intuicyjny charakter i nie miało wartości samej w sobie – było używane w połączeniu z innymi pojęciami (np. spójna figura geometryczna). Samo podanie definicji nie jest wystarczające do tego, aby zdefiniowane pojęcie uzyskało ten szczególny status pojęcia rozumianego w dużej mierze niezależnie i abstrakcyjnie i nadającego sens innym pojęciom, i strukturom matematycznym. Pierwsze zdecydowane kroki w tym kierunku podjął Bolzano (co analizowaliśmy w § 4 rozdziału 5), jednak nie odróżniał on pojęcia spójności od pojęcia *continuum*. To rozróżnienie ma miejsce u Cantora w pracy z 1873 roku, jednak spójność pełni tam jedynie rolę pomocniczą w definicji *continuum* – nie ma wartości sama w sobie. Ponadto samo *continuum* jest rozumiane jako część przestrzeni euklidesowej, nie nabiera jeszcze ogólnego i w pełni abstrakcyjnego znaczenia.

10 lat po ukazaniu się pracy Cantora podejmuje problem spójności Jordan<sup>7</sup>, jednak nie odwołuje się nigdzie do tej pracy. Wprowadza pojęcie składo-

wej (*un seul tenant*), które służy mu do zdefiniowania spójności tzn. zbiór spójny jest to zbiór mający tylko jedną składową: *Domknięty i ograniczony zbiór punktów ma pojedynczą składową, jeśli nie można go rozłożyć na kilka domkniętych rozdzielonych zbiorów (zbiory domknięte są rozdzielone, jeśli odległość między nimi jest większa od zera)*. Zauważa, że powyższa własność jest równoważna następującej własności: *Dla dowolnego  $\varepsilon$  można wskazać pomiędzy dowolnymi punktami  $p$  i  $p'$  danego zbioru łańcuch pośrednich punktów tego zbioru taki, że odległość między kolejnymi punktami jest mniejsza niż  $\varepsilon$* . Ta własność pokrywa się z definicją spójności Cantora.

Wyszczególnienie pojęcia składowej miało ważne konsekwencje dla dalszego rozwoju topologii (i samego pojęcia spójności), jednak dopiero Schoenflies w pracy z 1904 r.<sup>8</sup> zwrócił uwagę na fundamentalne znaczenie pojęcia spójności dla całej *Analysis Situs*. Pragnie dać on czysto teoriomnogościową definicję spójności, jednak ogranicza to pojęcie tylko do zbiorów doskonałych sądząc, że dla zbiorów niedoskonałych pojęcie spójności nie jest interesujące: *zbiór doskonały jest nazywany spójnym, jeśli nie można go rozłożyć na podzbiory (z których przynajmniej dwa są niepuste) doskonale*<sup>9</sup>. Ciągłe więc spójność nie posiada w pełni ogólnego i abstrakcyjnego znaczenia.

Ważnym etapem w rozwoju pojęcia spójności jest praca W. H. i G. C. Young. Definiują oni spójność uwalniając się od wcześniejszych ograniczeń: *Zbiór o tej własności, że każdy jego punkt jak również punkt skupienia tego zbioru, jest punktem wewnętrznym, nazywamy zbiorem spójnym, pod warunkiem, że zawiera więcej niż jeden punkt*<sup>10</sup>. Dzięki tak sformułowanej definicji punkty domknięcia zbioru nie zmieniają jego spójności. Ponadto, zbiór spójny nie może być podzielony na domknięte podzbiory nie posiadające punktów wspólnych i tę własność można traktować jako warunek wystarczający dla zapewnienia spójności zbioru.

Jednak zasadniczy postęp miał miejsce równolegle w pracach Lennesa i Riesza. Lennes podał swoją definicję spójności na spotkaniu American Mathematical Society w grudniu 1905 r., natomiast Riesz przedstawił swoją definicję na forum Hungarian Academy of Science 22 stycznia 1906 r. Przyjrzyjmy się tym definicjom.

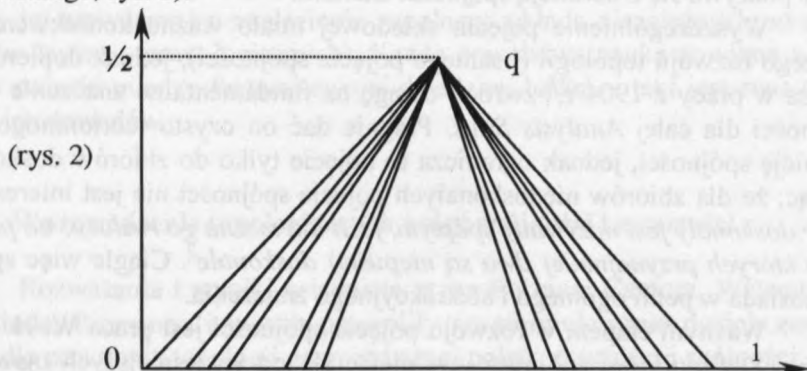
1. Definicja Lennesa: *Zbiór punktów jest spójny, jeśli w każdej parze dopełniających zbiorów przynajmniej jeden zawiera dowolny punkt skupienia punktów drugiego zbioru*.<sup>11</sup>

2. Definicja Riesza: *Zbiór nazywa się spójny, jeśli nie może być rozłożony na dwa podzbiory, których domknięcia są rozłączne; nazywa się absolutnie spójny, jeśli dla każdego jego rozkładu na dwa niepuste podzbiory, istnieje przynajmniej jeden element, który należy do jednego z podzbiorów i jest punktem skupienia drugiego*.<sup>12</sup>



Zbiór spójny Lennesa i absolutnie spójny Rieszsa oznaczają to samo. W przypadku ich definicji docieramy do współczesnego rozumienia pojęcia spójności.

W tym miejscu mogłoby się wydawać, że spójność jest wystarczająca do uchwycenia istoty *continuum*. Przykład ukazujący jakie są konsekwencje braku zwartości i jak daleko mogą odbiegać własności zbioru spójnego od tego co intuicyjnie rozumiemy jako spoistość, pokazuje zbiór skonstruowany przez Knastera i Kuratowskiego w roku 1921 (zwany miotłką Knastera-Kuratowskiego, rys. 2).



Utwórzmy na odcinku  $[0,1]$  na osi  $x$ -ów zbiór Cantora  $C$ . Połączmy każdy punkt  $c$  zbioru  $C$  z punktem  $q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  odcinkiem  $L_c$ . Suma wszyst-

kich odcinków  $L_c$  nazywa się miotłką Cantora. Jest to oczywiście zbiór spójny (i zwarty). Oznaczmy przez  $P$  zbiór wszystkich punktów zbioru Cantora, które są końcami wyrzucanych (podczas konstrukcji zbioru  $C$ ) odcinków otwartych. Zmodyfikujmy miotłkę Cantora w następujący sposób: z odcinka  $L_c$  wyrzucamy wszystkie te punkty  $(x, y)$ , których druga współrzędna jest niewymierna, jeśli  $c \in P$  oraz, gdy  $c \notin P$ , te punkty  $(x, y)$ , których druga współrzędna jest wymierna. Powstały w ten sposób zbiór  $K$  nosi nazwę miotłki Knastera-Kuratowskiego. Punkt  $q$  należy do zbioru  $K$ . Okazuje się, że ten zbiór jest spójny. Jest on nawet dwuspójny tzn. nie można go rozłożyć na dwa rozłączne zbiory spójne niejednopunktowe (gdyż każdy podzbiór spójny zbioru  $K$  musi zawierać punkt  $q$ ). Wystarczy jednak wyrzucić ze zbioru  $K$  punkt  $q$  a pozostała część staje się zbiorem całkowicie niespójnym (nie posiada żadnych wielopunktowych spójnych podzbiorów). Punkt  $q$  nazywa się punktem eksplodującym.

Potrzebna jest więc jeszcze kolejna własność, aby dało się uchwycić podstawowe i istotne własności *continuum*. Miotłce Knastera-Kuratowskiego brakuje tzw. ciągłości (o której pisaliśmy przy podawaniu intuicyjnej charakterystyki *continuum*), czyli możliwości nieskończonej podzielności tak, aby kolejne, coraz mniejsze części miały również zachowaną strukturę tego zbioru (nie

można wziąć w każdym punkcie dowolnie małego podzbioru spójnego, gdyż każdy podzbiór spójny musi zawierać punkt  $q$ ). Tą kolejną własnością gwarantującą zachowanie ciągłości zbioru okazuje się zwartość.

Istnieją dwa główne źródła, z których narodziło się pojęcie zwartości. Pierwszym z nich są badania Bolzano i Weierstrassa dotyczące zachowania się funkcji określonych na ciągach liczb rzeczywistych. Drugim źródłem były wyniki Borela i Lebesgue'a związane z topologicznymi własnościami pokryw zbiorów przy pomocy otwartych otoczeń.

W pracy Bolzano z 1817 r. znajduje się następujący lemat:

*Jeśli pewna własność  $M$  nie przysługuje wszystkim wartościom zmiennej  $x$ , lecz tym wartościom, które są mniejsze od pewnej wartości  $u$ , wtedy istnieje wielkość  $U$ , która jest największa z tych, dla których można stwierdzić, że wszystkie mniejsze wielkości  $x$  posiadają własność  $M$ <sup>13</sup>.*

W powyższym lemacie może nie istnieć taka wielkość mająca własność  $M$ , że każda większa od niej tej własności już nie posiada; jednak musi istnieć taka wielkość, że wszystkie mniejsze od niej posiadają już własność  $M$ . Innymi słowy, w lemacie Bolzano zbiór wszystkich punktów mających własność  $M$  może nie posiadać elementu największego, jednak zbiór elementów nie mających własności  $M$  musi mieć element najmniejszy – jest to najważniejsza własność prostej rzeczywistej (ciągłość) mówiąca, że każdy ograniczony podzbiór prostej musi posiadać kresy (w tym przypadku, kres górny).

Istotą dowodu, który podaje Bolzano, jest dzielenie ograniczonego odcinka na dwie części i wybór tej części, która zawiera nieskończoną ilość elementów tego zbioru. Powtarza on ten proces tak długo, aż otrzymuje liczbę będącą najmniejszym górnym ograniczeniem danego zbioru liczb rzeczywistych.

Lemat Bolzano pozwolił Weierstrassowi udowodnić, że każdy ograniczony, nieskończony podzbiór liczb rzeczywistych posiada punkt skupienia (własność Bolzano-Weierstrassa) oraz, że ciągła funkcja określona na domkniętym i ograniczonym podzbiórze liczb rzeczywistych przyjmuje przynajmniej raz maksimum. Pierwsza z powyższych własności stała się podstawą definicji tzw. ciągowej zwartości (zbiór jest zwarty, jeśli każdy ciąg utworzony z jego elementów posiada podciąg zbieżny do elementu tego zbioru). Druga natomiast własność (tzw. twierdzenie Weierstrassa) jest podstawowym argumentem za wprowadzeniem pojęcia zwartości – okazuje się, że funkcje ciągłe przyjmują swoje kresy również w ogólnym przypadku, gdy są określone na zbiorach zwartych.

Została więc uchwycona istotna własność *continuum* – przyjmowanie kresów. I wszystko sprowadza się do „dyskretnej” operacji – spośród elementów ograniczających wybieramy element największy (kres dolny) lub najmniejszy (kres górny). Na przykład mimo, iż odcinek otwarty na prostej nie ma ele-

mentu największego („nieosiągalność” końca odcinka otwartego z jego wnętrza jakby potwierdza paradoks dychotomii Zenona z Elei, jednak z zewnątrz ten kres jest osiągalny<sup>14</sup>), to jednak istnieje najmniejszy element jego ograniczeń górnych i jest to kres górny tego odcinka.

O ile Weierstrass próbował uchwycić własności charakterystyczne prostej rzeczywistej przy pomocy pojęcia ciągu i kresu, o tyle Borel i Lebesgue za narzędzie badań obrali pojęcie pokrycia otwartego. Dopiero później ujawniła się znacząca zbieżność tych podejść.

W 1894 r. Borel dowodzi następujące twierdzenie: *Jeśli przeliczalna rodzina odcinków otwartych pokrywa domknięty przedział  $[a, b]$ , wtedy istnieje skończona podrodzina pokrywająca  $[a, b]$ .*

Metoda „pokryciowa” Borela była już wcześniej stosowana przez innych matematyków. Heine w 1872 r. w dowodzie twierdzenia mówiącego, że funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła stosuje tę metodę. Nie widzi jednak jej ogólności.

W rok po ukazaniu się pracy Borela w 1895 r. Cousin rozszerza twierdzenie Borela na przypadek pokryć płaszczyzny: *Jeśli każdemu punktowi domkniętego obszaru odpowiada okrąg o skończonym promieniu, wtedy obszar może być podzielony na skończoną liczbę podobszarów takich, że każdy podobszar jest wnętrzem dla pewnego okręgu mającego swój środek w tym obszarze.*

Korzystając z wyniku Cousina, Lebesgue w 1902 r. uogólnił twierdzenie Borela na przypadek podzbiorów domkniętych (i ograniczonych) dowolnej przestrzeni euklidesowej  $E^n$ . Dopiero u Frecheta w pracy z 1906 r. pojawia się definicja zwartości – zrozumiał on, że własność zbiorów domkniętych (i ograniczonych) ujęta w twierdzeniu Borela-Lebesgue’a powinna otrzymać nazwę, czyli może stać pełnoprawnym matematycznym pojęciem. W swojej definicji uwzględnia jednak również intuicję zwartości zawartą w rozważaniach Bolzano i Weierstrassa.

*Zbiór  $E$  nazywamy zwartym, jeśli dla dowolnego ciągu  $E_n$  niepustych, domkniętych podzbiorów  $E$  takich, że  $E_{n+1}$  jest podzbiorem  $E_n$ , dla każdego  $n$ , istnieje przynajmniej jeden element należący do wszystkich zbiorów  $E_n$ .*

Metoda przekrojów zstępującego ciągu zbiorów domkniętych pozwala stwierdzić czy zbiór ma „dziury”, czy nie. Od razu widać, że odcinek z wyrzuconym jednym punktem (czy z przeliczalną ilością) nie jest zwarty oraz, że nie jest zwarta miotłka Knastera-Kuratowskiego. Można by więc utożsamiać zwartość z „brakiem dziur”. Jednak zbiór Cantora jest zwarty (widać to już z samej konstrukcji, gdyż każdy punkt tego zbioru jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych zawartych w odcinku). Nie można więc posługiwać się tak prostą intuicją. Zbiór Cantora nie jest jednak spójny (analogicznie jak

miotelka Knastera-Kuratowskiego jest spójna, ale nie jest zwarta). Wydaje się, że połączenie spójności i zwartości pozwoli uniknąć powyżej wskazanych trudności i da charakterystykę *continuum* zgodną z intuicją.

Zanim jednak zaczęto używać abstrakcyjnie rozumianego pojęcia *continuum* topologicznego (jako zbioru zwartego i spójnego) miały miejsce badania prowadzone przez Schoenfliesa, Brouwera, Janiszewskiego, Sierpińskiego, Mazurkiewicza, Knastera, Kuratowskiego i innych nad pojęciami zwartości i spójności, szczególnie w przypadku obiektów położonych na płaszczyźnie. Udowodnione przez tych matematyków twierdzenia i przeprowadzone konstrukcje ukazały znaczenie, i matematyczną rangę pojęcia *continuum*. Narodzinami topologicznego pojęcia *continuum* zajmiemy się w następnych paragrafach.

### 3. Konstrukcja Brouwera

Intuicjonizm Brouwera był próbą filozoficznego ogarnięcia nowych idei, które pojawiły się w matematyce w XIX wieku. Była to chyba najbardziej zdecydowana próba w tym okresie. Nowożytna wizja matematyki nie wytrzymała próby czasu. Została zakwestionowana przez rozwój matematyki – elementy aprioryczne czy intuicyjne nie mogą w nowej wizji matematyki określać „prawdliwość” aksjomatów i poprawność definicji. Najpierw jest matematyka i jej konstrukcje a dopiero potem, wytworzone w oparciu o te konstrukcje, intuicje.

W koncepcji Brouwera jednak wszystkie obiekty matematyczne powstają w oparciu o „intuicję nagiej dwujedności”. Czy jest to do pogodzenia z nową wizją matematyki? Spójrzmy na argument Brouwera przytaczany przez niego na poparcie tezy, że przy budowie matematyki należy całkowicie odrzucić metodę aksjomatyczną. Sądzi on, że żaden obiekt matematyczny nie istnieje uprzednio jako obiekt przed-matematyczny – dopiero po skonstruowaniu go jako obiektu matematycznego można poddać go badaniom. Ta „intuicja dwujedności” leżąca u podstaw matematyki, nie determinuje jej, gdyż jest „naga”, pozbawiona jakichkolwiek treści. Nabywa ich dopiero pod wpływem działalności matematycznej, która jest wolną grą umysłu.

Jaki jest więc sposób działania metody intuicjonistycznej przy konstrukcji matematyki? Nie przyjmować na początku niczego co mogłoby ograniczyć wolną aktywność umysłu, gdyż każda rzecz (własność, metoda) może stać się matematyczna, może zostać użyta w działalności matematycznej. Widzimy więc z jaką śmiałością metoda uniwersalizmu matematyki, nakreślona przez Bolzano i Riemanna jest tutaj realizowana. Stąd tak spektakularny spór Brouwera z Kroneckerem – ten ostatni nie dopuszcza, aby matematyka mogła w swoich podstawach wyjść poza arytmetykę – nie zgadzał się na jej, tak rozumiany, uniwersalizm.



Intuicja, o której pisze Brouwer, leżąca u podstaw wszelkich konstrukcji matematycznych, ma szczególne znaczenie. Jest bowiem jednością ciągłości i dyskretności. U podstaw matematyki nie leży więc pierwotne rozumienie liczby, lecz intuicja ciągłości, czasowego *continuum* – dopiero ta intuicja wytwarza to co dyskretne, poprzez podział *continuum* w postaci „przed i po”<sup>15</sup>. *Continuum* nie jest dane jako zbiór punktów, które mogą być skonstruowane pojedynczo. *Continuum* jest podobne do matrycy, którą można wypełnić punktami czy liczbami. Oczywiście, to wypełnianie musi być zgodne z „naturą *continuum*”. Z jednej strony intuicja *continuum* jest punktem startowym matematyki, lecz z drugiej, rozwijając matematykę głębiej wnikamy w tę naturę.

Twórczość matematyczna Brouwera jest przykładem realizacji jego filozofii. Szczególnie widoczne jest w przypadku śmiałych konstrukcji topologicznych. To właśnie Brouwer skonstruował pierwsze *continuum* nierozkładalne – miało to miejsce w 1909 r. Praca *Zur Analysis Situs*, która ukazała się w *Mathematische Annalen* w 1910 r.<sup>16</sup>, była właściwie komentarzem do trzech prac Schoenfliesa z lat 1903-1906 dotyczących podstaw topologii płaszczyzny i będących próbą scharakteryzowania krzywych płaskich m.in. jako brzegów obszarów. Centralnym twierdzeniem, którym zajmował się Schoenflies było twierdzenie Jordana mówiące, że krzywa zamknięta Jordanowska (tzn. wzajemnie jednoznaczny i ciągły obraz okręgu) dzieli płaszczyznę na dwa obszary, przy czym jest ich wspólnym brzegiem. Brouwer poddał analizie twierdzenia sformułowane i udowodnione przez Schoenfliesa i zauważył, że „hier sind mehrere seiner Resultate falsch, andere zwar richtig, aber ungenügend begründet”<sup>17</sup>. Nie odmawiał jednak przez to wartości tym pracom. Uważał, że poruszone tam sprawy są kluczowe dla dalszego rozwoju *Analysis Situs*. Wierzył, że można te kwestie i problemy wyjaśnić, przede wszystkim przez konstrukcje odpowiednich zbiorów, które posiadają własności przeczące udowodnionym tam twierdzeniom. Nie wskazuje więc błędów w rozumowaniu Schoenfliesa, lecz konstruuje zbiór, który poddaje analizie. Dopiero odkryte własności tego zbioru przeciwstawia istniejącym twierdzeniom i tym samym ukazuje ich fałsz. Dwa następujące „twierdzenia”, których prawdziwość Brouwer zanegował, są dla nas szczególnie interesujące:

- I. *Jede geschlossene Kurve sich in zwei eigentliche Kurvenbogen zerlegen läßt.*
- II. *Bei der Zerlegung einer geschlossenen Kurve in zwei Kurvenbogen wenigstens einer von ihnen eigentlich ist*<sup>18</sup>.

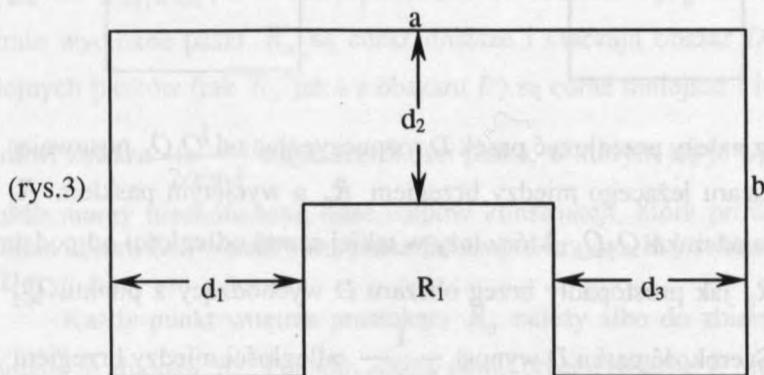
Stanowiły one bowiem główną motywację dla przeprowadzonej konstrukcji, która właśnie pokazywała, że takie rozkłady są niemożliwe. Ten skonstruowany przez Brouwera zbiór, to pierwsze *continuum* nierozkładalne (*unzerglegbare Continue*), które pojawiło się w matematyce.

Głównym zamierzeniem pracy Brouwera było podanie mnogościowej charakterystyki „krzywej”. Uważał on, że taka charakterystyka jest konieczna,

jeśli chce się uniknąć sprzeczności i błędów (np. takich jak w pracach Schoenfliesa) wynikających głównie z faktu korzystania z geometrycznych intuicji. Dopiero dostatecznie ogólna „ponad-geometryczna” charakterystyka da możliwość wyzolenia się z tych intuicji.

Do czasu Brouwera wydawało się, że każde *continuum* jest rozkładalne, czyli można go przedstawić jako sumę jego dwóch właściwych (czyli różnych od całości) podcontinuuów. Ukształtowana na doświadczeniu potocznym intuicja nie jest w stanie wyobrazić sobie *continuum* nierozkładalnego. Taka nierozkładalność wydaje się wręcz przeczyć istocie *continuum* jako zbioru, który można dzielić na coraz mniejsze, dowolnie małe części (podcontinua).

Przyjrzyjmy się jak przebiega konstrukcja Brouwera. Najpierw z prostokąta  $R_0$  (leżącego na płaszczyźnie) o długości  $a$  i szerokości  $b$  (*Hauptrechteck* – prostokąt podstawowy) wycinamy prostokąt  $R_1$  w ten sposób, aby  $d_1 = d_2 = d_3$  (rys. 3).



Niech stosunek podstawy wyrzuconego prostokąta do podstawy  $a$  prostokąta  $R_0$  wynosi  $\frac{1}{2\alpha+1}$ , gdzie  $\alpha$  jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą.

Wtedy szerokość  $d_1$  wynosi  $\frac{\alpha}{2\alpha+1}a$ . Następny krok polega na wpisaniu paska

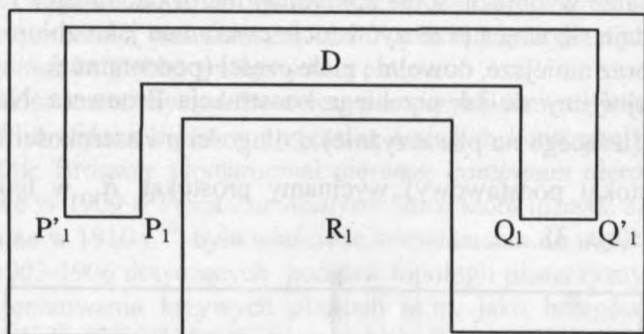
$D$  o szerokości  $\left[ \frac{1}{2\alpha+1} \right] \left[ \frac{\alpha}{2\alpha+1} \right] a$  w obszar  $R_0 - R_1$  między odcinkami  $P_1'P_1$

oraz  $Q_1Q_1'$  jak pokazuje rys. 4. Brzegi paska  $D$  są odpowiednio równoległe do brzegów prostokąta  $R_0$  i oddalone od nich o odległość  $\left[ \frac{\alpha}{(2\alpha+1)^2} \right] a$  (rys. 4).

W kolejnym etapie wycinamy z pozostałej części  $(R_0 - R_1) - D$  pasek  $R_2$ , który otacza obszar  $D$ , w ten sposób, że początek tego paska zaczyna się po

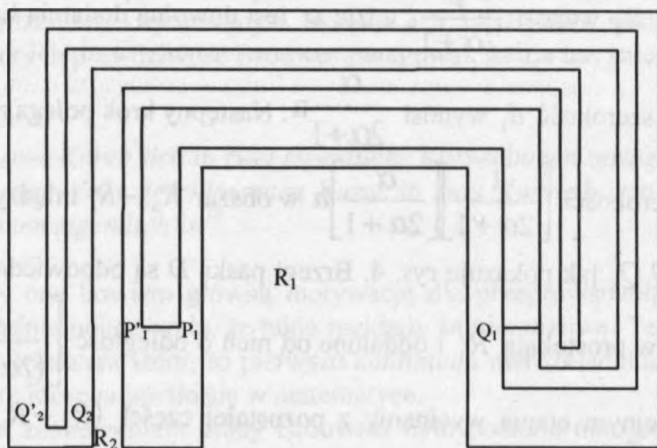
lewej stronie podstawy prostokąta  $R_0$  i kończy po prawej stronie na wysokości  $Q_1Q_1'$ . Szerokość paska  $R_2$  stanowi  $\frac{1}{2\alpha+1}$  odległości między brzegiem prostokąta  $R_0$  a obszarem  $D$  i pasek ten biegnie dokładnie przez środek obszaru leżącego między brzegiem  $R_0$  a  $D$  (rys. 5).

(rys.4)



Teraz należy przedłużyć pasek  $D$  rozpoczynając od  $Q_1Q_1'$  posuwając się środkiem obszaru leżącego między brzegiem  $R_0$  a wyciętym paskiem  $R_2$  aż dojdziemy do odcinka  $Q_2Q_2'$ , który leży w takiej samej odległości od podstawy prostokąta  $R_0$  jak prostopadły brzeg obszaru  $D$  wychodzący z punktu  $Q_2'$  od brzegu  $R_2$ . Szerokość paska  $D$  wynosi  $\frac{1}{2\alpha+1}$  odległości między brzegiem  $R_0$  a brzegiem  $R_2$  (rys. 5).

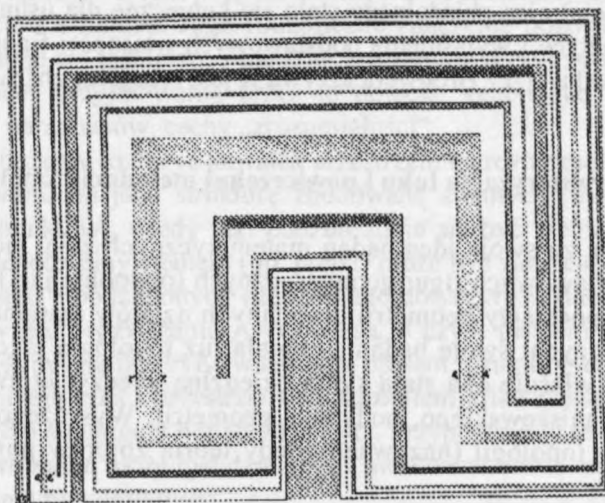
(rys.5)



W następnym etapie wycinamy pasek  $R_3$  wokół istniejącej już (rozszerzonej) części obszaru  $D$  rozpoczynając znów od podstawy prostokąta  $R_0$  po prawej stronie, między brzegiem prostokąta  $R_0$  a obszarem  $D$ , posuwając się środkiem (szerokość wycinanego paska stanowi znów  $\frac{1}{2\alpha+1}$  szerokości tej części, z której wycinamy) aż znajdziemy się na wysokości odcinka  $P_1'P_1$  między lewym brzegiem prostokąta  $R_1$  a obszarem  $D$ .

W dalszej kolejności znów rozszerzamy obszar  $D$  rozpoczynając teraz od odcinka  $P_1'P_1$  i kończąc na odcinku  $P_2'P_2$  (rys. 5). Kolejne etapy konstrukcji są analogiczne. Zawsze obszar  $D$  jest rozszerzany z końca najpierw od odcinka  $Q_nQ_n$  do  $Q_{n+1}Q_{n+1}$ , a w kolejnym kroku od odcinka  $P_n'P_n$  do  $P_{n+1}'P_{n+1}$ . Podobnie wycinane paski  $R_n$  są coraz dłuższe i otaczają obszar  $D$ . Szerokości kolejnych pasków (tak  $R_n$  jak i z obszaru  $D$ ) są coraz mniejsze i ich szerokość stanowi zawsze  $\frac{1}{2\alpha+1}$  część szerokości paska, w którym się je wpisuje. W ten sposób mamy nieskończoną ilość etapów konstrukcji, które prowadzą do powstania zbioru  $D$ . Poszukiwana przez Brouwera krzywa  $K$  jest brzegiem obszaru  $D$  (rys. 6).

Każdy punkt wnętrza prostokąta  $R_0$  należy albo do zbioru  $D$ , albo do któregoś ze zbiorów  $R_n$ . Ponadto, każdy punkt brzegu pasków  $R_n$  leży dowolnie



Rys. 6



blisko krzywej  $K^{19}$ . Krzywa  $K$  ma tę własność, że „zawija się do samej siebie” tzn. dla każdego punktu (jak również dowolnego łuku) krzywej  $K$  istnieją inne punkty tej krzywej znajdujące się dowolnie blisko tego punktu. Właśnie ta własność, na którą zwrócił uwagę Brouwer, jest własnością charakteryzującą continuum nierozkładalne (*continuum* jest nierozkładalne, jeśli każde jego podcontinuum właściwe jest nigdziegęste<sup>20</sup>). W całej pracy nie używa jednak Brouwer słowa „nierozkładalne”. Interesuje go nie tyle problem nierozkładalności, co konstrukcje krzywych na płaszczyźnie będących wspólnym brzegiem dwóch (lub większej ilości) obszarów. Zauważa, że krzywa  $K$  jest wspólnym brzegiem dokładnie dwóch obszarów: jednym z nich jest wnętrze zbioru  $D$ , a drugim pozostała część płaszczyzny leżąca poza zbiorem  $D$  (zawierająca zbiory  $R_n$  jak i zewnętrzne prostokąta  $R_0$ )<sup>21</sup>. W dalszej części Brouwer pokazuje, że nieznaczna modyfikacja przeprowadzonej konstrukcji pozwala otrzymać również krzywe (leżące na płaszczyźnie) będące wspólnym brzegiem dowolnej przeliczalnej ilości obszarów (trzech, czterech itd.)<sup>22</sup>. Własność powyższa wydaje się być niezgodna z geometryczną intuicją – Schoenflies (w cytowanych pracach) uważa, że każda krzywa zamknięta leżąca na płaszczyźnie jest wspólnym brzegiem dokładnie dwóch obszarów. Przykłady Brouwera pokazywały jak dalece to stwierdzenie odbiega od prawdy.

W ten sposób powstało pierwsze *continuum* nierozkładalne (choć jeszcze nienazwane), przy czym Brouwer równocześnie ukazał jak można tą samą metodą konstruować kolejne posiadające nowe, wydające się sprzeczne z intuicją, własności. Pojęcie nierozkładalności (w przypadku krzywej jest to „samozawijanie się” krzywej w każdym punkcie) narodziło się jako reakcja na fałszywe twierdzenia sformułowane i „udowodnione” przez Schoenfliesa a uznawane w dużej mierze przez ówczesnych matematyków za oczywiste. Pojęcie *continuum* nierozkładalnego stało się konieczne dla usunięcia sprzeczności w matematyce i wyjaśnienia podstawowych własności figur geometrycznych. Poszukiwana przez Brouwera krzywa  $K$  jest brzegiem obszaru  $D$ .

#### 4. Charakterystyka łuku i powierzchni metodami topologicznymi

Zgodnie ze swoją ideą badań matematycznych zajął się Janiszewski badaniem podstawowych figur geometrycznych (podobnie jak Bolzano), aby znaleźć ścisłe podstawy geometrii oraz innych działów matematyki. W czasie, gdy rozpoczynał swoje badania istniała już topologia jako młoda dziedzina badań – właśnie ona stała się tą dziedziną wiedzy, która miała wyjaśnić, według Janiszewskiego, podstawy geometrii. Wyszczególnił dwa kierunki badań w topologii (nazywaną wtedy teorią zbiorów punktowych lub *analysis situs*):

1. Badanie figur w stosunku do przestrzeni, w której leżą oraz związków między figurami w tej przestrzeni;

2. Badanie figur samych w sobie i znajdowanie charakteryzujących je własności. Wskazanie tych własności jest zarazem dowodem istnienia danego zbioru<sup>23</sup>.

Na początku Janiszewski podejmuje badania drugiego typu. Rozpoczął od jednego z najprostszych bytów geometrycznych – odcinka. Uogólnił to pojęcie (przy pomocy narzędzi topologicznych) wprowadzając pojęcie łuku jako homomorficznego obrazu odcinka i główne wysiłki skierował na podanie wewnętrznej charakterystyki łuku. W tym celu zdefiniował nowe pojęcie – *continuum* zagęszczenia (nigdziegęste *continuum* mające więcej niż jeden punkt). Stało się to w jego pracy doktorskiej w 1911 roku<sup>24</sup>.

Mimo, że Fréchet wprowadził ogólne pojęcie zwartości, nie było ono właściwie używane w swojej pełnej ogólności aż do czasu prac Urysohna i Aleksandrowa (1923 r.). Janiszewski rozumie przez *continuum* zbiór domknięty i spójny (tak jak Borel i Lebesgue). Ogólne pojęcie homeomorfizmu wprowadził w 1910 r. Fréchet, chociaż już wcześniej używał tego pojęcia Poincaré, jednak wyłącznie w odniesieniu do podzbiorów przestrzeni euklidesowych. Janiszewski wprowadzając ogólne pojęcie łuku odszedł od przestrzeni euklidesowych (i od własności metrycznych) i zajął się własnościami topologicznymi (czyli własnościami zachowywanymi przez homeomorfizmy) odcinka.

Tym samym pojawiło się po raz pierwszy w matematyce nietrywialne (wielopunktowe) *continuum* rozpatrywane w sposób ogólny i abstrakcyjny. Dopiero teraz (na dostatecznie ogólnym poziomie) można mówić o związkach filozoficznego pojęcia *continuum* z pojęciem *continuum* wprowadzonym do matematyki.

Stare filozoficzne pojęcie *continuum* stało się częścią matematyki. I nie było to tylko wykorzystanie nazwy, lecz również przyswojenie pewnych istotnych treści związanych z tym pojęciem. Oczywiście matematyka nie pozbawiła filozofii pojęcia *continuum*. Jego filozoficzne znaczenie pozostaje, ale, dzięki matematyce, staje się jaśniejsze i bardziej zrozumiałe. Przyjrzyjmy się jak wygląda ten proces przyjmowania przez to pojęcie, generujące wcześniej tyle sprzeczności i paradoksów, cechy „zrozumiałości”.

Czy możemy rozłożyć kawałek przestrzeni na rozłączne *continua*? Jeśli traktujemy *continuum* jako strukturę zbudowaną z innych (dyskretnych) elementów (np. punktów), wtedy taki podział zdaje się być niemożliwy. Jak bowiem jeden niepodzielny element (np. punkt) może być zarazem końcem jednego jak i drugiego z podzielonych części. Tego dotyczyły w dużej mierze paradoksy eleatów jak i rozważania Arystotelesa, o czym pisałem w rozdziale II. Arystotelesowskie analizy były właściwie opisem struktury *continuum* (jaką według niego mają czas i przestrzeń) i pokazaniem kilku własności, które pozwalają myśleć o *continuum* bez sprzeczności. Przypomnijmy te cechy:

(I) *Continuum* może być dzielone w nieskończoność i na każdym etapie tego podziału mamy *continuum*;

(II) Nie składa się z elementów oddzielonych od siebie, lecz wszystkie części „stykają się” ze sobą.

W ujęciu Arystotelesa nie można jednak myśleć o *continuum* jako zbudowanym z punktów. Intuicja punktu jako podstawowego budulca musiała zostać odrzucona. Zdefiniowanie w matematyce *continuum* jako zbioru (punktów), który spełnia wymagane własności (spójności i domkniętości) pogodziło te obie intuicje. Kluczowe okazało się jednak pojęcie zbioru – zbiór łączy w jedną całość dowolne „niepodzielne” elementy i może jednocześnie przyjać na siebie bardzo różnorodne struktury. Nie trzeba rezygnować z którejs z tych intuicji – pojęcie topologiczne *continuum* ukazuje, że dana struktura może być w pewnym sensie ciągła a w innym dyskretna. Trzeba wypełnić strukturę dyskretną dodatkowymi „elementami”, aby otrzymać ciągłość – i jest to możliwe bez popadania w sprzeczność.

Najprostszym (wielopunktowym) przykładem *continuum* jest łuk, którego topologiczną definicję podał Janiszewski. Przy pomocy pojęcia *continuum* możliwe jest podanie charakterystyki różnych geometrycznych obiektów. W swojej pracy doktorskiej Janiszewski formułuje i dowodzi, między innymi, twierdzenie, które daje topologiczną charakterystykę łuku.

**Jeśli *continuum* jest nieprzywiedlne między dwoma punktami i nie zawiera podcontinuum zagęszczenia, to jest łukiem. Innymi słowy, każde *continuum* lokalnie spójne i nieprzywiedlne między dwoma punktami jest łukiem<sup>25</sup>.**

Przestrzeń jest lokalnie spójna, jeśli w każdym punkcie tej przestrzeni istnieją dowolnie małe spójne otoczenia.

Nieprzywiedlność *continuum*  $K$  między punktami  $a$  i  $b$  oznacza, że nie istnieje żadne właściwe podcontinuum zawierające punkty  $a$  i  $b$ . Każdy łuk jest właśnie nieprzywiedlny między swoimi końcami – jest najmniejszym *continuum* zawierającym końce. Istnieją *continua* nieprzywiedlne inne niż łuki. Najbardziej typowym przykładem jest *sinusoida zagęszczona* – jest to zbiór punk-

tów płaszczyzny będących wykresem funkcji  $f(x) = y = \sin \frac{\pi}{x}$ , przy czym

$x \in (0;1]$ , wraz z odcinkiem granicznym (zagęszczenia)  $[-1;1]$  leżącym na osi  $y$ -ów. Sinusoida jest nieprzywiedlna między punktem  $(1;0)$  a każdym punktem odcinka zagęszczenia.

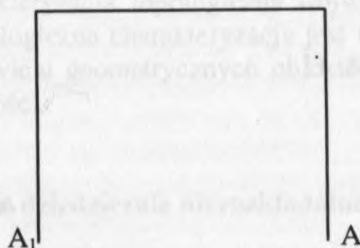
Własność nieprzywiedlności była bardzo dokładnie badana przez Janiszewskiego. Tym bardziej wzrosła jej ranga, gdy okazała się cechą charakteryzującą łuk. Przykład skonstruowany w pracy doktorskiej Janiszewskiego zwrócił uwagę na pewną własność<sup>26</sup>, która później okazała się cechą charakteryzującą *continua* nierozkładalne (w pracy Janiszewskiego-Kuratowskiego z roku 1920). W swojej konstrukcji Janiszewski wykorzystał ideę *continuum* nierozkładalnego Brouwera (podobnie jak Brouwer nie używa jednak słowa „nierozkładalny”), jednak ją znacznie uprościł i dostosował do realizowanego celu.

Najpierw na podstawie  $A_1A$  kwadratu  $P$  obieramy ciąg punktów  $A_1, A_1', A_2, A_2', \dots$  w taki sposób, aby  $\overline{A_{k+1}A} = \frac{1}{3}\overline{A_kA}$  oraz  $\overline{A_kA} = \frac{2}{3}\overline{A_kA}$ .

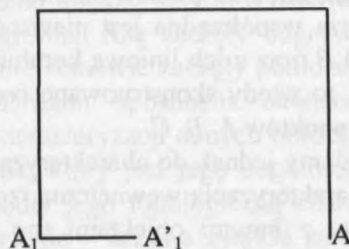
Konstruowana figura składa się z następujących części:

1. linii łamanej  $AA_1$  utworzonej z trzech boków kwadratu  $P$  (oprócz podstawy);
2. odcinka  $A_1A_1'$ ;
3. linii łamanej  $A_1'A_2$ , której odcinki są równoległe odpowiednio do odcinków łamanej  $A_1A$ ;
4. odcinka  $A_2A_2'$ ;
5. linii łamanej  $A_2'A_3$ , której odcinki są równoległe odpowiednio do odcinków linii  $A_2A_1' \cup A_1'A_1 \cup A_1A$ ; itd. (rys. 7, 8, 9, 10, 11).

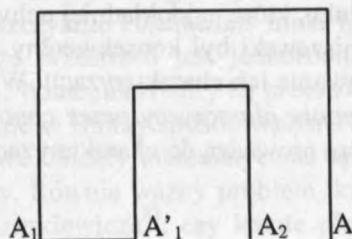
Rys. 7



Rys. 8

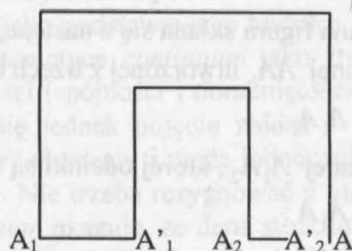


Rys. 9

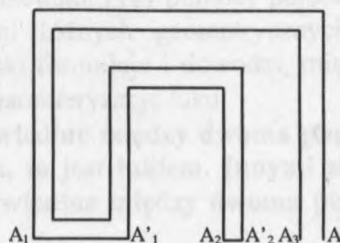




Rys. 10



Rys. 11



Otrzymujemy w ten sposób nieskończoną linię łamaną wraz z punktem domknięcia  $B$ . Janiszewski zauważa, że jeśli weźmiemy dowolny punkt  $C$  na jakimkolwiek odcinku pionowym skonstruowanego zbioru o tej własności, że jego pierwsza współrzędna jest niewspółmierna z pierwszymi współrzędnymi punktów  $A$  i  $B$  oraz z ich liniową kombinacją przy pomocy wymiernych współczynników, to wtedy skonstruowane *continuum* jest nieprzywiedlne pomiędzy każdą parą punktów  $A, B, C$ .

Wróćmy jednak do charakterystyki łuku podanej przez Janiszewskiego. Jest ona charakterystyką wewnętrzną tzn. nie odwołujemy się w niej do relacji tego obiektu z innymi obiektami (np. przestrzeni, w której jest położony). Traktowany jest on jako byt sam w sobie.

W powyższej rozprawie znajduje się jeszcze kilka podobnych charakterystyk łuku. Widać, że Janiszewski przywiązywał dużą wagę do znalezienia tych cech łuku, które najdokładniej uchwycą jego istotę.

Janiszewski był konsekwentny w badaniu topologicznych struktur poprzez podawanie ich charakterystyki. W swojej rozprawie habilitacyjnej z 1913 r. *O rozcinaniu płaszczyzny przez continuum*<sup>27</sup>, znajdują się dwa ważne twierdzenia, które prowadzą do charakterystyki sfery.

**Twierdzenie A.** Suma dwóch *continuumów*, z których żadne nie rozcina płaszczyzny i których mnogość punktów jest spójna lub próżna, nie rozcina płaszczyzny<sup>28</sup>.

**Twierdzenie B.** Suma dwóch *continuumów*, których mnogość punktów wspólnych jest niespójna, rozcina płaszczyznę<sup>29</sup>.

Powyższe dwa twierdzenia ukazują bardzo ważną własność płaszczyzny, nazwaną później **własnością Janiszewskiego**:

Mówimy, że przestrzeń ma własność Janiszewskiego, jeśli suma dwóch dowolnych *continuumów*, których przekrój nie jest spójny, rozcina tę płaszczyznę. Natomiast *continuum* lokalnie spójne, które ma własność Janiszewskiego nazywa się *przestrzenią Janiszewskiego*.

Przy pomocy powyższych własności otrzymujemy istotną charakterystycję sfery dwuwymiarowej  $S^2$ :

*Przestrzeń  $X$  jest przestrzenią Janiszewskiego bez punktów rozspajających<sup>30</sup> wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna ze sferą  $S^2$ .*

Mimo wielu wysiłków charakteryzacja topologiczna trójwymiarowej sfery nie jest znana do tej pory. Topologiczna charakteryzacja jest najbardziej ogólną z możliwych charakteryzacji wielu geometrycznych obiektów i z tego powodu napotyka na tak wielkie trudności.

## 5. Idea konstrukcji *continuum* dziedzicznie nierozkładalnego

Istnieją pewne obiekty w matematyce (czy raczej na pograniczu matematyki), których sens w dużej mierze określony jest przy pomocy intuicji. W programie Bolzano-Riemanna chodziło między innymi o całkowite włączenie tych obiektów do matematyki. Ogromną rolę zaczęły odgrywać różnego rodzaju „patologiczne” konstrukcje, które stanowiły podłoże budowania nowych matematycznych intuicji. Drugim sposobem okiełznania pozamatematycznych intuicji jest metoda charakteryzacji danych obiektów. Jednym z takich obiektów jest odcinek (czy łuk, który jest jego uogólnieniem) – jak pokazaliśmy wcześniej Janiszewski podał jego topologiczną charakteryzację; kolejnym jest okrąg (oraz jego uogólnienie – krzywa zwykła zamknięta jako obraz homeomorficzny okręgu). Pytanie postawione przez Knastera i Kuratowskiego w 1920<sup>31</sup> było pytaniem o topologiczną charakteryzację krzywej zwykłej zamkniętej i odpowiadało programowi Janiszewskiego. Było ono następujące: **czy każde jednorodne leżące na płaszczyźnie *continuum* musi być krzywą zwykłą zamkniętą?** Przypomnijmy, że przestrzeń jest jednorodna, jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $x$  i  $y$  istnieje homeomorfizm  $f$  tej przestrzeni taki, że  $f(x) = y$ . Próby odpowiedzi na to pytanie w istotny sposób wpłynęły na rozwój topologii geometrycznej. Powstały nowe obiekty matematyczne będące kontrprzykładem do sformułowanej hipotezy. Równie ważny problem tkwił w pytaniu postawionym w 1921 r. przez Mazurkiewicza<sup>32</sup>: **czy każde płaskie *conti-***

**nuum o tej własności, że jest homeomorficzne z dowolnym swoim niezdegenerowanym (niejednopunktowym) podcontinuum, musi być łukiem?**

Zasadniczą rolę odegrał w odpowiedzi na oba te pytania pseudołuk skonstruowany przez Knastera w 1922<sup>33</sup>; później miały miejsce różne wersje tej konstrukcji podane przez Moise'a<sup>34</sup> i Binga<sup>35</sup> w 1948 r. Jednak ogólna idea tych konstrukcji została sformułowana przez Janiszewskiego na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Cambridge w 1912 r.<sup>36</sup> Janiszewski wygłosił referat, w którym zarysował ideę konstrukcji krzywej nie zawierającej łuków. Ponieważ pojęcia krzywej i łuku wydają się (na podstawie pierwotnej intuicji) nierozdzielnie ze sobą związane ta konstrukcja została przyjęta jako absolutnie paradoksalna. Nie wzbudziła też na początku większego zainteresowania. Jest to jedna z najtrudniejszych konstrukcji w matematyce (jak mówił Steinhauś). Dopiero dalszy rozwój topologii ukazał jej znaczenie.

Referat Janiszewskiego poświęcony był analizie podstawowych pojęć geometrycznych: prostej i powierzchni. Podobnie jak Brouwer, w analizowanej przez nas w § 3 pracy, ustawia swoje analizy na pozycjach krytycznych wobec pewnych matematycznych wyników. Uważa, że jego badania są wejściem na teoriomnogościową podstawę matematyki, gdzie dopiero można znaleźć drogi prowadzące do rozwiązań. Obiekty geometryczne bada Janiszewski przede wszystkim jako ogólne zbiory punkowe (*Ich stelle hier auf rein geometrischen (besser: mengentheoretischen) Boden und betrachte alle geometrische Gebite als Punktmengen*<sup>37</sup>). Dla uproszczenia ogranicza się do continuumów nigdziegęstych trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Na początku zauważa, że te powszechnie znane twory geometryczne, to linie i powierzchnie oraz różnego rodzaju ich kombinacje i połączenia. Janiszewski ogranicza się tylko do takich figur, które w otoczeniu każdego punktu mają ten sam wymiar (jeden lub dwa). Wydaje się, jak pisze Janiszewski, że przy tych założeniach pomiędzy liniami i płaszczyznami jest przepaść (*zwischen Linien und Flächen eine Kluft zu bestehen*). Czy rzeczywiście? Może istnieją takie continua, które nie są ani liniami, ani płaszczyznami? Dla odpowiedzi na to pytanie potrzebna jest całkiem ogólna definicja linii i płaszczyzny. To co do tej pory miało miejsce jest daleko niezadawalające.

- (1) Próba określenia linii w przestrzeni dwuwymiarowej jako dowolnego nigdziegęstego podcontinuum (tzw. linia cantorowska) okazała się zupełnie nieudana, jak pokazują przykłady skonstruowane przez Brouwera i Janiszewskiego, i analizowane w tej pracy w poprzednich paragrafach.
- (2) Również nie było żadnej ogólnie obowiązującej definicji, która wyróżniałaby linie spośród nigdziegęstych *continuumów* w przypadku przestrzeni trójwymiarowej.
- (3) Najlepiej znana definicja tzw. „krzywej Jordana” (krzywa jest ciągłym obrazem odcinka) również stoi w sprzeczności z faktami geometrycznymi (pokazuje to konstrukcja „krzywej Peano”).

- (4) Zupełnie innego rodzaju badania zapoczątkował Fréchet wprowadzając pojęcie „typu wymiaru” np. okrąg ma ten sam typ wymiaru co prosta. Te badania jednak również nie rozwiązują postawionego problemu, lecz co najwyżej pozwalają na inne jego wypowiedzenie: czy rodzina nigdziegęstych *continuum*ów dzieli się na dwie klasy odpowiednich typów wymiaru, czy nie?

Nie odnajdując nigdzie we współczesnych mu badaniach pomocy podaje Janiszewski konstrukcję nigdziegęstego *continuum* na płaszczyźnie. Pisze on: *Ich will nun eine Linie konstruieren die ein Gegenbeispiel zu einer solcher vermeinten Definition bildet und die als Vorbild oder Bestandteil vieler anderer Gegenbeispiele zu anderen Versuchen der Definitionen dient*<sup>38</sup>. To skonstruowane *continuum* ma więc służyć jako uniwersalny wzorzec innych tego typu konstrukcji i stanowić kontrprzykład dla wszystkich rzekomych definicji tzn. takich, które nie wskażą istotnych i charakterystycznych własności wyróżniających linie spośród wszystkich *continuum*ów nigdziegęstych.

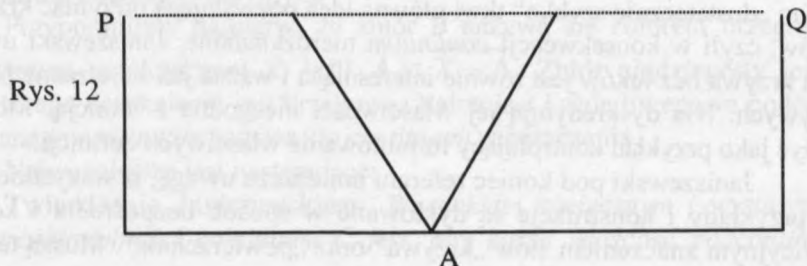
Poprzez swoją konstrukcję pokazuje Janiszewski niedoskonałość ogólnie obowiązujących definicji próbujących oddzielić pojęcie linii od pojęcia powierzchni. Skonstruowane przez niego *continuum* jest zarazem linią (czyli nigdziegęstym podzbiorem płaszczyzny) jak i powierzchnią (w przekroju płaszczyznami otrzymuje się linie<sup>39</sup>).

Przyjrzyjmy się konstrukcji podanej przez Janiszewskiego.

Niech  $\beta$  będzie zbiorem doskonałym nigdziegęstym na odcinku  $PQ$ <sup>40</sup>.

Łączymy każdy punkt tego zbioru (przy pomocy odcinka) z pewnym punktem  $A$  leżącym poza odcinkiem  $PQ$ . Całość tych odcinków mających wspólny koniec w punkcie  $A$  tworzy *continuum*  $C$  (jest to tzw. miotełka Cantora).

W punkcie  $A$  prowadzimy odcinek  $AB$  prostopadły do płaszczyzny  $APQ$ . Odcinek  $AB$  możemy traktować jako ciągły obraz zbioru  $\beta$  (jest to tzw. funkcja cantorowska). Każdemu punktowi z odcinka  $AB$  odpowiada więc jeden lub dwa punkty zbioru  $\beta$  (czyli w konsekwencji odpowiednie odcinki skonstruowanego *continuum*  $C$ ). Następnie w każdym punkcie odcinka  $AB$  tworzymy jeden (lub dwa) odcinki prostopadłe do odcinka  $AB$  oraz równoległe i równe odpowiednim odcinkom z *continuum*  $C$ . Zbiór tych wszystkich odcinków tworzy *continuum*  $K$ . Rzut ortogonalny *continuum*  $K$  na płaszczyznę  $APQ$  daje *continuum*  $C$  (rys. 12).





To *continuum* jest homeomorficzne z płaską krzywą skonstruowana w następujący sposób: łączymy przy pomocy odcinków odpowiednie punkty odcinka  $AB$  z punktami zbioru doskonałego i nigdziegęstego  $\beta$  leżącego na odcinku równoległym do  $AB$ . *Continuum*  $K$  jest więc krzywą.

*Continuum*  $K$  posiada również następującą własność: jego dowolny przekrój płaszczyzną równoległą do  $APQ$  jest pewną krzywą (dokładnie są to dwa współkońcowe odcinki lub jeden). Jest to więc powierzchnia zgodnie z ogólnie obowiązującą definicją.

Skonstruował więc Janiszewski *continuum* będące zarazem krzywą jak i powierzchnią. Ma ono jeszcze inną cechę, która brzmi jak paradoks: pewne jego podcontinuum (dokładnie odcinek  $AB$ ) składa się z samych punktów rozgałęzienia (*sie ein Continuum enthalten von dem jeder Punkt ein Verzweigungspunkt ist*). To skłaniało do poszukiwania lepszych definicji krzywej i powierzchni, aby nie natrafiać na sprzeczności ani paradoksy (prawdziwe czy pozorne). Janiszewski sugeruje następującą definicję powierzchni omijającą trudności wskazane przez kontrprzykład (jest ona nawiązaniem do idei Bolzano): *continuum*  $L$  tworzy powierzchnię, jeśli w każdym punkcie tej powierzchni istnieją kule o dowolnie małym promieniu, których przekrój z tym *continuum* jest pewną krzywą.

W drugiej części referatu podaje przykład *continuum* nie zawierającego żadnego łuku. Czyni to znowu w celu wykazania słabości używanych definicji krzywych i powierzchni. Ma na uwadze skonstruowanie takiego *continuum*, aby każda jego część zawierała *continua* zagęszczenia (*Häufungscontinuum*). To *continuum* otrzymuje się jako graniczny efekt kondensacji osobliwości na od-

cinku. Pierwszym etapem tej konstrukcji jest krzywa  $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , która powstaje z odcinka przez zastąpienie jednego z końców odcinkiem prostym, tak aby zachować strukturę *continuum* i własność nieprzywiedlności. Następnie wszystkie istniejące łuki są zastępowane przez krzywą  $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Końco-

wym efektem będzie krzywa nie posiadająca łuków, pod warunkiem, jak pisze Janiszewski, że te zamiany będą dostatecznie szybko zmierzały do zera (*Man muss dabei dafür sorgen, dass die Abänderungen die man macht, genügend schnell Null konvergieren*<sup>41</sup>). Jest to bardzo nieprecyzyjne określenie, jednak w tym „dostatecznie szybko” tkwi główna idea pozwalająca otrzymać krzywą bez łuków, czyli w konsekwencji *continuum* nierozkładalne. Janiszewski uważa, że taka krzywa bez łuków jest równie interesująca i ważna jak inne znane przykłady krzywych. Nie dyskredytują jej właściwości niezgodne z intuicją. Może więc służyć jako przykład kontrolujący formułowanie właściwych definicji.

Janiszewski pod koniec referatu umieszcza uwagę, iż wszystkie tego typu przykłady i konstrukcje są dyktowane w sposób bezpośredni i konieczny intuicyjnym znaczeniem słów „krzywa” oraz „powierzchnia”. Muszą te badania

doprowadzić do wykazania „rozłączności” pojęć krzywej i powierzchni. Jego analizy są jedynie rzuceniem światła na to zagadnienie – i idą w kierunku sformułowania odpowiednich narzędzi do rozwiązania tych problemów.

Idea podana przez Janiszewskiego nie była dokładną matematyczną konstrukcją. Następne lata to czas poszukiwań i konstruowanie odpowiednich narzędzi potrzebnych do matematycznego ukształtowania idei continuumów nierozkładalnych. Po referacie Janiszewskiego aż do roku 1920 ukazała się tylko jedna praca, która podjęła ten problem: praca japońskiego matematyka Yoneyamy<sup>42</sup> z 1917 r. Pojawia się tam konstrukcja jeszcze jednego continuum nierozkładalnego (tzw. jeziora Wady), chociaż Yoneyama nie interesuje się samym problemem nierozkładalności. Używa ponadto słowa „zbiór ciągły” (continuous set) na oznaczenie continuum. Konstrukcja jezior Wady podana jest jako przykład istnienia na płaszczyźnie continuum zawierającego takie trzy punkty, że jest ono nieprzywiedlne pomiędzy dowolną parą tych punktów (jest to ta sama charakterystyka continuumów nierozkładalnych, która pojawiła się w pracy doktorskiej Janiszewskiego). Konstrukcja jezior Wady, to również przykład continuum na płaszczyźnie będącego wspólnym brzegiem więcej niż dwóch obszarów (kontynuacja problemu rozważanego przez Brouwera w pracy z 1910 r.).

Dopiero od 1920 r. continua nierozkładalne są badane jako byty mające wartość same w sobie, a nie jedynie jako „patologiczne” przykłady realizacji różnych nieintuicyjnych własności. Tą przełomową datę wyznacza wydanie pierwszego numeru *Fundamenta Mathematica*. Ukazały się tam między innymi prace:

1. Z. Janiszewski, K. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*;

2. S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables*.

Prace te były całkowicie poświęcone badaniu continuumów nierozkładalnych i po raz pierwszy zostało użyte wyrażenie „continuum nierozkładalne”. Mazurkiewicz np. w swojej pracy udowodnił bardzo ważne twierdzenie charakteryzujące takie continua:

**Twierdzenie Mazurkiewicza**<sup>43</sup>. *W każdym continuum nierozkładalnym istnieją trzy takie punkty, że to continuum jest nieprzywiedlne między każdą parą tych punktów*<sup>44</sup>.

Praca Janiszewskiego i Kuratowskiego zawierała kilka warunków koniecznych i wystarczających na to, aby continuum było nierozkładalne. Pojawiła się więc pełna charakterystyka takich continuumów. Przyjrzyjmy się tym twierdzeniom charakteryzującym.

Przypomnijmy najpierw, że zbiór  $B$  nazywa się zbiorem brzegowym w przestrzeni topologicznej  $X$ , jeśli  $A \subset \overline{X} - A$ . Zbiór nigdziegęsty jest to zbiór, którego domknięcie jest brzegowe. Natomiast każde brzegowe podcontinuum danego continuum nazywa się continuum zagęszczenia.

Najważniejsze jest następujące:

**Twierdzenie Janiszewskiego.** *Warunkiem koniecznym i wystarczającym nierozkładalności continuum  $C$  jest, aby każde właściwe podcontinuum*

*continuum C było continuum zagęszczenia (Pour qu'un continu C soit indécomposable, il faut et il suffit que chaque vrai sous-continu de C en soit un continu de condensation<sup>45</sup>).*

Dowód oparty jest na następujących lematach (choć nie są one *explicit* tak sformułowane):

**Lemat 1.** Podzbiór  $Z$  przestrzeni  $X$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją żadne niepuste podzbiory  $A$  i  $B$  przestrzeni  $Z$  takie, że  $Z = A \cup B$  oraz  $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$

**Lemat 2.** Jeśli  $C$  jest spójnym podzbiorem przestrzeni spójnej  $X$  oraz  $X - C$  jest niespójne ( $X - C = M \cup N$ ), to zbiory  $C \cup M$  oraz  $C \cup N$  są spójne.

**Lemat 3.** Jeśli  $X$  jest *continuum* nierozkładalnym, a  $K$  jest jego właściwym podcontinuum, to wtedy  $X - K$  jest spójne.

**Dowód twierdzenia.** Wykażemy najpierw, że jeśli każde podcontinuum jest *continuum* zagęszczenia, to *continuum*  $C$  jest nierozkładalne. Załóżmy, że  $C$  jest rozkładalne, czyli  $C = C_1 \cup C_2$ , gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są właściwymi podcontinuumami *continuum*  $C$ . Tak więc  $C - C_1 \subset C_2$  i stąd  $\overline{C - C_1} \subset C_2 \neq C$ .  $C_1$  jest tym samym właściwym podcontinuum *continuum*  $C$ , które nie jest *continuum* zagęszczenia.

Teraz wykażemy, że jeśli *continuum* jest nierozkładalne, to każde jego podcontinuum właściwe jest *continuum* zagęszczenia. Załóżmy, że ten warunek nie zachodzi, czyli, że istnieje właściwe podcontinuum  $K$  takie, że  $\overline{C - K} \neq C$ . Stąd mamy  $C = K \cup (C - K) = K \cup (\overline{C - K})$ . Na podstawie lematu 3 zbiór  $C - K$  jest spójny, a więc  $\overline{C - K}$  jest właściwym podcontinuum *continuum*  $C$ , co daje sprzeczność z nierozkładalnością *continuum*  $C$ .

Z twierdzenia Janiszewskiego wynika w prosty sposób wniosek, iż *continuum* nierozkładalne nie jest lokalnie spójne w żadnym punkcie. Przypomnijmy, że twierdzenia charakteryzacyjne (łuku oraz sfery) podane przez Janiszewskiego (por. § 3) jako jeden z warunków zawierały właśnie lokalną spójność. Opuszczając więc własność lokalnej spójności trzeba na nowo przemyśleć charakterystykę tych obiektów. Continua nierozkładalne przyniosły w tym zakresie, w dalszym rozwoju, wiele niespodzianek.

Janiszewski i Kuratowski wprowadzają w swojej pracy ważne pojęcie kompozanty  $P(a, C)$  punktu  $a$  w *continuum*  $C$ . Definiują ją następująco:  $P(a, C) = \{c \in C : a \text{ i } c \text{ mogą być połączone w } C \text{ przy pomocy właściwego}$

podcontinuum}. Łatwo widać, że  $P(a, C) = \bigcup K_\alpha$ , gdzie  $K_\alpha$  jest właściwym podcontinuum  $C$  zawierającym punkt  $a$ <sup>46</sup>. Zauważają, że dla dowolnych różnych punktów  $a$  i  $b$  continuum nierozkładalnego  $C$  ich kompozanty albo są rozłączne, albo się pokrywają<sup>47</sup>.

Wykorzystując pojęcie kompozanty dowodzą w inny sposób twierdzenie Mazurkiewicza wraz z podaniem ciekawych własności kompozant:

( $\alpha$ ) jeśli  $a$  jest punktem continuum nierozkładalnego  $C$ , wtedy  $P(a, C)$  jest zbiorem pierwszej kategorii (czyli przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych);

( $\beta$ ) jeśli  $a$  jest punktem continuum nierozkładalnego  $C$ , wtedy  $P(a, C)$  jest zbiorem brzegowym w  $C$ ;

( $\chi$ ) jeśli  $C$  jest continuum nierozkładalnym, to istnieją takie trzy punkty w  $C$ , że  $C$  jest nieprzywiedlne między każdą parą tych punktów<sup>48</sup>.

Z powyższego twierdzenia wynika, że każde nierozkładalne continuum posiada nieprzeliczalnie wiele kompozant oraz, że nieprzywiedlność w przypadku continuum nierozkładalnego ma miejsce między dowolnymi dwoma punktami pewnego nieprzeliczalnego podzbioru. W roku 1927 Mazurkiewicz udowodnił, że każde nierozkładalne continuum posiada zbiór kompozant o mocy takiej jaką ma zbiór liczb rzeczywistych<sup>49</sup>.

Fakty ujęte w warunkach ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\chi$ ) stały się podstawą podania przez Janiszewskiego i Kuratowskiego pięknej charakterystyki continuumów nierozkładalnych:

**Twierdzenie Janiszewskiego-Kuratowskiego.** Następujące warunki są równoważne:

(I) Continuum  $C$  jest nierozkładalne.

(II) Dla dowolnego punktu  $a \in C$  istnieje punkt  $x \in C$  taki, że  $C$  jest nieprzywiedlne między  $a$  oraz  $x$ .

(III) Istnieje punkt  $a \in C$  taki, że  $P(a, C)$  jest zbiorem brzegowym w  $C$ .

(IV) Istnieją trzy punkty w  $C$  takie, że  $C$  jest nieprzywiedlne między każdą parą tych punktów<sup>50</sup>.

W dalszej części pracy pojawia się kolejna charakterystyka continuumów nierozkładalnych przy pomocy kompozant:

**Twierdzenie.** Warunkiem koniecznym i wystarczającym nierozkładalności continuum jest istnienie w tym continuum dwóch rozłącznych kompozant<sup>51</sup>.

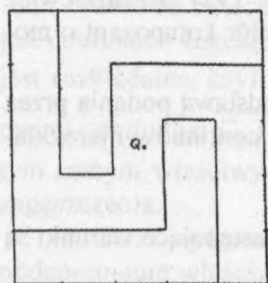
W końcowej części pracy dowodzą, że każda kompozanta jest zbiorem gęstym<sup>52</sup>.

Pragnieniem polskich matematyków było rozstrzygnięcie pytania czy istnieją continua dziedzicznie nierozkładalne. Jak wspominaliśmy, continuum tego rodzaju nie może zawierać łuków, gdyż łuk jest rozkładalny. To pytanie



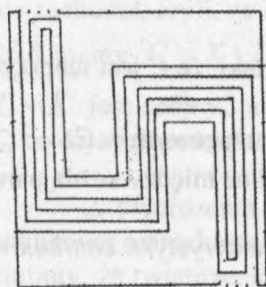
było postawione przez Janiszewskiego i Kuratowskiego w analizowanej powyżej pracy<sup>53</sup>. Taka konstrukcja na pierwszy rzut oka wydaje się niemożliwa, jednak już w 1921 r. Knaster<sup>54</sup> w swojej pracy doktorskiej, pisanej pod kierunkiem Sierpińskiego i Mazurkiewicza, podał po raz pierwszy przykład *continuum* dziedzicznie nierozkładalnego. O trudności tej konstrukcji świadczy fakt, że zajmowała ona ponad dwadzieścia stron z czterdziestostronicowej pracy. Sformułowana przez Janiszewskiego w jednym zdaniu ogólna idea wymagała dziesięciu lat dojrzewania, aż uzyskała formalną, matematyczną postać.

Knaster nazwał technikę zastosowaną w konstrukcji „metodą taśm” (*méthode des bandes*)<sup>55</sup>. Pozwalała ona skonstruować na płaszczyźnie „gniazdowy” ciąg *continuum*ów, w którym „gniazdowość” osiągnięta jest w specjalny sposób. Najpierw, przy pomocy tej techniki, podał konstrukcję nowego zwykłego *continuum* nierozkładalnego, a następnie przez narzucenie dodatkowych warunków skonstruował pierwsze *continuum* dziedzicznie nierozkładalne. Ponieważ każde *continuum* w gniazdowym ciągu przypomina taśmę, nie jest trudno zrozumieć jakie są przyczyny wprowadzenia takiej nazwy.



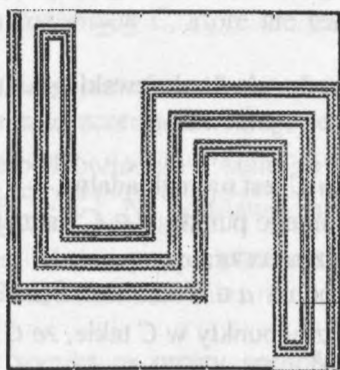
Teraz pokażemy jak otrzymał Knaster przy pomocy swojej metody zwykłe *continuum* nierozkładalne. Najpierw dzieli on kwadrat jednostkowy  $I^2$

a



b

Rys. 13



Rys. 14

na 25 równych kwadratów. W pierwszym etapie tworzymy taśmę  $Q_0$  jako sumę pewnej liczby tych małych kwadratów (rys. 13a). Ważne jest, aby taśma nie przecinała się sama ze sobą i dlatego pojawia się rząd kwadratów rozdzielających konstruowaną taśmę. Następnie wpisujemy w taśmę  $Q_0$  nową taśmę  $Q_1$  (rys. 13b). Kwadraty taśmy  $Q_1$  wybieramy spośród kwadratów powstałych z podziału kwadratu  $I^2$  na  $5^4$  równych kwadratów. W podobny sposób two-

rzymy kolejne *continua* (taśmy)  $Q_{n+1}$  poprzez podział kwadratu  $I^2$  na  $5^{2(n+1)}$  równych kwadratów i wybór odpowiedniej taśmy w istniejącej już taśmie  $Q_n$ .

Poszukiwane *continuum*  $Q$  jest przekrojem wszystkich taśm  $Q_n$ , czyli

$$Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n \text{ (rys. 14). Na podstawie twierdzenia Cantora (por. rozdz. II § 2) } Q$$

jest niepustym *continuum*. W celu udowodnienia nierozkładalności tego *continuum* wykorzystuje Knaster twierdzenie Janiszewskiego.

Przy pomocy metody taśm konstruuje jeszcze inne *continua* nierozkładalne. W późniejszej pracy<sup>56</sup>, wykorzystując tę metodę, podaje konstrukcję będącą uproszczeniem przykładu Brouwera z 1910 r., o którym pisaliśmy w § 3. Uproszczenie polegało na wykorzystaniu zbioru Cantora i łączeniu odpowiednich jego punktów półokręgami.

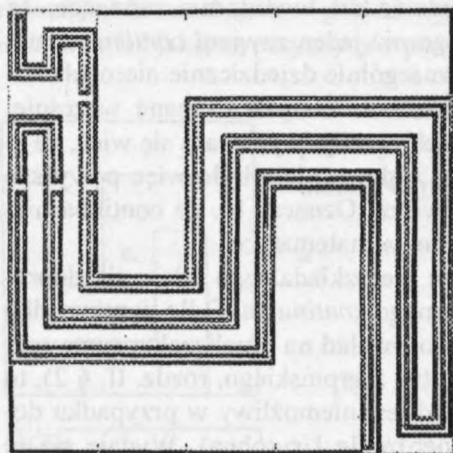
Parę lat później Mazurkiewicz udowodnił twierdzenie mówiące, że każda zwarta przestrzeń wymiaru większego niż jeden zawiera *continuum* nierozkładalne<sup>57</sup>. *Continua* nierozkładalne a szczególnie dziedzicznie nierozkładalne pojawiają się jako ważne przedmioty badań. Wszystkie znane wcześniej geometryczne konstrukcje istotnie się od nich różniły, wydawało się więc, że te *continua* występują bardzo rzadko. Dużym zaskoczeniem było więc powyższe twierdzenie udowodnione przez Mazurkiewicza. Oznacza to, że *continua* nierozkładalne są często występującym obiektem w matematyce.

Zauważmy, że definicja *continuum* nierozkładalnego zdaje się doprowadzać do absurdu własności dotyczące samego *continuum*. O ile w przypadku dowolnego *continuum* nie jest możliwy jego rozkład na przeliczalną sumę rozłącznych właściwych podcontinuuw<sup>58</sup> (por. tw. Sierpińskiego, rozdz. II, § 2), to dla *continuuw* nierozkładalnych taki rozkład jest niemożliwy w przypadku dowolnych właściwych podcontinuuw<sup>59</sup> (twierdzenie Urysohna). Wydaje się to być sprzeczne z samą (ogólną) ideą *continuum* jako takiego bytu, który można dzielić w nieskończoność, otrzymując coraz mniejsze *continua*, z których na każdym etapie można by odtworzyć z powrotem pierwotne *continuum* (i zdaje się potwierdzać wniosek z paradoksu dychotomii Zenona z Elei). W przypadku nierozkładalnych *continuuw* okazuje się, że taki podział (rozkład) jest niemożliwy mimo, iż dane *continuum* nierozkładalne zawiera nieskończenie wiele różnych właściwych niezdegenerowanych podcontinuuw. Arystotelesowi wydawało się, że tylko z punktów (jako elementów dyskretnych) nie można odtworzyć *continuum*, a tutaj okazuje się, że również podcontinua (niezdegenerowane) nie nadają się do tego celu.

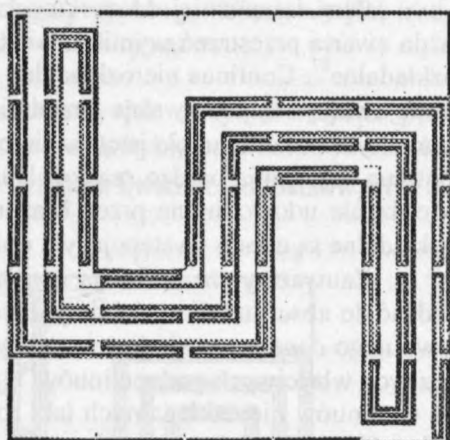
Najważniejsza jest jednak możliwość konstrukcji dziedzicznie nierozkładalnego *continuum*. Przeniesienie własności nierozkładalności na dowolne podcontinua danego *continuum* wydaje się pogłębiać przed chwilą zarysowany problem. Jednak możliwość konstrukcji takiego *continuum* pokazuje, że odtwarzanie całego *continuum* z poszczególnych jego części nie musi mieć wiele

wspólnego z „metodą lokalnego sklejanego poszczególnych kawałków”, lecz jest pewnego rodzaju połączeniem tych wszystkich elementów na raz. Tym samym pojawia się możliwość zachowania filozoficznej rangi (wraz z tym ciągnącym się od starożytności bagażem) pojęcia *continuum*.

Do konstrukcji *continuum* (pierwszego) dziedzicznie nierozkładalnego wykorzystał Knaster również „metodę taśm”. Początek konstrukcji jest taki sam jak w przypadku zwykłego nierozkładalnego *continuum*. Dzielimy kwadrat  $I^2$  na  $5^2$  równych kwadratów i wybieramy  $Q_0$  jak poprzednio. Istotna różnica leży w sposobie wybierania kwadratów w kolejnych wpisywanych taśmach. Wybór musi być tak dokonany, aby zawijanie się taśmy do siebie było dostatecznie szybkie (pokazują to rysunki 15 i 16). I znowu, aby udowodnić dziedziczną nierozkładalność, stosuje do każdego podcontinuum wspomniane twierdzenie Janiszewskiego.



Rys. 15



Rys. 16

W roku 1948<sup>60</sup> E. E. Moise<sup>61</sup> skonstruował płaskie dziedzicznie nierozkładalne *continuum*, o którym udowodnił dwie kluczowe własności:

1. jednorodność oraz
2. homeomorficzność dowolnych niezdegenerowanych podcontinuumów tego *continuum*.

Ta konstrukcja ukazywała negatywną odpowiedź na pytania postawione przez Knastera i Kuratowskiego w 1920 r. (czy każde jednorodne płaskie *continuum* musi być krzywą zwykłą zamkniętą?) oraz przez Mazurkiewicza w 1921 r. (czy każde płaskie *continuum* o tej własności, że jest homeomorficzne z dowolnym swoim niezdegenerowanym podcontinuum, musi być łukiem?). Skonstruowane przez Moise'a *continuum* nie było ani łukiem, ani krzywą zwykłą zamkniętą, a jednak posiadało obie powyższe własności (tak typowe zdawało się odpowiednio dla okręgu i odcinka). Pseudołuk (bo tak nazwał swoje *continuum* Moise) miał więc istotne cechy zarówno odcinka jak i okręgu.

Częściowo jednak pytania postawione przez Knastera i Kuratowskiego oraz Mazurkiewicza okazały się posiadać pozytywną odpowiedź. W 1924 r.<sup>62</sup> Mazurkiewicz udowodnił, że odpowiedź na pytanie Knastera-Kuratowskiego jest pozytywna, jeśli rozpatrywane *continuum* jest lokalnie spójne. Podobnie w roku 1959<sup>63</sup> Henderson pokazał, że dowolne rozkładalne *continuum*, które jest homeomorficzne z każdym swoim niezdegenerowanym podcontinuum, musi być łukiem. Wszystkie „klasyczne” continua takie jak odcinek, okrąg, sfera, graf itd. są lokalnie spójne i rozkładalne. Możliwe kontrprzykłady muszą znajdować się wśród takich continuum, które nie mają tych własności. Taki był właśnie pseudołuk.

W 1948 r. Bing podał inną niż Moise konstrukcję pseudołuku i udowodnił interesującą jego charakteryzację: każde dziedzicznie nierozkładalne *continuum* jest pseudołukiem<sup>64</sup>. Ponadto (jeśli chodzi o częściowo pozytywną odpowiedź na pytanie Knastera-Kuratowskiego), w 1958 Anderson skonstruował *continuum* (nazwane uniwersalną krzywą Menger’a) i pokazał, że ta krzywa oraz krzywa zwykła zamknięta, to jedyne jednorodne i lokalnie spójne krzywe<sup>65</sup>. W charakterystyce podanej przez Andersona zostało wyeliminowane ograniczenie (występujące w pytaniu Knastera-Kuratowskiego i w charakterystyce krzywych zwykłych zamkniętych podanej przez Mazurkiewicza) do krzywych leżących na płaszczyźnie.

Znaczenie tych dwóch powyższych charakterystyk (Binga oraz Andersona) jest znaczne. Pokazują one, że przy pomocy prostych ogólnych warunków można scharakteryzować obiekty posiadające skomplikowaną i nie-intuicyjną strukturę (pseudołuk) oraz, że ogólna charakterystyka pozwala wyróżnić spośród potencjalnie nieskończonej ilości krzywych (o różnorodnej i bardzo bogatej strukturze) dokładnie dwie uprzednio skonstruowane (charakterystyka Andersona). Jest zastanawiające, że matematyka „pozwała” na takie stwierdzenia. Narzędzia matematyki wydają się być zbyt ubogie, aby dokonać takiej selekcji. Dowodzi to jednak, że analizy wewnętrznej struktury matematycznego obiektu (jak proponował Janiszewski) są wystarczające do udowodnienia tak „silnych” faktów. Nie jest konieczne odwoływanie się do przestrzeni zawierającej wszystkie możliwe obiekty. Podobnie fascynującym jest stare twierdzenie (znane już Platonowi), że istnieje tylko pięć regularnych wielościanów (tzw. bryły Platona) – te bryły stanowią w koncepcji Platona podstawowe elementy konstrukcji świata. Powyższe stwierdzenia jak i charakterystyka Andersona są do siebie bardzo podobne – z nieskończonego zbioru możliwości wybierają tylko niewielką ich liczbę. I tylko one są urzeczywistnione.

Konstrukcja pseudołuku przedstawiona przez Moise’a i Binga była oparta na idei „crooked chain” (skręconego łańcucha). Przyjrzyjmy się tej idei jak również samej konstrukcji pseudołuku<sup>66</sup>.

**Łańcuchem**  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  nazywamy skończoną rodzinę zbiorów otwartych  $C_i$  (nazywanych ogniwami łańcucha) o tej własności, że



$C_i \cap C_j \neq \Phi$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|i - j| \leq 1$ , przy czym  $C_i, C_j$  są dowolnymi ogniwami łańcucha  $C$ . Mówimy, że łańcuch  $C$  jest łańcuchem od punktu  $p$  do punktu  $q$ , jeśli  $p \in C_1$  a  $q \in C_n$ . Łańcuch  $D$  nazywamy **wpisanym** w łańcuch  $C$ , jeśli każde ogniwo łańcucha  $D$  jest zawarte w pewnym ogniwie łańcucha  $C$ . Mówimy, że  $D$  jest **prosto wpisany** w łańcuch  $C$ , jeśli dla każdego ogniewa  $c$  z  $C$  zbiór tych wszystkich ogniw z  $D$ , które leżą w  $c$  tworzy podłańcuch łańcucha  $D$ .

Rozważmy łańcuch  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  od punktu  $p$  do punktu  $q$ . Pojęcie „crooked” definiujemy następująco:

1. dla  $n \geq 4$  łańcuch  $D$  od punktu  $p$  do  $q$  nazywa się „very crooked” (mocno skreconym) ze względu na łańcuch  $C$ , jeśli  $D$  jest prosto wpisany w  $C$ ;
2. dla  $n \geq 5$  łańcuch  $D$  jest „very crooked” (mocno skrecony) ze względu na  $C$ , jeśli  $D$  jest wpisany w łańcuch  $C$  oraz  $D$  jest sumą:
  - a) łańcucha od punktu  $p$  do punktu  $x \in C_{n-1}$ ;
  - b) łańcucha od punktu  $x$  do punktu  $y \in C_2$ ;
  - c) łańcucha od punktu  $y$  do punktu  $q$ .

Każdy z tych łańcuchów (odpowiednio z punktów a), b) i c)) jest mocno skrecony względem  $C - \{C_n\}$ ,  $C - \{C_1, C_n\}$ ,  $C - \{C_1\}$ . Ponadto, oprócz ogniw końcowych łańcuchy te nie przecinają się.

Widać podobieństwo powyższej konstrukcji do „metody taśm” Knastera, która polegała na odpowiednio mocnym zwijaniu tych taśm. Moise spodziewał się, że przeprowadzona przez niego konstrukcja daje zbiór homeomorficzny ze zbiorem skonstruowanym przez Knastera, chociaż tego nie udowodnił<sup>67</sup>.

Rozpatrzmy teraz nieskończony ciąg łańcuchów  $C^1, C^2, \dots$  od punktu  $p$  do punktu  $q$  o następujących własnościach:

1.  $C^1$  zawiera pięć ogniw;
2. jeśli  $C$  jest ogniwem łańcucha  $C^i$  a  $X$  jest maksymalnym podłańcuchem łańcucha  $C^{i+1}$  wpisanym całkowicie w ogniwo  $C$ , wtedy  $X$  składa się z pięciu ogniw;
3. dla każdego  $i$ , każde ogniwo łańcucha  $C^i$  ma średnicę mniejszą niż  $\frac{1}{i}$ ;
4. zbiór  $C_*^1 = \bigcup_j C_j^1$  jest zwartą przestrzenią;
5. dla każdego  $i$ , łańcuch  $C^{i+1}$  jest mocno skrecony ze względu na łańcuch  $C^i$  oraz  $C_*^{i+1}$  jest całkowicie zawarty we wnętrzu  $C_*^i$ .

Definiujemy teraz pseudoluk  $M$  jako przekrój wszystkich zbiorów  $C_*^i$ , czyli  $M = \bigcap_i C_*^i$ .

Moise dowodzi o skonstruowanym przez siebie zbiorze, że jest dziedzicznie nierozkładalny oraz, że dowolne zbiory spełniające warunki powyższej definicji są homeomorficzne<sup>68</sup>.

Trzy lata później, w roku 1951 Bing udowodnił kolejne twierdzenie charakteryzacyjne: dowolne continua dziedzicznie nierozkładalne i łańcuchowe są homeomorficzne. Pojęcie *continuum* łańcuchowego lub węzowego (chainable, snake-like) wprowadził Bing<sup>69</sup> dostrzegając najpierw, że tę własność posiada pseudołuk. *Continuum* nazywa się łańcuchowe, jeśli można je pokryć  $\varepsilon$ -łańcuchem<sup>70</sup>, dla dowolnego  $\varepsilon$ . Z twierdzenia charakteryzacyjnego Binga wynika, że continua skonstruowane przez niego i Moise'a jak i przez Knastera są homeomorficzne ze sobą (węzowość wynika z samej konstrukcji).

Powyższe twierdzenie charakteryzacyjne Binga mogłyby sugerować, że dziedzicznie nierozkładalne continua są bardzo rzadko spotykane. Tej intuicji całkowicie przeczą kolejne dwa twierdzenia udowodnione przez Binga w innej pracy z roku 1951.

**Twierdzenie BI.** Niech  $S$  będzie przestrzenią euklidesową  $E^n$  ( $n \geq 2$ ) lub przestrzenią Hilberta. Wtedy w przestrzeni wszystkich podcontinuów przestrzeni  $S$  (z metryką Hausdorffa) podzbiór pseudołuków jest zbiorem  $G_\delta$  gęstym<sup>71</sup>.

**Twierdzenie BII.** Moc zbioru niehomeomorficznych płaskich dziedzicznie nierozkładalnych continuów jest równa mocy wszystkich liczb rzeczywistych<sup>72</sup>.

Te twierdzenia świadczą, że dziedziczna nierozkładalność jest bardzo powszechną cechą wśród continuów. Ponadto, continua dziedzicznie nierozkładalne (a szczególnie pseudołuk) pokazują, że obiekty matematyczne są w stanie przyjąć wiele własności nie do pogodzenia z intuicyjnym punktu widzenia.

## 6. Continuum jako absolut poznawczy

Przyjrzymy się teraz w jaki sposób *continuum*, co znalazło wyraz w powstaniu i rozwoju teorii continuów, zaczęło pełnić rolę absolutu poznawczego.

Pojawienie się danych obiektów w matematyce jest albo wynikiem konstrukcji, albo ma miejsce poprzez definicję, albo wreszcie dokonuje się dzięki intuicji. W zależności od tego jaką rangę przypisuje się tym poszczególnym źródłom otrzymujemy różne filozofie matematyki. Przedstawione poprzednio analizy pokazują, że ontologiczny status obiektów matematycznych określony jest przez ogólne własności, które ten obiekt charakteryzują. Dzięki rozpatrywaniu obiektów w ich optymalnej ogólności jest możliwe rozszerzenie zakresu badanego problemu z jednoczesnym utrzymaniem dokładności i precyzji –

ogólne warunki jednoznacznie wskazują istniejące obiekty. To badanie obiektów poprzez analizę ich wewnętrznej struktury prowadzi więc do ogólnej charakterystyki, która odsłania ich istotę.

Te analizy pokazują w końcu możliwość przeprowadzenia konstrukcji dalszych obiektów, w oparciu o odkrytą metodę, posiadających bardziej skomplikowaną strukturę i których natura jest przeważnie niedostępna dla pierwotnej intuicji. W analizie wewnętrznej struktury obiektów matematycznych tkwi więc metoda generowania nowych obiektów. „Metoda taśm” Knastera umożliwiła konstrukcję pierwszego dziedzicznie nierozkładalnego *continuum* – dopiero ta konstrukcja, przekraczając zasadniczo możliwości pierwotnej intuicji, pokazuje, że matematyk nie jest właściwie twórcą tego typu obiektów, lecz są one produktem samej matematyki i jej wewnętrznej struktury.

Znaczenie matematycznych bytów nie wyczerpuje się w ich intuicyjnym rozumieniu, ani w matematycznej definicji. Przykład powstania pojęcia *continuum* nierozkładalnego pokazuje, że to właśnie sens jest pierwotny tzn. znaczenie tego obiektu leży nie tylko w jego ściśle matematycznej strukturze, ale przede wszystkim w powiązaniu z ogólno-filozoficznym sensem (na poziomie „wewnętrznej struktury” obiektu istnieje powiązanie z zagadnieniami filozoficznymi). Nie można więc wypreparować matematyki ze znaczeń i odniesień filozoficznych. Przyjrzyjmy się temu dokładniej.

Dlaczego dążono do skonstruowania dziedzicznie nierozkładalnego *continuum*, które domagało się odejścia od pierwotnie ukształtowanej intuicji i generowało wiele paradoksalnych sytuacji? Gdyż starano się obronić filozoficzną rangę i sens pojęcia *continuum* znanego już od starożytności, a zagrożonego pojawieniem się *continuu*ów nierozkładalnych (również dążenie przez Cantora czy Janiszewskiego do znalezienia topologicznego kryterium rozróżniającego linie od płaszczyzn, mimo napotykania na różnorakie sprzeczności, miało tę samą motywację – obronienia pierwotnych intuicji dotyczących rozumienia linii i płaszczyzny). Twierdzenie mówiące, że nie można wysumować *continuum* nierozkładalnego nawet przeliczalną ilością jego właściwych pod-*continuu*ów pokazuje, że niemożliwe jest odtworzenie z poszczególnych kawałków całego *continuum*, przy pomocy jakiegoś „sumowania” czy „lepienia”. Konstrukcja *continuum* dziedzicznie nierozkładalnego mówi, że żadne pod-*continuum* takiego *continuum* również tej własności nie posiada. Na dodatek twierdzenia Binga (twierdzenie BI i BII) stwierdzają, że taka sytuacja jest powszechna wśród *continuu*ów. Te wszystkie *continua* (poczynając od *continuum* Brouwera a kończąc na *continuum* Knastera-Moise’a) są jednak otrzymywane przy pomocy konstrukcji z istniejących geometrycznych obiektów. Metoda konstrukcji pokazuje więc jak odtworzyć czy wytworzyć obiekt przy pomocy innych posiadanych elementów.

Wybieramy na początku pewien obiekt (np. prostokąt) i poprzez odpowiednie wycinanie prowadzone rekurencyjnie otrzymujemy żadaną konstrukcję. Prowadzony nieskończony proces wycinania zdaje się całkowicie niszczyć

strukturę *continuum*, a jednak to co pozostaje okazuje się mieć bardzo bogatą strukturę, pełną niespodziewanych własności. A przede wszystkim ten proces może w pełni zachować samą strukturę *continuum*. *Continuum* okazuje się być niezmiennikiem tego typu operacji a to, że zostaje zachowane (w tak zdawałoby się beznadziejnych sytuacjach) sprawia, iż własności odkrywane w nowo otrzymanych obiektach można traktować jako wygenerowane przez samo *continuum*. Daje to możliwość przypisania *continuum* rangi absolutu poznawczego. Zauważyliśmy, pod koniec rozdziału piątego, że w nowej wizji nauki uniwersalnej „niezmiennik” oraz „całokształt” stają się absolutami poznawczymi. Stosując schematy poznawcze związane z tymi absolutami otrzymujemy nowe byty. Jednym z tych bytów okazało się *continuum* topologiczne (a w szczególności *continuum* nierozkładalne). Już początkowy rozwój tej teorii, jak zobaczyliśmy w paragrafie 5 tego rozdziału, pokazał w jak dużej mierze to pojęcie realizuje cechy nowego absolutu poznawczego:

Wiele pojęć, między innymi pojęcia ciągłości, spójności, zwartości, otwartości, zostały utworzone, aby móc wprowadzić do matematyki pojęcie *continuum*. Intuicyjno-filozoficzne rozumienie tego pojęcia wyznaczało kierunek prowadzonych analiz i badań. Jak pisaliśmy w paragrafie 4 rozdziału 5 Bolzano prowadził swoje badania, aby zdefiniować geometryczną rozciągłość i *continuum*, czyli pragnął włączyć je w struktury matematyki. Problem (tzw. geometryczny problem Bolzano) okazał się bardzo trudny i wymagał stworzenia i rozwoju wielu nowych teorii i struktur matematycznych (m.in. topologicznego pojęcia wymiaru). Również Dedekind szukał odpowiedniości między prostą geometryczną a liczbami wymiernymi, bo chciał zrealizować wśród liczb strukturę *continuum*. Pragnienie skonstruowania *continuum* arytmetycznego doprowadziło go do opracowania „narzędzia” w postaci liczb obejmujących oprócz liczb wymiernych nowe liczby niewymierne. Natomiast Riemann, jak pisaliśmy w poprzednim rozdziale, próbuje określić logiczne związki między geometrią rozumianą jako czysta matematyka a jej zastosowaniami do przestrzeni fizycznej. Chodzi mu o skonstruowanie pojęcia wielkości wielokrotnie rozciągłej przy pomocy ogólnych pojęć wielkości. Cóż natomiast legło u podstaw drogi Cantora, która doprowadziła go do zdefiniowania liczb rzeczywistych, wprowadzenia pojęć otwartości, punktu skupienia i *continuum*? Chodziło o wyrażenie językiem matematycznym charakteryzującego się ciągłością procesu fizycznego, jakim jest przepływ ciepła. Jak pisaliśmy zaczęło się wszystko od hipotezy Fouriera mówiącej, że taki opis jest możliwy przy pomocy szeregów trygonometrycznych. Sam Fourier podał postać współczynników rozwinięcia dowolnej funkcji (ciągłej) opisującej przepływ ciepła i rozpoczął się trudny proces badania jednoznaczności przedstawień funkcji ciągłych przy pomocy szeregów trygonometrycznych, w którym wzięło udział wielu wybitnych matematyków. Oczywiście, oprócz tych wskazanych powyżej, istniały jeszcze inne motywacje, jednak myślę, że podstawową była próba uchwycenia przez matematykę problemu rozciągłości pojawiającego się pod różnymi postaciami.



Zasadniczym problemem jest możliwość rekonstrukcji czy odtwarzania danego bytu z jego elementów składowych. Twierdzenie Uryshona (żadne *continuum* nierozkładalne nie może być przedstawione jako przeliczalna suma swoich właściwych podcontinuuów) mówi, że taka rekonstrukcja nie jest możliwa, gdy części składowe rozumiemy w oderwaniu od metody konstrukcji. Elementami składowymi nadającymi się do rekonstrukcji całego obiektu są bowiem te byty, które są kolejnymi etapami konstrukcji. Sama konstrukcja ukazuje jak ten proces tworzenia (czy odtwarzania) ma wyglądać. W przypadku continuumów nierozkładalnych jest to pewien nieskończony proces, w którym z continuumów rozkładalnych otrzymujemy w granicy *continuum* nierozkładalne. Własności składowe tego procesu konstrukcji nie przenoszą się w całości na graniczny konstruowany obiekt. Jednak własności, które się zachowują wskazują na istotne cechy badanego obiektu.

Nie możemy zapominać więc sensu pojęcia zachowując jedynie jego zakres, jak chciałaby zasada ekstensjonalności. Według René Thoma to uwolnienie się (od czasów Georga Boola) logiki od założeń ontologicznych było pyrrusowym zwycięstwem<sup>73</sup>. Logika matematyczna (Boola) nie odpowiada w pełni rzeczywistym zasadom myślenia. Przedstawione poprzednio konstrukcje continuumów nierozkładalnych pokazują, że bez uwzględnienia całego procesu konstrukcji, metod konstrukcyjnych oraz sensu filozoficznego związanego z konstruowanym obiektem, sama poprawność logiczna nie jest w stanie przynieść spodziewanych rezultatów. Szczególnie w przypadku topologii geometrycznej widoczne jest, że ciągle trzeba odwoływać się do rozumienia (geometrycznego, filozoficznego itp.), aby dostrzec możliwości tkwiące w różnego rodzaju konstrukcjach – sam zakres ustalony przez definicje nie wystarczy. Dopiero intuicyjne interpretacje dostarczają właściwych motywacji przy wprowadzaniu różnych struktur<sup>74</sup>.

Thom proponuje, aby skierować się ku „logice *continuum*” (z zachowaniem pozytywnej konsekwencji zasady ekstensjonalności – jest nią posługiwanie się obiektami przestrzennymi przy pomocy rozumowania kombinatorycznego). Widzieliśmy, że w przypadku przeprowadzanych konstrukcji continuumów nierozkładalnych, warunki brzegowe (początkowe własności) nie wystarczą, aby określić konstruowane pojęcie. Kluczowe jest „wnętrze” pojęcia, czyli te niespodziewane własności „ukryte” w skonstruowanym obiekcie. Według Thoma mylą się formaliści, gdy próbują w oparciu o niezmienniczość formy znaku drukarskiego wyjaśnić stabilność znaczenia. „Wprost przeciwnie, każde pojęcie jest jak żywa istota, która broni swego organizmu (zajmowanej przez siebie przestrzeni) przed agresją otoczenia, w danym przypadku przed ekspansją pojęć sąsiednich, wyznaczających jego granice w przestrzeni subtracie”<sup>75</sup>. Czy nie jest tak, że prostokąt (jako pewne *continuum*) po skonstruowaniu w nim *continuum* nierozkładalnego odkrył w sobie (przyjął) nowe własności związane z nowo ujawnionymi własnościami continuumów. Okazało się, że *continuum* nierozkładalne Brouwera oraz prostokąt należą do tej samej rodziny (continuuów),

mimo posiadania całkowicie zdawałoby się odmiennych własności. Zostaje jednak podkreślona tym samym wartość ich wspólnych cech – a są to własności definiujące *continuum* topologiczne (spójność i zwartość) oraz nowa pogłębiona charakterystyka filozoficzna. Zostają więc zachowane pewne niezmiennicze cechy, przy jednoczesnym odkrywaniu całego bogactwa nowych własności – to sprawia, że myśl może odzwierciedlać różnorodność świata zjawisk zachowując swoją stabilność.

Czy możemy wobec tego przyjąć *continuum* jako absolut poznawczy, czyli jako byt, którego cechy leżą u podstaw różnorodnych matematycznych rozumowań prowadzących do nowych ważnych konstrukcji? Konkretnie realizacje *continuum* (np. przekroje Dedekinda czy uzupełnianie liczb wymiernych Cantora) opierają się przecież o pojęcia przeliczalne (dyskretnie). Czy więc żądanie od struktury *continuum* wyjaśniania dyskretności nie jest wpadnięciem w pułapkę błędnego koła?

Należy jednak przypomnieć, że nowe liczby (niewymierne), które otrzymuje Cantor nie mają rzeczywiście, według niego, sensu same w sobie. Są zależne od zdefiniowanych wcześniej ciągów. Późniejszy wysiłek Cantora jest skierowany ku nadaniu im statusu bytów samych w sobie. W tym celu identyfikuje nowe liczby z punktami geometrycznego *continuum* (każdemu punktowi na prostej odpowiada dokładnie jedna liczba). W ten sposób doprowadza do tego, że prosta geometryczna jest zanurzalna w klasie nowo otrzymanych liczb. Konieczne jest również przyporządkowanie odwrotne i w tym celu wprowadza Cantor regulujący tę kwestię aksjomat – dla każdej liczby istnieje określony punkt na prostej, którego współrzędna jest równa temu punktowi. Poszukiwanie uzasadnienia dla tego aksjomatu naprowadza go na konieczność wprowadzenia pojęcia punktu skupienia, zbioru doskonałego i w konsekwencji ogólnego pojęcia *continuum*. To właśnie *continuum* staje się podstawowym narzędziem wyjaśniającym znaczenie innych matematycznych struktur (por. rozdz. 5 § 7).

Myślę więc, że słuszna jest idea René Thoma, iż można wykorzystywać struktury matematyczne w badaniu matematyki<sup>76</sup>. Pojawia się rodzaj hermeneutycznego koła:

1. Określenie podstaw matematyki – podstawowe pojęcia, struktury itp.;
2. Budowa teorii matematycznych w oparciu o te podstawowe byty;
3. Badanie języka matematyki – poszukiwanie ogólnych struktur językowych w matematyce i ich znaczenie dla przebiegu różnych procesów myślowych;
4. Wykorzystywanie danych obiektów matematycznych do wyjaśniania różnych obszarów problemowych – w innych dziedzinach wiedzy, w filozofii i również w odniesieniu do samych podstaw matematyki.

To wyjaśnianie przez matematykę różnorodnych zagadnień, w tym jej własnych podstaw dowodzi, że jest rzeczywiście nauką uniwersalną, niezależną od sytuacji socjologiczno-historycznej<sup>77</sup>. Znajdowanie w niej obiektów, tego typu jak np. *continuum*, może mieć ogromne znaczenie epistemologiczne – są to obiekty wewnętrzne matematyki, których znaczenia nie można jednak zamknąć

całkowicie w ramach struktur matematyki. Mają więc szansę być skuteczne również poza matematyką np. do opisu zjawisk przyrody czy wyjaśniania różnych kwestii filozoficznych.

## Przypisy:

<sup>1</sup> Z. Janiszewski, *Zagadnienia filozoficzne matematyki*, „Poradnik dla samouków”, T. 1, Warszawa 1915, s. 463-4.

<sup>2</sup> Tamże, s. 467.

<sup>3</sup> Tamże, s. 484-5.

<sup>4</sup> Tamże, s. 487.

<sup>5</sup> Z. Janiszewski, *Zakończenie*, „Poradnik dla samouków”, T. 1, Warszawa 1915, s. 538-543.

<sup>6</sup> Z. Janiszewski, *Logistyka*, „Poradnik dla samouków”, T. 1, Warszawa 1915, s. 449-461.

<sup>7</sup> C. Jordan, *Cours d'Analyse*, T. 1 Paryż 1883.

<sup>8</sup> A. Schoenflies, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen, I*, „Math. Ann.”, 58 (1904), s. 195-238.

<sup>9</sup> Tamże, s. 197.

<sup>10</sup> W. H. Young i G. C. Young, *The theory of sets of points*, Cambridge 1906 s. 204.

<sup>11</sup> N. J. Lennes, *Curves in non-metrical analysis situs*, „Bull. Amer. Math. Soc.” 12 (1905-6) s. 284.

<sup>12</sup> F. Riesz, *Die Genesis des Raumbegriffes*, „Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn” 24 (1907) s. 309-353.

<sup>13</sup> B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague 1817 s. 53.

<sup>14</sup> W rozumowaniu Zenona, aby dojść z punktu  $a$  do  $b$  trzeba najpierw dojść do punktu  $a_1$ , który znajduje się w połowie odległości między  $a$  i  $b$ . Jednak, aby dojść do punktu  $a_1$  trzeba znów dojść do punktu  $a_2$  znajdującego się w połowie odległości między  $a$  i  $a_1$ ; i tak dalej. Z punktu widzenia pokonywanej drogi dojście do kolejnych punktów wydaje się niemożliwe; jednak z punktu widzenia tej drogi, którą trzeba jeszcze pokonać ten problem nie istnieje.

<sup>15</sup> L. E. J. Brouwer, *Over der grondslagen der wiskunde* (praca doktorska); Tłum. angielskie: A. Heyting (wyd.), *Collected Works*, t. 1, *Philosophy and Foundation of Mathematics*, Amsterdam 1976 s. 17.

<sup>16</sup> L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, „Math. Annalen” 68 (1910) s. 422-434.

<sup>17</sup> Tamże, s. 422.

<sup>18</sup> Tamże, s. 434.

<sup>19</sup> *Jedem Punkte der Grenze eines schwarzen Gebietes kommt nach genügender Fortsetzung des Verfahrens das rote Gebiet beliebig nahe, und jedem Punkte der Grenze des roten Gebietes kommen schließlich die schwarzen Gebiete beliebig nahe, während durch die volle Grenze  $K$  des roten Gebietes „rot” und „schwarz” völlig voneinander getrennt werden* (tamże, s. 424). „Obszar czerwony” (rot Gebiet), o którym pisze Brouwer, to nasz obszar  $D$ , natomiast „obszary czarne” (schwarzen Gebietes), to zbiory  $R_n$ .

<sup>20</sup> Podzbiór  $A \subset X$  jest nigdziegęsty w  $X$ , jeśli  $\overline{X} = \overline{X - A}$ .

<sup>21</sup> *Die Komplementärmenge von  $K$  enthält nur zwei Gebiete, nämlich das rote, und das den schwarzen und dem äußeren Gebiete des Hauptrechteckes zusammengesetzte Ge-*



biet;  $K$  ist gemeinsame Grenze dieser beiden Gebiete, also eine geschlossene Kurve (tamże, s. 424).

<sup>22</sup> Tamże, s. 426-427.

<sup>23</sup> Z. Janiszewski, *Zagadnienia filozoficzne matematyki*, „Poradnik dla samouków”, T. 1, Warszawa 1915, p. 466.

<sup>24</sup> Z. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*. These, Paris, Gauthier-Villars, 1911.

<sup>25</sup> Z. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*. These, Paris, Gauthier-Villars, 1911, p. 53.

<sup>26</sup> *Continuum* jest nierozkładalne, jeśli istnieją w nim trzy punkty takie, że *continuum* to jest nieprzyprowadne między każdą parą tych punktów

<sup>27</sup> Z. Janiszewski, *O rozcinaniu płaszczyzny przez continua*, „Prace Matematyczno-Fizyczne” 26 (1913).

<sup>28</sup> Tamże, s. 48.

<sup>29</sup> Tamże, s. 55.

<sup>30</sup> Punkt  $x$  jest punktem rozspajającym przestrzeni  $X$ , jeśli  $X - \{x\}$  jest przestrzenią niespójną.

<sup>31</sup> B. Knaster and K. Kuratowski, *Probleme 2*, „Fund. Math.” 1 (1920), p. 223.

<sup>32</sup> S. Mazurkiewicz, *Problem 14*, „Fund. Math.” 2, (1921), s. 286.

<sup>33</sup> B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu indécomposable*, „Fund. Math.” 3 (1922), p. 247-286.

<sup>34</sup> E. E. Moise, *An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinuum*, „Trans. Amer. Math. Soc.” 63 (1948), p. 581-594.

<sup>35</sup> R. H. Bing, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, „Duke Math. J.” 15 (1948), p. 729-742.

<sup>36</sup> Z. Janiszewski, *Über die Begriffe „Linie” und „Fläche”*, International Congress of Mathematicians, Cambridge, August 1912.

<sup>37</sup> Tamże, s. 126.

<sup>38</sup> Tamże, s. 127.

<sup>39</sup> *Man könnte nämlich meinen dass ein Continuum eine Fläche ist, wenn es mit jeder es schneidenden Ebene, die einer gegebenen Ebene parallel ist, eine Linie gemein hat* (dz. cyt. s. 127).

<sup>40</sup> Zbiór  $\beta$  jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

<sup>41</sup> Z. Janiszewski, *Über die Begriffe „Linie” und „Fläche”*, International Congress of Mathematicians, Cambridge, August 1912 s. 128.

<sup>42</sup> K. Yoneyama, *Theory of Continuous Sets of Points*, „The Tohoku Mathematical Journal” 12 (1917), s. 43-158.

<sup>43</sup> We wszystkich poniżej sformułowanych twierdzeniach (oprócz twierdzenia Janiszewskiego) zakłada się o przestrzeni, że jest metryczna.

<sup>44</sup> S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables*, „Fund. Math.” 1 (1920) s. 38.

<sup>45</sup> Z. Janiszewski, K. Kuratowski, *„Sur les continus indécomposables*, „Fund. Math.” 1 (1920) s. 212.

<sup>46</sup> Tamże, s. 215.

<sup>47</sup> Tamże s. 217-218.

<sup>48</sup> Tamże, s. 215.

- <sup>49</sup> S. Mazurkiewicz, *Sur les continus indecomposables*, „Fund. Math.” 10 (1927), s. 305-310.
- <sup>50</sup> Janiszewski, Kuratowski, dz. cyt., s. 215.
- <sup>51</sup> Tamże, s. 219.
- <sup>52</sup> Tamże, s. 221.
- <sup>53</sup> Tamże, s. 223.
- <sup>54</sup> B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est Indécomposable*, „Fund. Math.” 3 (1922) s. 247-286.
- <sup>55</sup> Tamże, s. 248.
- <sup>56</sup> K. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*, „Fund. Math.” 3 (1922), s. 216.
- <sup>57</sup> S. Mazurkiewicz, *Sur l'existence des continus indécomposables*, „Fund. Math.” 25 (1935), s. 327-328.
- <sup>58</sup> W. Sierpiński, *Pewne twierdzenie o kontynuach*, „Wiadomości Matematyczne” T. XXIII, z. 4, s. 181-189.
- <sup>59</sup> P. Urysohn, *Memoire sur les multiplicites cantorienne*, „Fund. Math.” 8 (1926), s. 243.
- <sup>60</sup> E. E. Moise, *An indecomposable Plane Continuum which is Homeomorphic to each of its Non-degenerate Sub-Continua*, „Trans. Am. Math. Soc.” 63 (1948), s. 581-594.
- <sup>61</sup> Moise był uczniem R. L. Moore'a – jednego z twórców amerykańskiej szkoły topologicznej.
- <sup>62</sup> S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogenes*, „Fund. Math.” 5 (1924), p. 137-146.
- <sup>63</sup> G. W. Henderson, *Proof that every Compact Decomposable Continuum which is Topologically Equivalent to each of its Non-Degenerate Subcontinua is an Arc*, „Ann. Of Math.” 72 (1960), s. 421-428.
- <sup>64</sup> R. H. Bing, *A Homogeneous Indecomposable Plane Continuum*, „Duke Math. J.” 15 (1948), s. 729-742.
- <sup>65</sup> R. D. Anderson, *A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity*, „Ann. of Math.” (2) 67 (1958), p. 313-324.
- <sup>66</sup> E. E. Moise, *An indecomposable Plane Continuum which is Homeomorphic to each of its Non-degenerate Sub-Continua*, „Trans. Am. Math. Soc.” 63 (1948), s. 581-583.
- <sup>67</sup> Tamże, s. 581.
- <sup>68</sup> Tamże, s. 585.
- <sup>69</sup> R. H. Bing, *Snake-like Continua*, „Duke Math. J.” 18 (1951) s. 653.
- <sup>70</sup>  $\varepsilon$ -łańcuch jest łańcuch, dla którego maksymalna średnica ogniw wynosi  $\varepsilon$ .
- <sup>71</sup> R. H. Bing, *Concerning Hereditarily Indecomposable Continua*, „Pac. J. Math.” 1 (1951) s. 46.
- <sup>72</sup> Tamże, s. 50.
- <sup>73</sup> R. Thom, *Czy możliwa jest matematyka continuum*, „Wiadomości Matematyczne” XXIV 1, 1982 s. 17.
- <sup>74</sup> Tamże, s. 18.
- <sup>75</sup> Tamże, s. 19.
- <sup>76</sup> Tamże, s. 20.
- <sup>77</sup> Tamże, s. 21.



## Rozdział VII

### Znaczenie powstania teorii continuów dla filozofii i historii matematyki

#### 1. Nowe kryterium prawdy

Jakie jest znaczenie konstrukcji continuów nierozkładalnych i dziedzicznie nierozkładalnych oraz ich własności zarówno dla matematyki jak i dla historii-filozofii matematyki. Na pierwszą część pytania częściowa odpowiedź została udzielona w poprzednim rozdziale – dla pełniejszego wyjaśnienia tej kwestii należałoby przedstawić dalszy rozwój teorii continuów. W tym paragrafie chciałbym skoncentrować się jedynie na drugiej części postawionego pytania i zobaczyć wpływ dokonanych w matematyce odkryć na możliwość pełniejszego zrozumienia przedstawionych w rozdziale III faktów filozoficznych. Cóż więc daje powstanie topologicznego pojęcia *continuum*, a szczególnie pojawienie się konstrukcji continuów nierozkładalnych i dziedzicznie nierozkładalnych, dla głębszego zrozumienia tych faktów. Spójrzmy teraz na nie po kolei przez pryzmat tej matematycznej struktury.

**FF1.** *Odsłonięcie racjonalnej struktury bytu poprzez demaskowanie fałszywych mniemań i pozorów wiedzy.*

Własności związane z continuami nierozkładalnymi wydawały się na początku paradoksalne i sprzeczne. Jednak takie continua rzeczywiście zostały skonstruowane i nie można odmówić im realności. Nastąpiło więc zdemaskowanie fałszywych wcześniejszych mniemań. Otrzymane konstrukcje pozwalały na dostrzeżenie istotnych cech *continuum*. *Continuum* nierozkładalne pojawiło się jako efekt prób podania poprawnych i niesprzecznych definicji takich pojęć jak linia oraz powierzchnia, i było kontrprzykładem do formułowanych wówczas twierdzeń opisujących własności tych obiektów geometrycznych.

**FF2.** *Wiedza przybliżająca do prawdy ma strukturę cyrkularną a nie liniową. Prawda dana jest już na początku, lecz umysł ludzki nie jest w stanie od razu ujrzeć ją w pełnym świetle.*



W momencie rozpoczynania procesu włączania *continuum* do matematyki istniało już jego intuicyjne rozumienie, które nie zostało w późniejszym okresie odrzucone, lecz uzyskało pełniejszy wymiar. Było to jakby powtórne spojrzenie na ten sam byt, teraz jednak poprzez struktury matematyki (wcześniej poprzez aparat filozofii oraz potocznej wiedzy).

**FF3.** *Tylko poprzez wejście w bezpośrednią relację z rzeczywistością myśl uzyskuje podstawę swojego istnienia oraz ostateczny argument za jej możliwościami i siłami poznawczymi – jest to prawda jako bezpośrednia relacja styczności z rzeczami.*

Dopiero badania skonstruowanych *continuum* pozwoliły dostrzec własności, które wcześniej wydawały się niemożliwe i sprzeczne. Istotne są te wspólne własności, które pojawiają się pomiędzy metodą konstrukcji a skonstruowanym obiektem – a nie pomiędzy poszczególnymi etapami konstrukcji. To tak jakby myśl i rzeczywistość miały część wspólną – to, co decyduje o możliwości wypowiadania prawdziwych (czyli zgodnych z rzeczywistością) zdań.

**FF4.** *W celu uwolnienia się od sprzeczności przy poznawaniu rzeczywistości należy posługiwać się „minimalnymi” symbolami tzn. takimi, które są już abstrakcyjne, lecz zachowują zarazem konieczne minimum treści związanej z opisywaną rzeczywistością. Pojęcia matematyczne są przykładem takich minimalnych symboli.*

Przykłady podawane przez Brouwera, Janiszewskiego, Knastera itd. miały na celu skonstruowanie obiektów danego rodzaju (krzywe, powierzchnie) nie posiadających cech, które wcześniej były traktowane jako istotne cechy tych obiektów. W ten sposób pozostały tylko te cechy, które w optymalny sposób charakteryzowały odpowiednie obiekty. Tak „odchudzony” obiekt mógł łączyć ponadto wiele własności, które zdawały się być wcześniej nie do pogodzenia (jak w przypadku pseudoluku jednorodność z własnością bycia homeomorficznym z każdym swoim podcontinuum). Skonstruowane *continua* stały się przykładami „minimalnych symboli”.

**FF5.** *Odnalezienie w sobie przez cogito idei nieskończonego i w pełni doskonałego bytu, rzeczywiście istniejącego poza cogito. Samo cogito staje się podstawą i „generatorem” obiektywnej wiedzy o realnie istniejącym świecie.*

Analizowane przez nas metody konstrukcji *continuum* nierozkładalnych pokazywały, że własności skonstruowanego *continuum* nie zawierają się do końca ani w tych metodach konstrukcji, ani w obiektach będących kolejnymi

etapami przeprowadzanej konstrukcji. Otrzymany obiekt posiada własności całkiem nowe, nie znane uprzednio.

**FF6.** *Ponieważ w człowieku spotykają się dwie nieskończoności: głębi oraz całości, więc pojęciom, które są całkowicie przejrzyste dla umysłu można przypisać pewne symbole i poprzez formalne operacje na nich dojść do pełnej wiedzy o świecie.*

Wewnętrzna nieskończoność okazała się centralną cechą nowo skonstruowanych continuów. Wychodząc od znanego obiektu geometrycznego, przy pomocy pewnych metod konstrukcyjnych można dotrzeć „w głąb” tego obiektu poznając jego ukryte cechy, których odkrycie staje się kluczowe dla wyjaśnienia wielu problemów z różnych obszarów wiedzy.

**FF7.** *Konieczność uzupełnienia zbioru przedmiotów doświadczenia o idee będące wyłącznie wytworem czystego rozumu, w celu uniknięcia sprzeczności. Te idee są dane w bezpośredniej i pełnej percepcji.*

Musiały się pojawić nowe metody konstrukcyjne, które doprowadziły do powstania continuów dziedzicznie nierozkładalnych, aby usunąć intuicyjną sprzeczność (z ogólnofilozoficznym rozumieniem *continuum*), do której zdawały się prowadzić własności continuów nierozkładalnych.

**FF8.** *Świat wiedzy obiektywnej i autonomicznej oddziałuje na człowieka i zmienia jego istotę – staje się on jednostką racjonalną i w pełni istniejącą.*

W miarę rozwoju nauki rozszerza się obszar racjonalności – widzieliśmy to na przykładzie powstawania teorii continuów. Nie jest to tylko ilościowy rozrost nauki o nowe obiekty, lecz wprowadzanie całkowicie nowych bytów, niedopuszczalnych wcześniej metod, oskarżanych o sprzeczność i nieracjonalność.

**FF9.** *Wypowiedź prawdziwa jest efektem wypowiedzania jako bycia ku samej bytującej rzeczy. To bycie wypowiedzania jest odkrywaniem i ukazywaniem tego bytu, ku któremu wypowiedzanie jest skierowane. Byt ten pokazuje się w tożsamości i w pełnej realności, gdyż prawda jest odkrytością bytu.*

Odśloniety w pierwszych wiekach istnienia filozofii europejskiej problem *continuum*, mimo iż został wypowiedziany w teorii matematycznej, nie został przez tę teorię wyczerpany - pokazała ona jedynie jego kolejne aspekty. Teoria mogła się tak sprawnie i szybko rozwijać, gdyż była od początku w ciągłym odniesieniu do zagadnień, z których wyrosła.

Te powyższe fakty filozoficzne ukazują również, że procesy graniczne (do takich należą metody konstrukcji continuów nierozkładalnych) nie są w stanie zniszczyć istotnych własności bytu – w granicznym obiekcie musi być „coś” zachowane. Tę myśl, oczywiście w innym kontekście i nie tak wyraźnie, można dostrzec w różnych zagadnieniach filozoficznych. Przykładowo, Arystoteles uważał, że jeśli poznaliśmy pewien rzeczywisty obiekt, to wtedy jego istota musi być zachowana w pojęciach i ideach będących wynikiem poznania. Platon myślał, że rzeczy materialne są odbiciem wiecznych idei i w tych właśnie rzeczach możemy coś z tych idei rozpoznać. Jeśli przyglądamy się słynnemu paradoksowi dychotomii Zenona, to zauważamy, że jego istota leży w niemożności destrukcji rozciągłości nawet poprzez nieskończony podział. Również kartezjański proces radykalnego wątpienia pokazuje konieczność zachowania istoty „rzeczy myślącej” – jest to fakt myślenia, ponieważ żaden proces graniczny nie jest w stanie zniszczyć istoty rzeczy. Co więcej, procesy graniczne odsłaniają te własności, które wcześniej były niewidoczne, w pełni ukazują istotę bytu. Te idee znalazły swój najpełniejszy wyraz w konstrukcjach matematycznych, które rozpoczęły się pod koniec XIX wieku od konstrukcji zbioru Cantora.

Przypomnijmy, że charakterystyczne dla koncepcji Kartezjusza jest oparcie rozumienia i stosowania kryteriów prawdy na kilku pierwotnych doświadczeniach i faktach poznawczych – są to: doświadczenie oczywistości, istnienie progu poznawczego, istnienie ciągów dowodowych oraz doświadczenie pozwalające stwierdzić wzrost informacji dokonujący się pomiędzy kolejnymi elementami ciągu dowodowego.

W przypadku nowej wizji nauki uniwersalnej znaczenie progu poznawczego, od którego rozpoczyna się doświadczenie oczywistości, wyraźnie maleje. Już nie poprzez proces „infinitystycznego” oczyszczania umysłu dochodzimy do prawdy, do wiedzy pewnej, lecz przeprowadzając „infinitystyczne” konstrukcje, przy pomocy wcześniej określonych i zdefiniowanych obiektów. Nie tyle istotny jest problem doświadczenia oczywistości, co kwestia znalezienia metody „rozjaśniającej i wyjaśniającej” sens i znaczenie używanych pojęć. Centralną rolę przy dochodzeniu do prawdy odgrywa proces graniczny, w którym pojawiają się nowe „nieoczywiste” własności. Można pokusić się o sformułowanie nowego kryterium prawdy:

### Kryterium prawdy

*Zdanie z jest prawdziwe, gdy w wyniku pewnego procesu granicznego (konstrukcji infinitystycznej) powstaje obiekt, którego własności potwierdzają zdanie z (te własności nie występują w elementach składowych procesu konstrukcji).*

Nowe byty (jak i prawda związana z opisem ich własności) są efektem konstrukcji infinitystycznej poprzedzonej etapem rozjaśniania i definiowania odpowiednich pojęć. To kryterium prawdy nabiera więc pełnego znaczenia dopiero w przypadku konkretnych konstrukcji.

Zastanówmy się jaki jest związek powyższego kryterium z klasyczną definicją prawdy, która stwierdza, że prawda wyraża się w zgodności poznania z jego przedmiotem. Istota tej definicji sprowadza się do dwóch ustaleń:

1. Istnieją dwa istotnie odrębne obszary (podmiot poznający i przedmiot poznawany), między którymi nie istnieje naturalne połączenie.

2. Można ustanowić metodę pozwalającą stwierdzić zachodzenie zgodności między zdaniem a opisywaną przez niego sferą rzeczywistości.

Rozwinięcie punktu pierwszego to budowa teorii poznania wykluczająca systemy np. skrajnie idealistyczne czy materialistyczne.

W punkcie drugim mamy do czynienia z podaniem kryterium prawdy. Epistemologie Kartezjusza i Leibniza, jak również nowa wizja nauki są zgodne z warunkami klasycznej definicji prawdy. Ta nowa wizja nauki różni się jednak schematem konstrukcji wiedzy oraz kryteriami prawdy. Zamiast kartezjańskiego kryterium oczywistości pojawia się etap konstrukcji i definicji tworzących i „rozjaśniających” system pojęć. Ta rezygnacja z kryterium prawdy w pierwszym etapie konstrukcji wiedzy jest, jak zauważyłem, istotnym uproszczeniem schematu poznawczego. Okazuje się, że bez znaczenia są pierwotne intuicje – rozumienie pojęć tworzy się równolegle z ich definiowaniem i użyciem. Tym bardziej istotne jest więc kryterium prawdy pojawiające się w drugim etapie konstrukcji. Obiekt konstruowany w procesie granicznym odślania własności nie znane uprzednio i one to właśnie ustanawiają zgodność wcześniejszych konstrukcji z rzeczywistością.

Przyjrzyjmy się teraz, co wnosi nowa idea nauki uniwersalnej a w szczególności, co dają konstrukcje continuów nierozkładalnych dla pełniejszego zrozumienia paradoksów Zenona z Elei?

Ad 1. Przypomnijmy rozumowanie Zenona w paradoksie dychotomii. Jeśli istnieje ruch oraz jeśli każda odległość może się dzielić w nieskończoność, to z konieczności to, co się porusza musi przebyć nieskończenie wiele odcinków drogi w skończonym czasie. To co się porusza, musi przebyć pewną odległość, jednak najpierw musi przebyć połowę całej odległości. Zanim jednak pokona całą połowę odległości musi najpierw przebyć połowę tej połowy itd. Ten podział daje nieskończenie wiele odcinków, które należałoby przebyć w skończonym czasie, co jest niemożliwe.

Zauważyliśmy w rozdziale II, § 5, że odrzucenie tego paradoksu w analizach Arystotelesa, jak również w analogicznych analizach Ajdukiewicza wykorzystujących teorie szeregów nieskończonych, nie jest skuteczne. Chodzi bowiem nie tyle o to, że czas i przestrzeń mają tę samą strukturę, i że w odpowiednich odcinkach czasowych zostaną pokonane odpowiednie odcinki drogi, lecz o samą możliwość nieskończonego podziału oraz o możliwość odtworzenia



z tych elementów dzielonego na początku odcinka, skoro w wyniku podziału została zniszczona struktura *continuum*. Teoria szeregów nieskończonych mówi tylko tyle, że suma nieskończonej ilości pewnych **wielkości** może być skończona. Teoria ta nie mówi jednak nic o sumowaniu elementów, które nie są wielkościami i czy w wyniku takiego sumowania możemy otrzymać element będący wielkością.

Twierdzenie Urysohna dotyczące continuów nierozkładalnych (żądana przeliczalna suma podcontinuów właściwych danego *continuum* nierozkładalnego nie może dać tego *continuum*) potwierdza w tym kluczowym punkcie paradoks Zenona – niemożliwe jest odtworzenie bytu z jego części składowych w przeliczalnym procesie sumowania, o ile są to byty tego samego rodzaju, co byt pierwotny (continua).

W przypadku konstrukcji continuów nierozkładalnych wygląda na to, że struktura pierwotnego obiektu (np. prostokąta w konstrukcji Brouwera) została całkowicie zniszczona. Okazuje się jednak, że to co powstało w wyniku tej konstrukcji ma rzeczywiście całkowicie nowe własności w stosunku do prostokąta (jak i do pozostałych znanych do tamtej pory obiektów geometrycznych) – jednak nadal jest to *continuum*. Jest więc możliwy nieskończony proces, który nie niszczy pewnej własności bytu – jest nią *continuum* (topologiczne). Potwierdza *continuum* tym samym swoją szczególną rangę.

Ad 2. Kolejny paradoks ukazuje inny aspekt *continuum*. Według Zenona leżąca strzała jest w każdej chwili swego lotu w jakimś określonym miejscu, a więc w każdej chwili lotu spoczywa. Skoro jednak spoczywa w każdej chwili, to spoczywa przez cały czas lotu, bo niemożliwe jest, aby same spoczynki dały ruch. Rozumowanie Zenona opiera się w dużej mierze na „naturalnej” i intuicyjnej sprzeczności między ruchem i spoczynkiem. Po przełożeniu na język matematyczny problem okazuje się bardziej subtelny. Rzeczywiście, zerowanie się na pewnym odcinku czasowym pochodnej drogi względem czasu (prędkości) jest równoważne ze spoczynkiem, jednak rozpatrując tę pochodną w jednym punkcie otrzymujemy trzy możliwości odpowiadające zerowaniu się pochodnej (spoczynek, zmiana monotoniczności, zmiana wypukłości). Użycie bogatszych narzędzi matematycznych pozwala rozróżnić jednak spoczynek od ruchu – i to również w punkcie.

Podobnie jest w przypadku nierozkładalności, która zdawała się być całkowicie przeciwna pojęciu *continuum*. Użycie dostatecznie bogatych narzędzi matematycznych umożliwiło skonstruowanie continuów nierozkładalnych. Okazało się ponadto, że te continua są nieprzywiedlne między dowolną parą punktów z pewnego nieskończonego podzbioru. Nieprzywiedlność łuku między swoimi końcami oznacza, że przejście między tymi punktami w sposób ciągły jest możliwe tylko na jeden sposób. W przypadku *continuum* nierozkładalnego takich jednoznacznych ciągłych przejść „nie łączących się ze sobą” jest więc nieskończenie wiele. Wygląda to na rozbicie *continuum* na rozdzielne części, co jednak tak naprawdę nie ma miejsca. Nie można więc patrzeć na

*continuum* wyłącznie poprzez pierwotną intuicję, trzeba wzbogacić to patrzenie narzędziami matematycznymi – jeśli chce się uniknąć sprzeczności np. tych, które ukazane są w paradoksie strzały Zenona z Elei.

Ad 3. Zenon wnioskuję, że efektem dzielenia bytu, który posiada części, są części niepodzielne, a więc pozbawione wielkości lub podział ten przebiega w nieskończoność. Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to taka część pozbawiona wielkości po dołączeniu do jakiejś wielkości nie powiększa jej. Sam byt, będący sumą takich części musi również być pozbawiony wielkości, a więc musi być niepodzielny, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Jeśli natomiast podział przebiega w nieskończoność, to każda otrzymywana w trakcie podziału część ma wielkość – byt jest więc nieskończoną (czyli dowolnie dużą) sumą wielkości, czyli sam jest nieskończony, co jest niedorzecznością.

Twierdzenie charakterystyczne *continuum*ów nierozkładalnych Janiszewskiego (*continuum* jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego właściwe pod*continuum* jest nigdziegęste) zdaje się pogłębiać trudność ukazaną w tym paradoksie. Każde po*continuum* *continuum* nierozkładalnego  $K$  jest nigdziegęste – a więc „małe”, „pozbawione wielkości” stosując nazewnictwo wykorzystywane w sformułowaniu paradoksu. Samo *continuum*  $K$ , jako utworzone w pewien sposób ze swoich pod*continuum*ów, musiałoby być również pozbawione wielkości. W pewnym sensie tak jest. Na przykład *continuum* Brouwera konstruowane w prostokącie jest w stosunku do niego „pozbawione wielkości” (jest wymiaru mniejszego, jest w nim nigdziegęste). Jednak ma „swoją wielkość” – jego wymiar jest równy jeden. Zenon nie uwzględnił tego, że mogą istnieć różnego rodzaju wielkości. Z drugiej strony, dowolna skończona lub przeliczalna suma pod*continuum*ów *continuum* nierozkładalnego nigdy nie da całego *continuum*  $K$ . To *continuum* jest więc „nieskończoną wielkością” w stosunku do swoich pod*continuum*ów. Nie jest jednak „absolutną” nieskończonością jak wnioskował Zenon.

Ad 4. Rozumowanie Zenona w tym paradoksie ukazuje, iż każda określona wielkość może być rozłożona na pewną ustaloną ilość wielkości. Z drugiej strony, każdy taki ustalony rozkład możemy dalej rozbijać wprowadzając kolejne elementy i nie widać końca tego procesu. Rzeczywiście, twierdzenie Sierpińskiego ukazuje, że rozbicie *continuum* na skończoną a nawet nieskończoną przeliczalną liczbę pod*continuum*ów rozłącznych nie jest możliwe. Aby wypełnienie całego *continuum* dało się zrealizować trzeba wprowadzić „dodatkową” nieskończoność – nieprzeliczalność (*continuum* jest sumą nieprzeliczalnej liczby rozłącznych pod*continuum*ów np. punktów). Pozostając więc w ramach skończonych operacji (czy nawet nieskończonych przeliczalnych) natrafiamy na zasadniczą trudność przy próbie rozwiązania tego paradoksu. Bez wprowadzenia jednak kolejnych nieskończoności również konstrukcje *continuum*ów nierozkładalnych nie mają większego sensu (np. wyrzucanie w nieskończonej ilości kroków kolejnych elementów ustalonego zbioru – co ma miejsce w przypadku konstrukcji Brouwera – musiałoby doprowadzić do jego całkowitej likwidacji).

Ad 5. Paradoks stwierdza, że istnieją takie przypadki, kiedy poszczególne elementy mają inne cechy niż utworzona z nich całość. I nie pomaga żadne conceptualne sumowanie tychże elementów – całość w rzeczywistości zawsze okaże się bogatsza od sumy części składowych. W procesie „przechodzenia” ma miejsce przejście z jednego stanu w inny, z jednej jakości w drugą – jednak mimo, iż istnieje tylko skończona ilość etapów przejścia (czyli proces ma charakter dyskretny) nie można wskazać miejsca, w którym ta zmiana jakości ma miejsce (przejście to charakteryzuje się więc ciągłością). Jest to zdawałoby się niedopuszczalne połączenie ciągłości i dyskretności.

Już sama definicja zwartości przestrzeni topologicznej ukazała jako całkiem naturalne, to ukazane przez paradoks megarejski, połączenie ciągłości i dyskretności. Przecież przestrzeń topologiczna jest zwarta (czyli posiada tę własność, która odpowiada intuicyjnie rozumianej ciągłości), gdy z dowolnego pokrycia możemy wybrać podpokrycie skończone. Pojęcie *continuum* topologicznego (którego częścią składową jest zwartość) kontynuuje ten związek ciągłości i dyskretności. Przykładowo, mimo iż *continuum* nierozkładalne posiada nieprzeliczalnie wiele kompozant, to warunkiem wystarczającym nierozkładalności *continuum* jest istnienie dwóch rozłącznych kompozant.

## 2. Nowe kryterium prawdy a niektóre współczesne koncepcje filozoficzne

### 2.1 Abdukcja według C. S. Peirce'a

W okresie, gdy w matematyce tworzona jest nowa wizja nauki uniwersalnej, amerykański filozof Charles S. Peirce ogłasza prace, w których ma miejsce sformułowanie głównych idei pragmatyzmu. Zastanawiające jest podobieństwo opracowanej przez niego koncepcji prawdy z tą, która wyłania się z założeń nowej nauki uniwersalnej.

W pragmatyzmie Peirce'a ma miejsce oparcie teorii prawdy na teorii znaczenia. Prawda występuje u Peirce'a w kilku znaczeniach:

1. Prawda transcendentálna – należy do rzeczy jako do rzeczy.
2. Prawda złożona – prawda zdań:
  - a) prawda etyczna polegająca na zgodności zdania z przekonaniem mówiącego
  - b) prawda logiczna będąca zgodnością zdania z rzeczywistością; w tym sensie zdanie jest fałszywe, jeśli doświadczenie je obala, a prawdziwe, jeśli doświadczenie go nie obala, czyli każde nie sfalsyfikowane zdanie jest prawdziwe. Przykładami zdań prawdziwych są zdania czystej matematyki, gdyż nie sposób sobie wyobrazić ich obalenia. Natomiast hipotezy metafizyki czy nauk szczegółowych posiadają tylko pewien stopień prawdopodobieństwa, lecz nie przysługują im prawda w sensie

prawdy logicznej, gdyż nie można założyć, że żadne przyszłe doświadczenie nie obali ich.

Dla Peirce'a znaczenie jest odniesieniem znaków do rzeczy oznaczanej, dlatego, aby zdanie było prawdziwe w sensie logicznym musi być pozbawione znaczenia. Takimi zdaniami bez znaczenia są właśnie zdania czystej matematyki.

Jeśli chodzi o prawdę obiektywną (transcendentalną), to polega ona na zgodności z czymś niezależnym od myślenia i przekonania. Jest ona idealnym celem każdego badania naukowego. I w tym sensie Prawda jest jednym odniesieniem każdego zdania, jest Uniwersum wszystkich odniesień zdań prawdziwych; lub inaczej, jest idealną granicą ku której dążą badania naukowe.

Autentyczne wątplenie nie jest kartezjańskim wątpleniem we wszystko, lecz wątpleniem, które zna powód do wątplenia – nie istnieje bezzałożeniowy schemat badawczy. Jednak zgodnie z duchem nauki człowiek powinien być gotowy porzucić swoje przeświadczenia, jeśli doświadczenie się im sprzeciwia – lecz dopiero wtedy, a nie rozpocząć od powszechnego wątplenia.

W myśleniu filozoficznym (pragmatyzmie), chodzi o rozjaśnienie idei oraz faktów i jest to zadanie metodologiczno-logiczne. To raczej prawda (np. hipotez) rozjaśnia fakty niż one są drogą do prawdy – nie ważne jest w końcu w jaki sposób prawdę danego zdania otrzymaliśmy, ważne są zmysłowo uchwytne skutki tego zdania, one dają nam wgląd w rzeczywistość.

Peirce dzieli logikę na trzy części:

1. Gramatyka spekulatywna – zajmuje się **formalnymi warunkami sensowności** znaków. Relacja znaczenia (funkcja semiotyczna) jest dla Peirce'a relacją trójczłonową: między reprezentamenem (znak zastępujący przedmiot), przedmiotem oraz interpretantem (znak złożony wywołany w człowieku przez reprezentamen).
2. Logika praktyczna – zajmuje się **formalnymi warunkami prawdziwości** symboli, a dokładniej rozumowaniem dedukcyjnym, indukcyjnym i abdukcyjnym. O ile indukcja ma charakter rozumowania statystycznego i zakłada, że to, co jest prawdziwe dla pewnej liczby elementów danej klasy, jest prawdziwe dla całej tej klasy, o tyle abdukcja jest przewidywaniem – na podstawie faktów formułuje hipotezę i dedukuje, co powinno zachodzić, jeśli hipoteza jest prawdziwa.
3. Retoryka spekulatywna – zajmuje się warunkami odniesienia znaków do interpretantów.

Wszelkie idee ogólne są nazywane przez Peirce'a pojęciami intelektualnymi. Mają one szczególne znaczenie, gdyż pragmatyzm (według Peirce'a) jest ustalaniem znaczenia pojęcia intelektualnego, poprzez badanie praktycznych następstw, które mogą przypuszczalnie wynikać z koniecznością z prawdy tego pojęcia. Znaczenie tego pojęcia będzie w konsekwencji sumą wszystkich tych następstw (przez następstwo należy rozumieć relację między następnikiem a poprzednikiem, a nie sam następnik) – znaczenie pojęcia intelektualnego wyraża się więc w terminach zdań warunkowych. Jeśli chodzi o badanie praktycz-



nych następstw, to nie musi być ono działaniem, mogą to być jedynie eksperymenty myślowe. Niemożliwe jest jednak, aby w naszych umysłach istniała jakakolwiek idea, która by się nie odnosiła do czegoś, co nie da się pomyśleć jako odczuwalne skutki rzeczy. Jeśli coś jest prawdziwe, to musi być skuteczne (prawda ukazuje fakty, rozjaśnia je).

Peirce wyróżnia trzy rodzaje idei:

1. Idea danej zmysłowej – jest rozpatrywana sama w sobie bez jakiegokolwiek odniesienia. Jest to idea „pierwszości”.
2. Idea działania – opiera się na związku między przedmiotem działającym i tym, na który się działa. Jest to idea „drugości”.
3. Idea relacji znakowej – znaku, który oznacza, że pewna własność należy do danej klasy przedmiotów. Jest to idea „trzeciości”.

Peirce ujmuje świat w ramach trzech kategorii ontologicznych:

1. Przypadek. Kategorię ontologiczną ujmującą pojęcie przypadku nazywa Peirce tychizmem. Podstawową zasadą tychizmu jest to, iż przypadek jest zawsze obecny w świecie. Świat jest ciągłym i twórczym procesem – przechodzi od idealnej granicy gołej możliwości do idealnej granicy zupełnego urzeczywistnienia się możliwości. Na początku jest absolutny przypadek, a świat zmierza ku coraz pełniejszej racjonalności.
2. Cel, który jest przyciąganiem (miłość w ujęciu Empedoklesa). Pojawia się druga kategoria ontologiczna – agapizm. Jedynym prawem umożliwiającym odpowiedź na przyciąganie i osiągnięcie absolutnego celu jest miłość.
3. Ciągłość (synechizm) – wszystko, co istnieje, jest ciągłe. Dzięki kategorii synechizmu następuje likwidacja dualizmu materii i myśli – materia jest to zużyta myśl (myśl skrupowana nawykami), a zakorzenione nawyki (tendencje) stają się prawami fizycznymi. To właśnie nawyki, które są powszechne w każdym obszarze świata, sprawiają, że tworzone są regularności i prawa, że chaos zamienia się w porządek, a przypadek w racjonalność.

Najważniejszym osiągnięciem Peirce’a jest jego analiza znaczenia i reguła rozjaśniania pojęć. Każda idea czegoś jest ideą zmysłowo uchwytnych skutków tego czegoś. W celu rozjaśnienia pojęć intelektualnych należy podjąć się krytycznej racjonalistycznej interpretacji rzeczywistości – jest to możliwe wyłącznie w terminach wyobraźnego doświadczenia ludzkiego. Mamy do czynienia jedynie z rzeczywistością – z tym, co aktualnie rzeczywiste (co wzbudza aktualne doświadczenie) i z tym, co potencjalnie rzeczywiste (co wzbudza możliwe doświadczenie). W ten sposób pragmatyzm (pragmatycyzm) Peirce’a jest syntezą idealizmu i realizmu.

Kluczowym narzędziem dotarcia do rzeczywistości jest odkryta przez Peirce’a abdukcja. Jest zasadniczym narzędziem badań logicznych. Jeśli w oparciu o pewne fakty  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formułujemy pewną hipotezę  $H$ , to zakładamy jej prawdziwość. Nic nie pomoże w ulepszeniu hipotezy gromadzenie kolejnych faktów, jeśli nie uzyskamy rozjaśnienia, pełniejszego zrozumienia faktów już zaobserwowanych. Dzięki założeniu prawdziwości hipotezy uży-

skujemy pełniejszy dostęp do rzeczywistości. Abdukcja jest drogą prowadzącą od prawdy do rzeczywistości. Jest więc odwróceniem metod indukcji i dedukcji zarazem.

Jakie jest znaczenie „abdukcji” w procesie rozwiązywania problemów oraz przy konstruowaniu jednolitego modelu naukowego odkrycia? Czy abdukcja jest zgodna z nowym schematem nauki uniwersalnej? Samo pojęcie abdukcji, wprowadzone przez Charlesa Sandersa Peirce’a, jest pojęciem wieloznacznym: twórczość, wybór, najlepsze wyjaśnienia, przedstawienie. Sam proces odkrycia ma kilka rodzajów – możemy wyróżnić następujące metody odkrywania: 1. kierowana przez dane zmysłowe (data-driven), 2. wyjaśnienie (abdukcję) lub 3. spójność (chodzi o przewyższenie sprzeczności). Te metody mogą występować łącznie np. hipoteza formułowana w celu przewyższenia sprzeczności może być opracowana przy pomocy abdukcji. Kiedy pojawia się anomalia czy sprzeczność, to niesprzeczność może być przywrócona przez odrzucenie czy zmodyfikowanie założeń, które przyczyniły się do wyprowadzenia sprzeczności – więc otrzymanie sprzeczności ma swój wkład w badaniach nad alternatywną i prawdopodobnie nową hipotezą.

Jakakolwiek logika abdukcyjnego rozumowania musi być wymyślona z uwzględnieniem pewnego ewolucyjnego procesu rzeczywistości. Wielu autorów rozważa z różnych punktów widzenia dualność w pojmowaniu logiki i matematyki, która może być w skrócie ukazana jako dualność języka i rachunku algebraicznego. Frege, Quine należą do obozu, który podkreśla wagę uniwersalności języka, natomiast Peirce, Hilbert, Grassmann czy Schroder do tradycji ukazującej uniwersalność podejścia aksjomatyczno-algebraicznego. Na przykład u Hilberta, przyjmując dane aksjomaty nie musimy znać treści i znaczenia pojęć w nich użytych. Dopiero konsekwencje tych aksjomatów (wyprowadzanie tych konsekwencji wiąże się z uznaniem ich za prawdziwe) wyjaśniają sens tych pojęć.

Według Kanta metoda argumentacji rozwiązująca problem relacji między pojęciami a światem ma podwójną strukturę: analityczną (wyjaśnianie idzie od tego, co warunkowane do warunków – kierunek regresywny) oraz syntetyczną (wyjaśnianie idzie od warunków do tego, co warunkowane – kierunek progresywny). Istnieje ścisłe podobieństwo do wnioskowania abdukcyjnego, które ma również podwójną strukturę. Kant odkrywa idąc w kierunku regresywnym, poprzez analizę pojęcia przestrzeni, które posiada, że przestrzeń nie jest pojęciem i nie może być przedstawiona przy pomocy pojęcia. Analityczne rozumowanie Kanta doprowadza więc do odkrycia, że przestrzeń jest jakością niepojęciową, a pojęcie przestrzeni nie jest identyczne z samą przestrzenią. Rozumowanie abdukcyjne ma podwójną strukturę: formalną i temporalną. Dzięki rozumowaniu formalnemu odkrywamy, co jest zawarte w przesłankach, natomiast element „odkrycia” (temporalny) wskazuje, co musi być założone uprzednio przed przesłankami, aby te przesłanki mogły być odnalezione jako przesłanki w argumencie, w którym znany jest nam jedynie wniosek. Według

Peirce'a każde nowe pojęcie ma początek w percepcji, a więc czasoprzestrzeń jest heurystycznym horyzontem wnioskowań abdukcyjnych. Podobnie jest u Kanta w przypadku analizy relacji między pojęciem i formą intuicji (przestrzeń okazuje się formą intuicji). Abdukcja Peirce'a i forma regresywno-progresywna rozumowania u Kanta mają więc analogiczną strukturę.

Rola abdukcji w procesie stawiania hipotez i rozwiązywania matematycznych problemów jest istotna. Abdukcja odsłania obszar przejścia między stawianiem hipotez a dowodzeniem. Można również na metodę *proofs and refutations* Lakatosa spojrzeć poprzez schemat rozumowania abdukcyjnego – ten schemat rządzi większością zjawisk opisywanych przez Lakatosa.

Chyba jedną z najbardziej kluczowych idei w historii metod heurystycznych jest metoda syntezy i analizy w greckiej geometrii. W tej metodzie rozumowanie biegnie do tyłu od twierdzenia do aksjomatów, z których ono dedukcyjnie wynika. Analizując pewien problem natomiast zakłada się, że zachodzą pożądane własności i później rozumowanie znowu biegnie do tyłu, aby znaleźć możliwe konstrukcje, z których te własności wynikają. Abdukcja Peirce'a jako droga wnioskowania o przyczynach ze skutku wydaje się być ogólnym schematem takich właśnie metod badawczych.

## 2.2 Wittgenstein

Zauważmy, że sposób rozumowania Wittgensteina, przynajmniej w niektórych fragmentach jego prac, jest zgodny ze schematem nowej nauki uniwersalnej. Rozpatrzmy dwie tezy L. Wittgensteina z pracy *O pewności*<sup>1</sup>.

Teza 216 stwierdza: „Zdanie 'To jest napisane' ”. Prawdziwość zdania z tezy 216 zależy od sposobu użycia (kiedy je zapisuję, jest prawdziwe, kiedy natomiast je wypowiadam, jest fałszywe). Podanie takiego sformułowania jako tezy mającej wartość epistemologiczną (a chyba o to chodzi Wittgensteinowi) jest wyjściem poza metodę kartezjańską jak również leibnizjańską. W tych nowożytnych metodach poznawczych powyższe stwierdzenie nie ma sensu. Przecież sens tej wypowiedzi określony jest przez wszystkie możliwe jej użycia – zbiór tych wszystkich możliwych użyć należy traktować jako jej sens. Tego typu metoda oparta na nieskończonym procesie definicyjnym jest niedopuszczalna dla ideału nowożytnego. Tylko na początku, przy docieraniu do absolutów poznawczych, ma miejsce nieskończony proces (graniczny), a wszelkie konstrukcje i definicje muszą mieć finitystyczny charakter.

Analogicznie jest z wypowiedzią: „Ja zawsze kłamię” (pewna modyfikacja paradoksu kłamcy). Nie należy rozpatrywać tego zdania samego w sobie, lecz w odniesieniu do zbioru wszystkich możliwych jego realizacji. Zanim postawi się pytanie czy ta wypowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa, trzeba najpierw zapytać się, czy możliwe jest zawsze kłamać tzn., czy istnieje jakakolwiek realizacja tej wypowiedzi.

Spójrzmy teraz na tezę 221: „Czy mogę wątpić w to, w co chcę wątpić?”. Analizując ją możemy zauważyć, że stwierdzenie „mogę wątpić” jest umieszczeniem wątpienia w obszarze możliwości, dotyczy więc obszaru prawda-falsz; natomiast zwrot „chcę wątpić” nie mieści się w tym obszarze, ponieważ wola nie podlega ocenom typu „prawdziwe-nieprawdziwe”. Jest to jednak spojrzenie z punktu widzenia mentalności wynikającej z nowożytnego ideału racjonalności. Czy można więc w jakikolwiek sposób zakwestionować akty woli? A dokładniej akt woli, której przedmiotem jest samo wątpienie? Nie chodzi tu o zwykłe „spiętrzenie” aktów woli – wejście na wyższy poziom „meta”, lecz o poddanie tych aktów kryterium prawdziwości. W pytaniu tym zawarta jest sugestia, że pewne obszary rzeczywistości są niepodważalne np. aktu woli, którego przedmiotem jest wątpienie, nie można zmienić ani obiektywną decyzją z zewnątrz, ani indywidualnym, subiektywnym aktem; bo jak mówi Wittgenstein w tezie 235 „to, co jest dla mnie ustalone, nie ma swych podstaw w mojej głupocie czy łatwowierności (to znaczy, że na prawdę nie ma wpływu ani mój rozum, ani wola)”. Jeśli pewna prawda została ustalona (jakimś poznawczym aktem), to nie istnieją żadne władze mogące ją zakwestionować – ani rozum, ani wola. W dalszym ciągu mogę jedynie wykorzystać tę prawdę do rozjaśniania kolejnych obszarów rzeczywistości. Nie mogę więc rozciągnąć wątpienia na całą rzeczywistość, jak chciał Kartezjusz? Jeśli wątpienie skoncentrowało się na pewnym obiekcie, to ten obiekt jest w pewnym sensie „chroniony” przez to właśnie wątpienie i w nim chroni się prawda – nie jest możliwa całkowita negacja dotycząca układu „wątpiący-obiekt wątpienia”.

### 2.3 Koncepcja prawdy Heideggera

Zastanawiająca jest zbieżność teoriopoznawczego *novum* matematyki XIX wieku z koncepcją prawdy Heideggera. Według tego filozofa „nie sposób się obejść bez rozjaśniania sposobu bycia samego poznawania. Konieczna do tego analiza musi podjąć próbę uchwycenia równocześnie fenomenu prawdy, który charakteryzuje poznanie”<sup>2</sup>. Prawda wypowiedzi nie może być dana bez równoczesnego wyjaśnienia samego poznawania, które z kolei „jest byciem ku samej bytującej rzeczy (...). Domniemany byt sam pokazuje się tak, jak on w sobie samym jest, tzn. że w swej tożsamości jest on tak, jak bytując zostaje on w wypowiedzi ukazany, odkryty. To nie przedstawienia są porównywalne – ani między sobą, ani w odniesieniu do realnej rzeczy. Nie chodzi o wykazanie zgodności poznawania i przedmiotu lub wręcz czegoś psychicznego z czymś fizycznym, ale także nie o wykazanie zgodności pomiędzy treściami świadomości. Wykazane ma być wyłącznie bycie-odkrytym samego bytu, on sam w „jak” swej odkrytości (...) To, że wypowiedź jest prawdziwa, znaczy: odkrywa ona byt sam w sobie”<sup>3</sup>. I dalej: „To nie wypowiedź jest zasadniczym „miejscem” praw-



dy, lecz na odwrót: wypowiedź jako *modus* przyswajania sobie odkrytości i jako sposób bycia w świecie opiera się na odkrywaniu bądź otwartości jestestwa<sup>4</sup>.

Uwzględniając specyficzne znaczenia takich słów jak: bycie, jestestwo, odkrytość, rozumienie możemy zauważyć, że analizowany wcześniej proces graniczny, to ukazanie bytu w jego odkrytości – prawdziwość wypowiedzi wynika z własności odkrywanych w procesie granicznym obiektu. Stąd, miejscem prawdy jest pojawiający się w procesie infinitystycznej konstrukcji obiekt, a nie wcześniejsze stwierdzenia. Te stwierdzenia uzyskują status prawdziwości dopiero po przeprowadzeniu danej konstrukcji. W nowym modelu naukowości, ten obszar teorii poznania został zagarnięty przez nauki szczegółowe (matematykę). Jednak pozostał obszar „tajemnicy” nie mieszczący się w paradygmacie nauk szczegółowych. Jak pisze Heidegger „samo w sobie jest zupełnie niepojęte, dlaczego byt ma być odkrywany, dlaczego musi być prawda i jestestwo”<sup>5</sup>. Ten obszar badań to, jak sądzę, miejsce dla autentycznej filozofii. Miejscem konstrukcji, również tych „hipotetycznych i idealnych” są struktury nauk szczegółowych. Zadanie filozofii, to zwrócenie się w kierunku bytu (który jest, między innymi, określany przez prawdę zawartą w konstrukcjach nauk szczegółowych); w przypadku Heideggera to zadanie polega na wyodrębnieniu sensu bycia-prawdy i oddanie „pierwotnego całokształtu bycia faktycznego jestestwa”<sup>6</sup>. Są to oczywiście wnioski, które wypływają z przedstawionego przełomu w matematyce XIX wieku.

## 2.4 Lakatos

Lakatos występował przeciwko patrzeniu na matematykę z dualistycznego punktu widzenia: albo sceptycyzm podważający jej rezultaty, albo dogmatyzm mówiący o niezmienności i absolutnej nieomyślności jej twierdzeń. Jeśli przyjmiemy, że prawda spływa do twierdzeń matematyki ze szczytu aksjomatów przy pomocy dedukcji, to równie dobrze możemy przyjąć, że „fałsz” nowych pomysłów płynie w górę w kierunku „ustalonych” twierdzeń (przy pomocy swoistej indukcji), zmieniając ich znaczenie i wartość. Należy odrzucić dualizm: sceptycyzm-dogmatyzm, a przyjąć koncepcję rozwoju teorii matematycznych polegającej na ciągłym przyjmowaniu nowych treści i znaczeń. Stare wyniki nie ulegają odrzuceniu, lecz ubogacają się o nowe aspekty i sensy<sup>7</sup>.

Działanie, w pewnych istotnych momentach rozwoju matematyki, metody dowodów i kontrprzykładów (na fakt ten zwrócił uwagę właśnie Lakatos) ukazuje, że sens twierdzeń i znaczenia pojęć są generowane przez dowody i kontrprzykłady – ich wzajemny związek sprawia, że rodzi się nowe pojęcie. Sens tego pojęcia jest jakby nadbudowany nad dowodem i kontrprzykładem do tego dowodu i godzi we wcześniej występującą sprzeczność. To dzięki tym nowym pojęciom, które obejmują sobą kolejne obszary rzeczywistości, rozwój matematyki charakteryzuje się ciągłością i racjonalnością. Przy patrzeniu na

koncepcję Lakatosa z punktu widzenia dualizmu platońskiego, wydaje się ona trywialna i mało interesująca: przecież każdy wie, że nowe twierdzenia i pojęcia rodzą się w procesie ścierania się ze sobą rozumowań potwierdzających daną hipotezę a kontrprzykładami próbującymi ją obalić. Jednak pojęcia generowane w trakcie rozwoju matematyki nie są wynikiem „walki” między pierwotną hipotezą i jej dowodem a kontrprzykładami (mimo, że czasami wypowiedzi Lakatosa zdają się taką ewentualność sugerować), lecz efektem „budowania nowych znaczeń, sensów” pochodzących od dowodów i kontrprzykładów. Jest to całkowicie zgodne z nową wizją nauki uniwersalnej.

W koncepcji Lakatosa ponadto trzeba ciągle odwoływać się do tego momentu, w którym rodzące się pojęcie połączyło w jedną matematyczną strukturę dowód i kontrprzykład do niego. I dlatego nabierają tutaj szczególne znaczenia badania historyczne pozwalające przenosić ten podstawowy sens pojęć przez cały późniejszy rozwój<sup>8</sup>.

### 3. Analiza niestandardowa A. Robinsona

Wydaje się, że konstrukcja Dedekinda czy Cantora liczb rzeczywistych dostarcza wystarczającej ilości liczb do mierzenia wszystkich geometrycznych wielkości. Prosta rzeczywista charakteryzuje się ciągłością i zupełnością i nie ma miejsca na dodatkowe liczby. Jednak już starożytni rozważali kąty łukowe tzn. kąty między łukami np. kąt między prostą styczną do okręgu a tym okręgiem nie daje się wyrazić przy pomocy liczb rzeczywistych. Widać wyraźnie, że wielkość tych kątów zależy od średnicy okręgu, jednak w obu przypadkach ten kąt są mniejsze od dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej. Znaczyłoby to, że niezależnie od „rzeczywistej” różnicy w wartościach tych kątów, jedyna liczba rzeczywista jaka może być im przypisana, to zero. Skąd wziąć te dodatkowe brakujące liczby „nieskończenie małe”, gdzie znajdują się one na osi liczbowej, skoro jest ona już całkowicie zapełniona. Bez odejścia od, wypracowanej już w oparciu o istniejące teorie matematyczne intuicji związanych z osią liczbową i jej zupełnością, wydaje się to niemożliwe. Dopiero nowa idea nauki uniwersalnej, podejmująca się budowy nowych intuicji w oparciu o nowe narzędzia i metody logiczne oraz konstrukcje, dała impuls do rozwiązania tego problemu. Stało się to w wypracowanej przez Abrahama Robinsona analizie niestandardowej, która wprowadziła wielkości nieskończenie małe (oraz nieskończenie duże) jako pełnoprawne liczby. Przyjrzyjmy się w zarysie w jaki sposób się to odbywa.

Pojęcie granicy jest podstawowym pojęciem analizy matematycznej. Inne pojęcia, w znacznej mierze, są oparte na tym właśnie pojęciu. Tak jest z pojęciem ciągłości, całki, pochodnej, sumy szeregu itd. Jednak klasycznie uznawana definicja granicy jest mało intuicyjna, mimo, że dość prosta w swojej formie: liczba  $g$  jest granicą ciągu liczb  $a_n$ , jeśli, dla każdego  $\varepsilon > 0$ , istnieje

liczba  $N$  o tej własności, że  $|a_n - g| < \varepsilon$ , dla każdego  $n > N$ . Odwoływanie się przy definiowaniu pojęć czy dowodzeniu twierdzeń, do tak rozumianego pojęcia granicy jest standardem, uchylanie się od którego jest najczęściej uznawane za błąd, a w najlepszym razie za brak ścisłości.

Znacznie bardziej zgodna z intuicją jest inna („nieściśła”) definicja mówiąca, że liczba  $g$  jest granicą ciągu liczb  $a_n$ , jeśli, dla liczb  $n$  bliskich nieskończoności, liczba  $a_n$  jest **nieskończenie blisko** liczby  $g$ . Ta definicja nawiązuje do idei Leibniza.

Mimo realizacji programu Leibniza znaczną przewagę w XVIII i XIX wieku miał kartezjański program matematyzacji. Dopiero w XX wieku wraz z powstaniem analizy niestandardowej przywrócono do łask ideę Leibniza. Abraham Robinson, twórca tej nowej teorii<sup>9</sup>, wychodzi od zasadniczej sprzeczności między tym, co intuicyjnie oczywiste i nieściśłe, a tym, co ściśle, jednak pozbawione intuicyjnej oczywistości. Czy możemy tę sprzeczność pogodzić?

Jak widzieliśmy wcześniej, Leibniz próbował usunąć tę sprzeczność przez odwołanie się do metody wyczerpywania Archimedesesa oraz przez oparcie się na zasadzie ciągłości. Robinson proponuje inne wyjście z tej sprzeczności. Ma nim być wykorzystanie logiki w rachunku nieskończenie małych. Jest to nawiązanie do powstałej w XIX wieku idei nauki uniwersalnej.

Dla zbioru liczb rzeczywistych  $R$  wprowadzamy formalny język  $L$ , w ramach którego będzie można wyrazić wszystkie zdania dotyczące  $R$ . Język ten musi być więc bardzo bogaty; ma zawierać symbole wszystkich liczb rzeczywistych, wszystkich relacji  $n$ -argumentowych na liczbach rzeczywistych, wszystkich podzbiorów  $R$ , relacji między tymi podzbiórami itd. Oprócz tego  $L$  musi zawierać spójniki logiczne oraz kwantyfikatory.

Niech  $K$  oznacza zbiór wszystkich prawdziwych zdań o  $R$ , wypowiedzianych w języku  $L$ . Na podstawie standardowego twierdzenia logiki istnieje rozszerzenie właściwe  $R^*$  zbioru  $R$ , które jest modelem  $K$ , co oznacza, że **wszystkie zdania ze zbioru  $K$  są również prawdziwe w odniesieniu do  $R^*$** , oczywiście przy odpowiedniej (dopuszczalnej) interpretacji. Na przykład, jeśli  $S$  jest pewnym podzbiorem  $R$ , to istnieje podzbiór dopuszczalny  $S^*$  w zbiorze  $R^*$ , przy czym  $S$  i  $S^*$  są oznaczone przez **ten sam symbol z języka  $L$** . Oczywiście zbiór  $R^* \setminus R$  jest niepusty. Robinson zbiór  $R^*$  nazywa niestandardowym modelem analizy a liczby z tego zbioru nazywa liczbami rzeczywistymi, przy czym liczby ze zbioru  $R$  noszą nazwę standardowych liczb rzeczywistych<sup>10</sup>.

W przypadku zbioru liczb rzeczywistych prawdziwa jest następująca własność (zwana aksjomatem Archimedesesa):

**Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x$  i  $y$ , istnieje liczba naturalna  $n > 0$  taka, że  $y < nx$ .**

Okazuje się, że w przypadku  $R^*$  ta własność nie zachodzi tzn. istnieją takie liczby  $x > 0$  i  $y > 0$ , że  $x \leq \frac{y}{n}$ , dla dowolnej standardowej liczby naturalnej  $n$  (jeśli natomiast  $n$  przebiega wszystkie liczby naturalne — również nieskończone — to aksjomat Archimedesesa jest prawdziwy). Stąd wynika, że  $x$  jest liczbą mniejszą od dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej, czyli jest liczbą **nieskończenie małą**. Analogicznie,  $y$  jest liczbą większą od dowolnej liczby rzeczywistej, czyli jest to liczba **nieskończenie duża**. Ponadto, prawdziwe jest twierdzenie, że dla każdej liczby rzeczywistej  $a^* \in R^*$ , istnieje standardowa liczba rzeczywista  $a$  taka, że  $a^* - a$  jest liczbą nieskończenie małą.

W naturalny sposób tłumaczyć się w nowym modelu liczb rzeczywistych podstawowe definicje analizy. Jako przykład niech posłuży pojęcie granicy ciągu.

Jeśli  $s_n$  jest ciągiem liczb rzeczywistych w  $R$ , to przechodząc do modelu  $R^*$  otrzymamy rozszerzenie wskaźników ciągu  $s_n$  o nieskończone liczby naturalne. Okazuje się, że ciąg  $s_n$  jest zbieżny w klasycznym sensie do liczby  $s$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $s_n$  jest nieskończenie bliska liczby  $s$ , dla każdej nieskończonej liczby naturalnej  $n^*$ . W podobny sposób tłumaczyć się pojęcia ciągłości, pochodnej czy całki.

Z aksjomatem Archimedesesa bardzo ściśle związane są pewne istotne własności prostej rzeczywistej (ich prawdziwość zależna jest od przyjęcia tego aksjomatu). Zwróćmy uwagę na cztery z nich:

1. Dowolny podzbiór prostej rzeczywistej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.
2. Każdy ograniczony z góry (z dołu) podzbiór prostej rzeczywistej ma kres górny (dolny) — jest to tzw. ciągłość liczb rzeczywistych.
3. Jedynymi podzbiórami spójnymi na prostej są odcinki (i oczywiście cała prosta).
4. Każdy zbiór otwarty niepusty na prostej zawiera nie więcej niż przeliczalną ilość odcinków otwartych parami rozłącznych.

Z powodu „częściowego” nieobowiązywania aksjomatu Archimedesesa, struktura prostej rzeczywistej rozpatrywana w ramach analizy niestandardowej musi obyć się bez tych własności. Na ten fakt można jednak spojrzeć również z innej strony. Z powodu fałszywości powyższych twierdzeń, analiza niestandardowa bada większą ilość bytów i własności niż analiza standardowa. Między innymi okazuje się, że uzupełnienie liczb wymiernych o liczby niewymierne nie powoduje usunięcia „luk” na prostej rzeczywistej oraz istnieją zbiory spójne na prostej, nie będące odcinkami. Może to mieć doniosłe znaczenie filozoficzne — brak jakiegoś rodzaju bytów może wynikać z niedostatecznych narzędzi logicznych. Należy więc uprzednio rozszerzyć aparat logiczny „ponad miarę”, nie przejmując się „brzytwą Okhama” a otrzymamy pożądane własności.



Chciałbym podać prostą analogię związaną z systemem pozycyjnym. W rzymskim układzie liczbowym wprowadzano nowe liczby w razie potrzeby; nie istniały symbole dla dowolnie dużych liczb. Z powodu nieskończonej ilości liczb wydaje się niemożliwe podanie symboli ich wszystkich – układ pozycyjny rozwiązuje ten problem w znany sposób. Zauważmy, że w matematyce (klasycznej) nadal obowiązuje przy używaniu symboli rzymski schemat, tzn. wprowadzamy nowe symbole w razie potrzeby, natomiast teoria Robinsona wprowadza bogaty język symboli, można powiedzieć, że mnoży byty bez potrzeby.

Można podać jeszcze jedną konsekwencję filozoficzną teorii Robinsona. Leibniz, wprowadzając liczby nieskończenie małe, nie przypisywał im realności jak zwykłym liczbom, lecz traktuje je jako byty fikcyjne, wymaginowane. Dopiero dzięki ogólnej (filozoficznej) zasadzie ciągłości te idealne liczby zostały wyposażone w te same prawa, jakie przysługiwały zwykłym liczbom. Okazuje się, że aparat logiczny może w pewnych przypadkach zastąpić potrzebę posługiwania się ogólnymi zasadami pierwotnymi. Analiza niestandardowa jest więc realizacją idei nauki uniwersalnej opierającej budowę teorii matematycznych na analizach logicznych. Jest ta teoria również w pewnym sensie realizacją tezy Leibniza i Bolzano, że logika leży u podstaw całej rzeczywistości.

#### 4. Historia matematyki

Spójrzmy teraz bliżej na związek między historią matematyki a filozofią matematyki z punktu widzenia nowej idei nauki uniwersalnej. Odkrywanie faktów (teorie, twierdzenia, pojęcia) w dziejach matematyki prowadzi do powstania pierwotnej filozofii matematyki opartej na kolejności powstawania tych faktów i ich wzajemnym powiązaniu. Natomiast uzyskanie przez pewne fakty z dziejów matematyki szczególnej rangi (tak stało się np. z teorią mnogości) prowadzi do nowych filozoficznych interpretacji i w konsekwencji daje możliwość dostrzeżenia nowych faktów w dziejach matematyki jako znaczących.

Zbiór  $D_M$  faktów z dziejów matematyki można więc podzielić na dwa podzbiory:  $D_M^p$  - fakty pierwotne i  $D_M^f$  - fakty filozoficzne. Powstaje w związku z tym naturalna filozofia matematyki określona przez fakty filozoficzne i ich powiązania. Oddziela się ona od tej części matematyki, która nie posiada znaczenia filozoficznego. Oczywiście, badania historyczne mogą doprowadzić do zmiany granic między częścią filozoficzną i niefilozoficzną włączając nowe teorie do obszaru filozofii matematyki. W programie logicyzacji matematyki trzonem takiej naturalnej filozofii matematyki były zasady logiki, na których ten program był oparty; przy próbie sprowadzenia matematyki do teorii mnogości taką rangę filozoficzną przypisano podstawowym twierdzeniom dotyczącym zbiorów (szczególnie nieskończonych); a znów w programie Kleina pojęcie

grupy i niezmiennika wraz z odpowiednimi twierdzeniami taki trzon filozofii matematyki tworzyły.

Charakterystyczną cechą problemu matematyczności przyrody jest niemożność dostrzeżenia jego znaczenia poprzez wyłącznie jedną dziedzinę wiedzy. Jest to typowy problem z „pogranicza”. Sądzę, że można zrozumieć wagę tego problemu dopiero w kontekście związanych z nim zagadnień filozoficznych i prób ich rozwiązania w dziejach filozofii. Matematyka w wielu momentach swojej historii, mniej lub bardziej świadomie, odkrywała teorie, które wzbudzały duże emocje wśród filozofów i zdawały się być lekarstwem na odwieczne problemy filozoficzne. Jedno z pierwszych zagadnień filozoficznych dotyczyło poszukiwań elementów stanowiących podstawę całej rzeczywistości. Znane są koncepcje Talesa, Anaksymenesa, Anaksagorasa czy Empedoklesa. Również Platona nurtowało to zagadnienie – i kiedy poznał zaskakujące twierdzenie geometryczne mówiące, że istnieje tylko pięć wielościanów foremnych, uznał, że w nim tkwi rozwiązanie zagadki pierwszych elementów rzeczywistości. Musi być pięć elementów, z których zbudowany jest cały świat i muszą one odpowiadać w swojej podstawowej strukturze odpowiednim wielościanom foremnym. Również własności tych elementów mogą być wydedukowane z własności odpowiadających im brył<sup>11</sup>.

Koncepcja Platona wydaje się być nadmiernie aprioryczna, jednak to właśnie ten sposób rozumowania okazał się skuteczny w rozwiązywaniu wielu problemów nauki współczesnej. Wystarczy choćby wspomnieć o wykorzystaniu matematycznej teorii grup, w szczególności grup symetrii do opisu wielu zjawisk fizycznych np. do porządkowania widm atomowych i cząsteczkowych. W mechanice kwantowej przy pomocy wektora o nieskończenie wielu wymiarach przedstawia się stan układu fizycznego. Dwa dowolne stany układu elektronów różnią się od siebie jedynie obrotem przestrzeni lub permutacją elektronów (nie istnieją żadne „wewnętrzne” cechy elektronu pozwalające odróżnić go od innych elektronów). Istnieją więc dwie symetrie, którym podlegają chmury elektronów – obrotowa symetria przestrzeni oraz symetria związana z grupą permutacji. I stąd ogólne cechy widm mogą być badane apriorycznie jako niezmienniki tych grup.

Przykładów wykorzystania teorii grup do poznawania w sposób aprioryczny własności obiektów fizycznych jest w fizyce wiele. Jak to się dzieje, że tak abstrakcyjna teoria matematyczna może tak wiele mówić o rzeczywistości? Czy te „abstrakcje” nie są w jakiś sposób częścią rzeczywistości?

Myślę, że w odpowiednim kontekście uzasadnienia rodzi się odkrycie. Odkrycie nowego faktu to nie jest tylko uzupełnienie struktury logicznej jakiejś matematycznej konstrukcji. Jeśli uznajemy np. teorię grup jako filozofię matematyki, przyjmując (jak czynił to F. Klein), że własności badanej przestrzeni są niezmiennikami pewnej grupy przekształceń, to samo pojęcie grupy i niezmiennika staje się narzędziem odkryć fizycznych. W ramach aktualnego rozwoju matematyki czy fizyki nie ma żadnego logicznego powodu przyjęcia teorii grup

jako narzędzia odkryć. Dopiero w ramach badań historii nauki ma miejsce odtworzenie logiki rozwoju teorii, a więc ukazywanie i tworzenie kontekstu historycznego, w którym dopiero nabierają sensu i znaczenia mechanizmy tworzące wewnętrzną strukturę matematyki. Okazują się one w konsekwencji nowymi schematami i sposobami myślenia, czyli regułami dowodzenia i uzasadniania, w oparciu o które powstają nowe teorie. Aby mieć jednak jasność co jest odkryciem, a co uzasadnieniem, należy uznać naukę za rzeczywistość pierwotną. Wtedy, z jednej strony, odkrywane mechanizmy rządzące nauką stają się po pewnym czasie regułami dowodzenia (kontekst odkrycia przechodzi więc w kontekst uzasadnienia), a z drugiej strony, w trakcie rozwoju nauki pewne stare schematy rozumowania okazują się błędne, co prowadzi w konsekwencji do generowania nowych pojęć (kontekst uzasadnienia staje się więc kontekstem odkrycia).

Matematyzowalność przyrody jest faktem mającym potwierdzenie w dziejach matematyki. Odwołując się znowu do pojęcia grupy można stwierdzić, że w pewnym momencie historycznym pojęcie grupy zostało z powodzeniem zastosowane w fizyce jako model opisu zjawisk fizycznych. Odkryte pojęcie grupy stało się podstawą struktury uzasadniającej – w oparciu o nie możemy opisywać i wyjaśniać wiele zjawisk fizycznych. I w tym sensie historia nauki jest pierwotna w stosunku do nauki i refleksji nad nią – wszystkie „istotne” fakty historii nauki są elementami struktury nauki współczesnej, która powstała kumulując w pewną logiczną całość wcześniejsze fakty.

Fakty historyczne nie są jednak gotowym materiałem czekającym na badacza w zakamarkach bibliotek i archiwum. Gdy w interpretacji F. Kleina i H. Poincaré'go pojęcie grupy (wraz z pojęciem niezmiennika) tworzy nową filozofię nauki, to właśnie ta filozofia pozwala dopiero dostrzec wiele nowych faktów w historii matematyki i fizyki – można powiedzieć, że tworzy te fakty jako znaczące w historii nauki.

Myślę, że dobrym przykładem jest konstrukcja siedemnastokąta foremnego wymyślona przez Gaussa. Gauss przywiązywał do tej konstrukcji bardzo dużą wagę – uważał ją za swoje największe matematyczne osiągnięcie. Mając na uwadze ogromny dorobek naukowy tego uczonego trudno jest tę rzecz zrozumieć bez spojrzenia na metodę tej konstrukcji poprzez teorię grup. Okazuje się, że siedemnastokąt (jak również trójkąt i pięciokąt) foremny może być skonstruowany przy pomocy linijki i cyrkla, gdyż grupa jego automorfizmów jest grupą cykliczną, której rząd  $p - 1$  jest potęgą liczby 2, a dokładniej  $17 = 2^4 + 1$ . W przypadku wielokątów foremnych o 7, 11 czy 13 bokach taka konstrukcja jest niemożliwa<sup>12</sup>, co wynika z tego, że powyższa zależność dla tych liczb nie zachodzi. Metoda Gaussa została uogólniona dzięki zastosowaniu struktury grupy do metody rozstrzygającej o nieistnieniu rozwiązań równań wielomianowych stopnia większego niż 4 (wykorzystano grupy Galoisa).

Dopiero powstanie teorii grup Galoisa sprawiło, że konstrukcja Gaussa stała się znaczącym oraz istotnym faktem w historii matematyki. Teoria grup

okazuje się skuteczna nie tylko dlatego, że partycypuje w logicznej strukturze świata (i języka), lecz przede wszystkim dlatego, że pozwala na spójną i logiczną reinterpretację zdarzeń historycznych. Bez zastosowania tego pojęcia wiele faktów z historii matematyki i fizyki tkwiłoby w mroku nieracjonalności i tajemniczości. A właśnie te fakty w dużej mierze są podstawą wyjaśniania problemu matematyzowalności przyrody. To dlatego przy pomocy prostej formuły matematycznej można podać warunek konstruowalności wielokątów foremnych, że u podstaw tego warunku tkwi pojęcie grupy stanowiące jego kościec logiczny. Długie dzieje rodzenia się tak prostego (z logicznego punktu widzenia) a zarazem tak skutecznego pojęcia, jak pojęcie grupy, pokazują, że dostrzeżenie go nie było sprawą łatwą i wymagało czerpania z wielu źródeł.

Tak jest również z faktem matematyzowalności przyrody. Patrzenie na dzieje matematyki przez pryzmat tego faktu pozwala na wychwytywanie tych pojęć, które prowadzą do racjonalnej interpretacji dziejów. Do tych pojęć należy pojęcie grupy (analizowane powyżej), odwzorowania, zbioru, nieskończoności czy *continuum*. To właśnie te pojęcia, ubrane w odpowiednie teorie matematyczne, mogą stanowić filozofię matematyki, czyli narzędzia pozwalające widzieć fakty historyczne. Analizując np. konstrukcję siedemnastokąta foremnego przez Gaussa zbliżamy się stopniowo do zrozumienia czym jest matematyzowalność przyrody.

Przyjrzyjmy się nieco bliżej jak ta kwestia wygląda w przypadku podanej przez Gaussa metody konstrukcji siedemnastokąta foremnego. Dla uproszczenia przeanalizujemy analogiczną metodę konstrukcji pięciokąta foremnego.

Pierwiastki zespolone z jedności, czyli pierwiastki równania  $z^5 - 1 = 0$ , tworzą na płaszczyźnie zespolonej wierzchołki pięciokąta foremnego. Jednym z pierwiastków jest jedynka, a ponieważ  $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$  wystarczy znaleźć pierwiastek równania

$$(*) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Istotne jest to, aby ten pierwiastek można było wyznaczyć przy pomocy równań stopnia co najwyżej drugiego, bo jest to równoważne z możliwością konstrukcji przy pomocy cyrkla i linijki (działania dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz podnoszenie do potęgi drugiej czy wyciąganie pierwiastka stopnia drugiego są właśnie tymi działaniami, które można wykonać geometrycznie przy pomocy cyrkla i linijki). I rzeczywiście, ponieważ  $z^4 = 1/z$ , a  $z^3 = 1/z^2$ , otrzymujemy:  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 1/z + 1/z^2 + z^2 + z + 1 = (z + 1/z)^2 + (z + 1/z) - 1 = x^2 + x - 1$ , przy czym  $x = z + 1/z$ . W celu znalezienia pierwiastka  $z$  należy rozwiązać dwa równania kwadratowe:  $x^2 + x - 1 = 0$  oraz  $z^2 - x_0 z + 1 = 0$  (podstawiając wyliczony z pierwszego równania pierwiastek  $x_0$ ). Analogicznie jest w przypadku siedemnastokąta foremnego, tyle że w celu znalezienia drugiego wierzchołka (oprócz 1) należy rozwiązać zestaw czterech równań kwadratowych. Okazuje się, że tak szczęśliwe rozłożenie wyrażenia  $z^{p-1}$



$+ z^{p-2} + \dots + z + 1$  na układ wyrażeń kwadratowych nie jest możliwe w przypadku  $p = 7, 11, 13$ <sup>13</sup>.

Dalszy rozwój matematyki pokazał, że wyróżnienie liczb 5 i 17 (a dokładniej liczb  $4 = 5 - 1$  i  $16 = 17 - 1$ ) nie jest przypadkowe. Pierwiastki równania (\*) znajdują się na okręgu i są wierzchołkami kwadratu. Obrót o kąt  $90^\circ$  i jego wielokrotności tworzą grupę cykliczną  $C_4$  automorfizmów tych pierwiastków (są ich permutacjami). Podgrupą tej grupy jest grupa  $C_2$  składająca się z obrotu o kąt  $180^\circ$  i z identyczności. Na końcu znajduje się podgrupa  $C_1$  złożona z samej identyczności. Otrzymujemy następujący ciąg inkluzji:

$$C_1 \subset C_2 \subset C_4.$$

Każda z tych grup jest grupą cykliczną, której rząd jest potęgą liczby 2, odpowiednio 1, 2 i 4. Istotne jest to, iż indeks podgrupy  $C_1$  w grupie  $C_2$  oraz indeks podgrupy  $C_2$  w grupie  $C_4$  wynosi 2 - ten fakt decyduje o tym, że można rozwiązać równanie (\*) przy pomocy dwóch kolejnych równań kwadratowych. W przypadku siedemnastokąta foremnego otrzymujemy ciąg  $C_{16} \supset C_8 \supset C_4 \supset C_2 \supset C_1$  grup automorfizmów szesnastokąta, przy czym również rząd grupy  $C_{16}$  jest potęgą liczby 2, a indeks każdej z podgrup jest równy 2. Kolejną liczbą pierwszą o tej własności jest liczba  $257 = 2^8 + 1$ . Okazuje się, że o konstruowalności wielokąta o  $n$  bokach decyduje grupa automorfizmów rzędu  $n - 1$ , czyli pewna ukryta symetria algebraiczna tego wielokąta<sup>14</sup>.

## 5. Matematyka a rzeczywistość

Przeanalizujmy teraz problem matematyczności przyrody poprzez analizowaną w tej pracy ideę nauki uniwersalnej, która pojawiła się w XIX wieku. Na początku chciałbym wyszczególnić trzy aspekty („części składowe”) problemu matematyzowalności przyrody.

I. Występuje kontrast między znikomą i mało dokładną bazą empiryczną teorii, a jej przewidywaniami, które stosują się do dużej liczby zjawisk i są precyzyjne. Jak to się dzieje, że jesteśmy w stanie otrzymać z równań znacznie więcej niż w nie włożyliśmy?

II. W przypadku pewnych zjawisk przyrody (np. ruch ciał niebieskich, ruch cząstek elementarnych) możemy podać proste struktury matematyczne, które niemal w sposób algorytmiczny podają opis tych zjawisk, a więc dają prosty przepis budowy teorii fizycznej. Brak jest natomiast takich prostych struktur w przypadku innych zjawisk (np. meteorologicznych). Wskazuje to na te obszary rzeczywistości, w których obecna jest matematyka. Ponieważ stosowanie prostych struktur matematycznych może służyć jako kryterium rozróżniające różne typy zjawisk, więc nasuwa się kwestia rzeczywistej obecności tych struktur u podstaw zjawisk matematyzowalnych.

III. Kontakt struktur matematycznych ze światem fizycznym nie jest konieczny do wykonywania na poziomie tych struktur wnioskowań mających

konsekwencje empiryczne – w „najgorszym” razie dane równanie opisuje całą klasę zjawisk. Dokonując rozumowań na poziomie tych ogólnych klas możemy uzyskać znacznie więcej informacji niż dostarczyłaby nawet najbardziej wnikliwa obserwacja tego zjawiska. Schemat logiczny rozumowań odtwarza więc (lub przynajmniej symuluje) rzeczywisty przebieg procesów fizycznych. Dlaczego świat zjawisk daje się poznać dzięki schematom logicznym, czy logika tkwi u podstaw rzeczywistości?

Sformułujmy teraz klasyczne argumenty, które starają się pokazać, że problem matematyczności przyrody jest trywialny z filozoficznego punktu widzenia<sup>15</sup>. Te argumenty nie uwzględniają zasadniczo wniosków filozoficznych wypływających z nowej idei nauki uniwersalnej.

**Argument I.** Brak jest tajemniczości w fakcie, że równania matematyczne zawierają więcej treści niż dane, w oparciu o które zostały utworzone. Przecież prawo sformułowane w języku matematycznym jest na wyższym stopniu ogólności niż dane empiryczne, dotyczy więc szerszej klasy zjawisk i automatycznie musi mieć pewną „nadwyżkę” nad swą bazą empiryczną. Każdy opis (nie tylko matematyczny), o ile jest poprawny, posiada tego typu „nadwyżkę”, która wiąże się w naturalny sposób z ogólnością opisu.

**Argument II.** Również język potoczny nadaje się do opisu wielu zjawisk i sytuacji; aby więc opisać większą ilość zjawisk trzeba odpowiednio wzbogacić język o nowe pojęcia i struktury. Ten wzbogacony język może adekwatnie opisywać to, co obserwujemy.

**Argument III.** Nie istnieje możliwość podania algorytmu budowy poprawnej teorii. Niektórzy filozofowie nauki (m. in. John Barrow) zauważają, że stosowanie teorii grup (symetrii), daje w przypadku cząstek elementarnych, skuteczny przepis budowy poprawnych teorii fizycznych, natomiast nie ma takiego przepisu w odniesieniu do bardziej złożonych struktur np. w meteorologii czy ekonomii. Czy to oznacza, że na najgłębszym poziomie (poziomie cząstek elementarnych) przyroda jest matematyczna, że ktoś konstruujący zgodnie z teorią grup symetrii model fizyczny ma rzeczywisty wgląd w przyrodę? Według Van Fraassena brak jest takiego wynikania, ponieważ z tego, że teoria okazała się poprawna i dała ewentualnie jakąś informację o przyrodzie nie wynika, że teoria konstruowana zgodnie z tym przepisem musiała być poprawna. Takie wynikanie opiera się według niego wyłącznie na wierze w skuteczność tego przepisu i może zaistnieć dopiero po skonstruowaniu teorii. Problem matematyczności przyrody jest więc pseudoproblemem – otrzymujemy czysto tautologiczne rozumowanie: obserwujemy, że model skonstruowany zgodnie z pewną procedurą jest poprawny i wnioskujemy stąd o skuteczności tej procedury, a więc w konsekwencji, że daje ona wgląd w przyrodę.

**Argument IV.** Każdy poprawny opis (również w języku potocznym) daje możliwość przewidywania nowych zjawisk. Nie ma więc niczego tajemniczego w fakcie, że przyroda respektuje matematyczne regularności, że matematyka odsłania aspekty rzeczy i prowadzi do odkrycia nowych obiektów fizycznych. „Jeśli mamy dobrą mapę jakiegoś dużego miasta, która pokazuje, że przechodzą przez nie linie kolejowe, ale z jakiś powodów (np. wojskowych) na mapie tej nie jest zaznaczony dworzec kolejowy, to przewidzimy, że w mieście tym jest dworzec”<sup>16</sup>.

**Argument V.** Samo postawienie pytania, przez zwolennika matematyzowalności przyrody, o możliwość denotowania przez symbole matematyczne zarówno obiektów matematycznych, jak i struktur fizycznych, opiera się na szczególnej filozofii matematyki, w której przyjmujemy, „że symbole matematyczne oznaczają niematerialne i niepsychiczne obiekty”<sup>17</sup>. Tego typu skrajny platonizm trzeba po prostu odrzucić, gdyż w opisie matematycznym jakiegoś zjawiska użyta jest *implicite* cała matematyka jako struktura ściśle powiązanych ze sobą pojęć, i pojawiające się pytanie o znaczenie symboli matematycznych nie użytych w pierwotnym opisie, jest po prostu pytaniem o ich fizyczną interpretację – nic dziwnego, że poprawny opis ma fizyczną interpretację, że przyroda go respektuje.

**Argument VI.** Tak naprawdę, teoria opisuje jedynie to, co dane w doświadczeniu i nie tyle chodzi o opisanie jakiś teoretycznych przedmiotów, co o możliwość wyprowadzenia empirycznych konsekwencji. Pojęcie matematyzowalności sprowadza się więc do wymagania, aby w ramach opisu można było przeprowadzać wnioskowania tzn., aby opis ten był w jakimś sensie „logiczny”.

Zanim przejdę do polemiki z powyższymi argumentami, zdefiniuję dwa sposoby rozumowań, które zasadniczo różnią się od siebie – to rozróżnienie pozwala skoncentrować uwagę na tym, co istotne w problemie matematyczności przyrody.

1. Rozumowanie typu (I) – uważamy, że prawdziwość zdania  $p$  pociąga za sobą prawdziwość zdania  $q$ , jeśli zbiór tych zdarzeń, w których prawdziwe jest zdanie  $p$ , zawiera się w zbiorze zdarzeń, w których prawdziwe jest zdanie  $q$ .
2. Rozumowanie typu (o) – uważamy, że prawdziwość zdania  $p$  pociąga za sobą prawdziwość zdania  $q$ , jeśli zdarzenie opisywane zdaniem  $p$  jest przyczyną zajścia zdarzenia opisywanego zdaniem  $q$ .

W ramach rozumowania typu (I) mamy opisową funkcję matematyki, a w ramach tej funkcji pytania: dlaczego jakaś teoria matematyczna nadaje się do reprezentowania struktur fizycznych oraz jaki jest związek między własnościami języka potocznego a językiem matematycznym? Jak sądzę, właściwy problem matematyczności pojawia się dopiero w ramach implikacji (o) – sto-

sowanie w modelach fizycznych teorii matematycznych sprawia, że model ten zaczyna naśladować rzeczywiste procesy zachodzące w przyrodzie.

Ponieważ każda poprawna teoria zawiera się w zbiorze teorii posiadających „nadwyżkę”, więc w oczywisty sposób poprawna teoria posiada wspomnianą „nadwyżkę” (rozumowanie typu (I)), czyli teoria nie posiadająca tej „nadwyżki” nie może być poprawna. Tego typu implikacja wskazuje tylko na jeden, mniej interesujący problem w zagadnieniu matematyczności przyrody – jakieś fakty są postrzegane i podlegają interpretacji, co prowadzi do budowy ujmujących je teorii. Interesujące jest to, że teoria „widzi” fakty, które wcześniej, bez pomocy teorii, były niewidoczne; można powiedzieć, że teoria „stwarza” nowe fakty (dokonuje się to w ramach rozumowania typu (o)).

Nowe kryterium prawdy związane, między innymi, z konstrukcjami continuów nierozkładalnych, podkreśla rangę rozumowania typu (o). Prawda danych twierdzeń pojawiła się jako efekt wcześniej przeprowadzonych konstrukcji – bez nich byłyby niedostępna.

**Ad. 1** Sądę, że w przypadku rozumowania typu (o) ta „nadwyżka” nie jest efektem poprawności opisu, lecz na odwrót, z istnienia „nadwyżki” opisu nad bazą empiryczną wynika to, iż opis jest skuteczny i poprawny. Jak to się dzieje, że z modeli matematycznych mających „nieskończoną nadwyżkę” nad rzeczywistością zostają wybrane dokładnie te interpretacje, które „trafiają” w rzeczywistość. Istota problemu i cała tajemnica tkwi w istnieniu skutecznych opisów rzeczywistości, których „nadwyżka” jest „dużo” większa od bazy, w oparciu o którą powstała i, co najistotniejsze, z tej nieempirycznej „nadwyżki” bierze się skuteczność opisu. Jakaś „nadwyżka” występuje w każdym opisie, lecz jeśli ta „nadwyżka” jest niewspółmiernie duża w stosunku do bazy empirycznej, to dopiero wtedy zaczyna się dziać coś interesującego, co prowadzi do problemu matematyczności. Może pojawić się pytanie, dlaczego tak „mała” baza empiryczna jest wystarczająca do poprawności opisu nowych zjawisk. I pojawiają się jedynie dwie, jak sądzę, odpowiedzi:

1. Ujęte przez teorię dane doświadczalne są jej jedyną istotną częścią, nadającą „ton” całemu opisowi.

2. Część nieempiryczna opisu ma podobną strukturę do struktury rzeczywistości i stąd bierze się skuteczność opisu.

Nawet, jeśli odrzucimy odpowiedź drugą, to stwierdzony w punkcie pierwszym brak istotnego wpływu części nieempirycznej opisu na wyprowadzane w ramach teorii wnioski, pozostaje czymś tajemniczym i godnym analizy.

**Ad. 2** Sądę, że samo wzbogacanie języka o nowe pojęcia niewiele daje, trzeba odpowiednio wzbogacać i w tym „odpowiednio” tkwi tajemnica matematyczności. Nie tyle poprawność opisu pokazuje czy rozszerzenie języka jest „odpowiednie”, co historia poszukiwań właściwego rozszerzenia, aby uniesprzecznic i wyrazić to, co w starym języku prowadziło do sprzeczności i było



niewyraźalne. Język matematyczny nie tyle jest odpowiednio wzbogaconym językiem potocznym, lecz raczej optymalnie uproszczonym. „Cnotą” filozofii jest chwytnie tego, co nowe, próba wejścia w to, co jeszcze niepoznane. Natomiast w matematyce nie chodzi o opanowywanie coraz to nowszych obszarów rzeczywistości, lecz o precyzyjne zrozumienie obszarów już „opanowanych”. Matematyka upraszczając język potoczny dociera w pewnym momencie do struktur, które w sposób szczególny zaczynają nadawać się do opisu rzeczywistości. Skoro te uproszczone (a nie odpowiednio wzbogacone) struktury opisują rzeczywistość, to widocznie one ujmują jej istotę. Czy rzeczywiście nie ma niczego tajemniczego w tym, że odpowiednia ilość warstw ubrania (odpowiednio wzbogacony język) może zabezpieczyć przed chłodem. Oczywiście, jednak interesujące jest to, że zredukowana ilość warstw (proste struktury matematyczne) bardziej chroni przed chłodem niż ilość rozbudowana (język potoczny). Mnożenie bytów teoretycznych i struktur nie doprowadza najczęściej do większej adekwatności i precyzji opisu.

Tak jak uważa Van Fraassen celem nauki nie jest prawda, a jedynie empiryczna adekwatność. Pojęcie prawdziwości odnosi się tylko do obserwowalnej części teorii, a w przypadku obiektów teoretycznych nie ma sensu pytanie o ich prawdziwość czy fałszywość. W tym ujęciu więc traktuje się matematykę czystą jako zbiór pewnych symboli, a posługiwanie się nią jako grę na tych symbolach i oczywiście trudno jest wówczas wyjść poza opisową funkcję matematyki. Długą nazwę jakiejś rzeczy zapisujemy za pomocą skrótu, aby ułatwić przekaz informacji czy wręcz, w przypadku dłuższych konfiguracji, aby umożliwić ten przekaz. Ponadto, duża zwężłość symbolicznego zapisu daje znaczne możliwości wzbogacania języka o nowe pojęcia.

Przy takim rozumieniu matematyki pojawia się jednak zasadniczy paradoks. Jeśli założymy, że „przyrost” nowych zjawisk jest szybszy niż przyrost nowych teorii, to problem adekwatności opisu pozostaje. Przy założeniu natomiast, że przyrost nowych teorii jest większy od przyrostu nowych zjawisk, pozostaje problem wyboru między narastającą ilością teorii – na placu boju pozostaje nie coraz mniej, lecz coraz więcej teorii. Istnieje jeszcze możliwość, że przyrost zjawisk jest równoczesny z rozwojem teorii, czy z powstawaniem nowych – i ta równoczesność jest czymś zastanawiającym i wymaga wyjaśnienia.

### Ad. 3 Czy rzeczywiście to tylko pseudoproblem?

Sądzę, że argumentacja jest podobna, jak przy rozważaniu zależności między poprawnym opisem a nadwyżką nieempiryczną teorii. Trzeba również rozróżnić dwa typy rozumowania. Możemy oczywiście założyć, że poprawne teorie cząstek elementarnych są zawarte w zbiorze modeli mikroświata konstruowanych zgodnie z teorią grup symetrii lub ewentualnie zgodnie z inną teorią matematyczną. Bez zastosowania teorii grup symetrii, ani innej analogicznej teorii, nie uzyskamy poprawnego opisu przyrody – nie prowadzi do wniosku o algorytmicznej skuteczności stosowania języka matematycznego w opisie

zjawisk przyrody. Trzeba jednak oprzeć się na rozumowaniu typu (o) – modele fizyczne, stosujące np. teorię grup symetrii, w sposób poprawny i skuteczny symulują rzeczywisty przebieg modelowanych zjawisk. I tak należy rozumieć stwierdzenie, że stosowanie pewnych prostych modeli matematycznych daje skuteczny opis rzeczywistości.

**Ad. 4** Opis w języku potocznym pozwala czasem odgadnąć nieznanie wcześniej cechy świata. Cały problem jednak tkwi w słowie „czasem”, dzięki czemu otrzymujemy dwa możliwe wyjaśnienia tej kwestii:

1. Przewidywania w ramach języka potocznego mieszczą się w granicy „błędu”, mogą być wynikiem czystego przypadku.

2. Język potoczny może posiadać, przynajmniej w pewnych obszarach, cechy języka matematycznego (np. języka logiki).

Sądzę, że język potoczny jest w stanie przewidywać nowe zjawiska pod warunkiem, że partycypuje w języku matematyki, a więc nieprzypadkowe przewidywania nie są ogólną cechą każdego języka. Należy zatem scharakteryzować język matematyki, aby wydobyć te cechy, które pozwalają na przewidywania i zarazem odróżniają go od języka potocznego. Jedną z takich cech jest struktura logiczna, z czego wynika, że przyroda przynajmniej w pewnej części jest logiczna; są jednak również inne cechy tego języka np. możliwość generowania (konstrukcji) obiektów posiadających całkiem nowe własności. Ta cecha okazuje się ważniejsza od wtórnej wobec niej logiczności. Bowiem problem matematyczności wyrasta z następującego „paradoksu”: to, co przeczy intuicji ukształtowanej w oparciu o doświadczenie i tzw. logikę, odgrywa często w matematyce kluczową rolę i służy właśnie do opisu tejże rzeczywistości. I to jest, jak sądzę, rzecz zasadnicza, od której należałoby zacząć wszelkie dyskusje dotyczące matematyczności przyrody.

**Ad. 5** Jednak, czy to przypadkiem nie jest tak, że matematyka rozwijając się, wchłania pewne obszary fizyki, umożliwiając jej rozwój, wręcz pozwalając dostrzec różne fakty i problemy. Można by rzec, że matematyka wchłania fizykę, a nie jest przez nią wyłącznie używana, i to wchłanianie fizyki przez matematykę nie jest z całą pewnością funkcją wyłącznie opisową. Przykładów realizacji tego typu procesu historia fizyki dostarcza dostatecznie dużo.

Pojęcie ruchu jest przykładem pojęcia, które w trakcie rozwoju nauki zostało pochłonięte przez struktury matematyczne. Oczywiście, pojęcie ruchu związane jest ze strukturą geometryczną przestrzeni, w której go rozpatrujemy. Przestrzeń fizyki Arystotelesa opisywana jest przy pomocy geometrii euklidesowej – ta geometria opisuje strukturę wszystkich spoczywających ciał. Wszelki ruch w świecie opisywanym tą geometrią wymaga fizycznego wyjaśnienia. To fizyczne wyjaśnienie możliwe jest poprzez strukturę „miejsc naturalnych” tzn. każde ciało porusza się dążąc do swojego naturalnego miejsca.

W mechanice klasycznej ruchy inercjalne zostają ujęte poprzez strukturę geometrii afinicznej – następuje utożsamienie spoczynku z ruchem jednostajnym prostoliniowym. Jedynie ruchy nieinercjalne znajdują się poza strukturą geometrii i wymagają fizycznego usprawiedliwienia.

W przypadku geometrii nieeuklidesowej dzieje się podobnie (gdy staje się strukturą ogólnej teorii względności). Tym samym wszystkie rodzaje ruchów zostają włączone w strukturę geometrii. Z jednej strony, okazuje się, że istota ruchu polega na zmianie struktury geometrycznej przestrzeni, a z drugiej, geometria w coraz większym stopniu wyjaśnia pojęcie ruchu, zstępując tym samym argumenty fizyczne.

Przestrzeń fizyczna traci więc swoje kolejne własności – przejmuje je struktura geometryczna. W fizyce Arystotelesa przestrzeń geometryczna posiada wyłącznie własności przenoszenia ciał. W fizyce Newtona siły grawitacyjne są siłami „matematycznymi” (jak nazywał je Newton) tzn. struktura geometryczna przestrzeni również tę własność fizyczną przejmuje na siebie. W szczególnej teorii względności geometria przyjmuje dodatkowo własność przenoszenia oddziaływań elektromagnetycznych<sup>18</sup>.

Nie trzeba wcale wierzyć, że równania Lorentza oznaczają „niematerialny i niepsychiczny obiekt”, aby dostrzec możliwość wyprowadzenia z nich tzw. postulatów Einsteina (postulat względności i postulat stałości prędkości światła), czyli fizycznych własności przestrzeni. A z drugiej strony, z tych postulatów można wyprowadzić równania Lorentza. Trudno marzyć o większym zespoleniu obiektów matematycznych i fizycznych; dla zrozumienia tego zespolenia wystarczające jest czysto formalne przeliczenie.

**Ad. 6** Sądę, że stwierdzenie, iż logiczność jest jedynym elementem wspólnym rzeczywistości i opisu matematycznego (jak zresztą każdego opisu) wystarczającym do uzasadnienia, że struktura matematyczna nadaje się do opisu struktur fizycznych, jest daleko niewystarczające chyba, że zakłada się, iż podstawowe teorie matematyczne można sprowadzić do logiki lub samo pojęcie logiczności rozumie się bardzo szeroko. W powszechnym rozumieniu tego słowa do logiki nie daje się sprowadzić nawet arytmetyka będąca podstawą kolejnych teorii matematycznych.

Są pewne obszary matematyki, których nie stosuje się bezpośrednio do opisu zjawisk fizycznych, a jednak mówią one coś o rzeczywistości. W celu zastosowania opisu musimy mieć dostęp do opisywanych zjawisk – i tu sama teoria często nie wystarczy np. potrzebny jest rozwój aparatury badawczej. Najczęściej struktury matematyczne rodziły się najpierw na drodze powolnej ewolucji niezależnie od wszelkiej fizycznej interpretacji jako czyste abstrakcyjne obiekty – tak było na przykład z pojęciem grupy. Stosowanie grup przekształceń do opisu ruchu zdawało się nie mieć aż tak dużego znaczenia. Dopiero intensywny rozwój teorii grup i powstanie programu Kleina sprawiły, że dostrzeżono obszary rzeczywistości, w których struktura grupy ujawniła swoją moc.

Tym obszarem okazała się najpierw szczególna teoria względności związana z grupą przekształceń Lorentza oraz mechanika kwantowa. Jak sądzi H. Weyl bez teorii grup mechanika kwantowa nie mogłaby powstać. Grupy symetrii odgrywają bowiem znaczącą rolę w porządkowaniu widm atomowych i cząsteczkowych. Olbrzymia ilość zgromadzonych danych empirycznych, dotyczących linii widmowych, długości fal i prawidłowości w ich budowie, dopiero dzięki zastosowaniu pojęcia grupy została ujęta w formę praw fizyki. Dostrzeżono jak stała występująca w prawie serii Balmera jest związana z ładunkiem i masą elektronu oraz ze stałą Plancka. Zastosowanie pojęcia grup symetrii sprawiło, że ważną metodą badawczą w mechanice kwantowej stała się interpretacja widm i w ten sposób zostały wygenerowane nowe obiekty i prawa fizyki np. spin elektronowy i dziwny zakaz Pauliego<sup>19</sup>.

Matematyka, jako jedyna dziedzina wiedzy, ma szansę być niezmiennikiem operacji „meta” tzn. metamatematyka może być również matematyką. Filozofię matematyki można uprawiać przy pomocy narzędzi ściśle matematycznych - przykładem niech będzie formalizm Hilberta czy platonizm Fregego. I jest to możliwe mimo wąskiego i dość precyzyjnego określenia pojęcia „matematyka”. Jeśli dane pojęcie ma bardzo szeroki i niesprecyzowany całkiem sens, to trudno się dziwić, że może też wiele pomieścić. Oczywiście meta-refleksja jest też refleksją, meta-filozofia jest filozofią, czego w żadnym wypadku nie można powiedzieć o dziedzinach wiedzy mających określony zakres badawczy. Cóż bowiem znaczyłoby stwierdzenie, że metabiologia jest biologią? Przecież teorię biologiczną można traktować jako żywy organizm czy system podlegający prawom biologii tylko metaforycznie; inaczej zbyt szeroko byłoby rozumiane pojęcie przyrody ożywionej. Podobnie jest z innymi naukami szczegółowymi.

O czym świadczy wyróżniona rola matematyki wśród nauk szczegółowych w tej kwestii? Każda nauka, wśród nich matematyka, odnosi się do pewnej rzeczywistości. Może to być świat myśli, platońskich idei czy przedmiotów doświadczalnych zmysłowych - w zależności od przyjętej koncepcji filozoficznej. Jaką mamy gwarancję, że opis rzeczywistości nie jest tylko grą słów, symboli i znaków, że dana teoria, będąca przecież meta-rzeczywistością, faktycznie zawiera informacje o tej rzeczywistości - jest to klasyczny problem prawdy naukowej. Jednak w przypadku matematyki wznosząc się na poziom „meta” jesteśmy w stanie zachować (przynajmniej częściowo) strukturę matematyki - sugeruje to, że taka sytuacja ma miejsce również w przypadku przechodzenia od rzeczywistości do jej matematycznego modelu czy opisu. Jeśli więc cokolwiek z rzeczywistości zostaje ocalone przy przechodzeniu na poziom „meta”, to są to właśnie struktury matematyczne.

Istnieją w matematyce „nieredukowalne” pojęcia mające zarazem odniesienie do innych dziedzin wiedzy. Tych pojęć nie można, jak sądzę, zredukować ani do samej logiki, ani do konstrukcji mentalnych czy faktów empirycznych. Takim pojęciem jest np. indukcja matematyczna. Na tym pojęciu



załamał się program logicyzacji Fregego-Russela, jak również konstruktywizm Brouwera (okazało się, że przy pomocy indukcji matematycznej można udowodnić „zbyt dużo”). Jednak tego typu pojęcia oddziałują z innymi obszarami wiedzy. Poincare uważał, że prawdziwość każdego istotnego twierdzenia w matematyce opiera się na zasadzie indukcji matematycznej. Możliwość stosowania matematyki w naukach przyrodniczych również wiąże się, według niego, z działaniem tej zasady (uważa, że ta zasada to sąd syntetyczny a priori w sensie Kanta). Oczywiście inni matematycy przypisywali taką rolę i rangę innym pojęciom i zasadom. Na przykład dla Riemanna takim nieredukowalnym bytem matematycznym było pojęcie rozmierności, dla Dedekinda zasada ciągłości a dla Cantora pojęcie zbioru nieskończonego. Te pojęcia to jakby kanały łączące matematykę z innymi dziedzinami wiedzy – również z filozofią.

W analizowanym w tej pracy pojęciu *continuum* również możemy odnaleźć cechy świadczące o tym, że jest nieredukowalnym pojęciem. W miarę prosta definicja *continuum* topologicznego, którą można odnaleźć w podręcznikach topologii, ukazuje własności związane z ważnymi zagadnieniami filozoficznymi analizowanymi praktycznie od początku filozofii europejskiej. Należą do nich, między innymi: stary problem *arche*, paradoksy Zenona z Elei, analizy Arystotelesa dotyczące czasu i przestrzeni, problem definicji podstawowych obiektów geometrycznych, wykorzystanie liczb do mierzenia, spór o wielkości nieskończenie małe czy w końcu dyskusje dotyczące wymiaru przestrzeni, arytmetyzacji analizy i wprowadzanie nowych liczb rzeczywistych. Okazuje się, że twierdzenia, które pojawiają się w teorii *continuum*ów (np. twierdzenia Cantora, Sierpińskiego, Janiszewskiego, Mazurkiewicza) można traktować również jako udział w dyskusji nad zagadnieniami filozoficznymi. Dzięki temu widoczny staje się upór w dążeniu do przeprowadzenia pewnych zdawałoby się bezsensownych konstrukcji generujących wiele paradoksów (paradoksalność była wynikiem trwania w intuicjach wypracowanych w oparciu o wcześniejsze teorie matematyczne). Jednak to właśnie te konstrukcje stały się źródłem nowych pomysłów i podstawą dalszego rozwoju matematyki.

## Przypisy:

- <sup>1</sup> L. Wittgenstein, *On Certainty*, Oxford 1969.
- <sup>2</sup> M. Heidegger, *Sein und Zeit*, tł. Bogdan Baran, PWN, Warszawa 1994, s. 306.
- <sup>3</sup> Tamże, s. 307-308.
- <sup>4</sup> Tamże, s. 318.
- <sup>5</sup> Tamże, s. 321.
- <sup>6</sup> Tamże, s. 324.
- <sup>7</sup> I. Lakatos, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*. [w:] *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, s. 199-202.
- <sup>8</sup> I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge 1976.  
W. Wójcik, *Zastosowanie metody dowodów i kontrprzykładów w badaniach z zakresu historii i filozofii matematyki*, [w:] „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki”, R.40:1995, nr 1 s. 21-39.
- <sup>9</sup> A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland Amsterdam, 1966.
- <sup>10</sup> Tamże, s. 6-23.
- <sup>11</sup> Platon, *Timajos*, tł. Paweł Siwek, Warszawa 1986, s. 69-94.
- <sup>12</sup> Gauss sformułował ogólne twierdzenie podające warunek konstruowalności wielokątów foremnych:  $n$ -kąt foremny jest konstruowalny cyrklem i linijką wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest postaci  $2^m p_1 p_2 \dots p_k$ , gdzie  $p_i$  są różnymi liczbami pierwszymi. Por. H. Weyl, *Symetria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 137-142.
- <sup>13</sup> W trywialny sposób możliwa jest konstrukcja dowolnego wielokąta foremnego o ilości boków będącej potęgą liczby 2 - wystarczy dzielić okrąg i kolejno każdą otrzymana w ten sposób część na dwie części. Jeśli natomiast  $m$  i  $n$  są liczbami względnie pierwszymi (np. 3 i 5), to wpisując w okrąg  $m$ -kąt i  $n$ -kąt foremny tak, aby pewien wierzchołek miały wspólny, otrzymujemy na okręgu dwa takie punkty, które są wierzchołkami  $mn$ -kąta foremnego. Ponieważ możliwa jest konstrukcja trójkąta i pięciokąta foremnego, można również skonstruować 9-kąt, czy 15-kąt foremny; analogicznie, możliwa jest konstrukcja 6-kąta, 10-kąta i 12-kąta foremnego. Problem konstruowalności dotyczy więc wyłącznie wielokątów foremnych, których ilość boków jest liczbą pierwszą.
- <sup>14</sup> Por. H. Weyl, *Symetria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 139.
- <sup>15</sup> Przy formułowaniu tych argumentów korzystam z pracy T. Placeka: T. Placek, *O pojęciu matematyzowalności przyrody*, „Kwartalnik Filozoficzny” 1995, T. XXIII, z. 2, 61-86.
- <sup>16</sup> Tamże, s. 81.
- <sup>17</sup> Tamże, s. 83.
- <sup>18</sup> W. Wójcik, *Pewna interpretacja konwencjonalizmu Poincaré'go*, „Kwartalnik Filozoficzny” 1993, t. 39-40, z. 3, s. 77-89.
- <sup>19</sup> Tamże, s. 132.



## Bibliografia:

1. Ajdukiewicz K., *Język i poznanie*, T. 1 i 2, Warszawa 1965.
2. d'Alembert J. R., *Différentiel oraz Limite*. [w:] *Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières (Mathématiques)*, T. 4 oraz 9, Paris-Liège 1784-1789.
3. Anderson R. D., *A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity*, „Ann. of Math”, (2) 67 (1958), p. 313-324.
4. Archimedes, *Послание к Эратосфену*. [w:] *Сочинения*, Moskwa 1962.
5. Arystoteles, *Fizyka*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dziela Wszystkie*, T. 2, Warszawa 1990.
6. Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dziela Wszystkie*, T. 2, Warszawa 1990.
7. Arystoteles, *O duszy*, tłum. P. Siwek, [w:] *Dziela Wszystkie*, T. 3, Warszawa 1992.
8. Arystoteles, *Topiki*, tłum. K. Leśniak, [w:] *Dziela Wszystkie*, T. 1, Warszawa 1990.
9. Asger A., *Matematyka w starożytności*, tłum. R. Ramer, Warszawa 1968.
10. Aull C. E. i Lowen R. (wyd.), *Handbook of the History of General Topology*, Dordrecht, Boston, London 1997.
11. Aull C. E. i Lowen R. (wyd.), *Handbook of the History of General Topology*, T. 2, Dordrecht, Boston, London 1998.
12. Ball Walter W. Rouse, *A short account of the History of Mathematics*, New York 1888.
13. Baumgarten A. G., *Metaphysica*, Hala Magdeburgica 1779.
14. Bell E. T., *Men of Mathematics*, Melbourne, London, Baltimore 1937.
15. Bell E. T., *The development of Mathematics*, New York, London 1940.
16. Bing R. H., *A homogeneous indecomposable plane continuum*, „Duke Math. J.” 15, 1948, s. 729-742.
17. Bing R. H., *Snake-like Continua*, „Duke Math. J.” 18, 1951, s. 653.
18. Bolzano B., *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*, 4 tomy, Leipzig 1837.
19. Bolzano B., *Die drey Probleme der Rectification, der Complination und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt*, Leipzig 1817.
20. Bolzano B., *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Praga 1804.
21. Bolzano B., *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851.



22. Bolzano B., *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague 1817.
23. Bottazini U., *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Trans. W. Van Egmond. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo 1986.
24. Bourbaki N., *Elementy historii matematyki*, Tłum. S. Dobrzycki, Warszawa 1980.
25. Boyer C. B., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*, Warszawa 1964.
26. *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Paris 1937.
27. Brouwer L. E. J., *Over der grondslagen der wiskunde* (praca doktorska); Tłum. angielskie: A. Heyting (wyd.), *Collected Works*, t. 1, *Philosophy and Foundation of Mathematics*, Amsterdam 1976.
28. Brouwer L. E. J., *Zur Analysis Situs*, „Math. Annalen” 68, 1910.
29. Cantor G., *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig 1883.
30. Cantor G., *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, „Mathematische Annalen” 5, 1872.
31. Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, część I, „Mathematischen Annalen” 15, 1879.
32. Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, „Mathematische Annalen” 17, 1881.
33. Cantor G., *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, „Mathematischen Annalen” 21, 1883.
34. Cantor G., *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, „n. J. Für die r. und a. Math.” 77, 1874.
35. Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Lipsk 1880-1908 (4 tomy).
36. Cantor M., *Sur l'Historiographie des mathématiques*, „Compte Rendu du Deuxième Congrès International”, Paryż 1902.
37. Carnot L., *Géométrie de position*, Paryż 1803.
38. Cauchy A. L., *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris 1821.
39. Cauchy A. L., *Mémoires de l'Académie des Sciences* 6, Paris 1827.
40. Crilly T., *The Emergence of Topological Dimension Theory*, [w:] *History of Topology*, Amsterdam, Lausanne, New York, Oxford, Shannon, Singapore, Tokyo 1999, s. 1-24.
41. Dauben J. W., *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of Infinite*, Cambridge, Massachuset, London. 1979.
42. Dedekind R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Leipzig 1872.
43. Descartes R., *Rozprawa o metodzie*, Tłum. Wanda Wojciechowska, Warszawa 1988.
44. Descartes R., *Medytacje o pierwszej filozofii*, Tłum. Izydora Dąmbska, Warszawa 1958.
45. Descartes R., *Zasady filozofii*, Tłum. Izydora Dąmbska, BKF, Warszawa 1960.
46. Dirichlet P. G. L., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 4.
47. Duda R., *O pojęciu wymiaru*, Warszawa 1972.

48. Duda R., *Wprowadzenie do topologii*, część 1, Warszawa 1986.
49. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. 1-4, Lipsk 1898-1934.
50. Engelking R., *Topologia ogólna*, Warszawa 1976.
51. Frege G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wrocław 1884.
52. Frege G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1 Aufl., Halle 1879.
53. K. Rotter [tłum.], *Próby gramatyki filozoficznej*, Wrocław 1997.
54. Gauss C. F., *Werke*, Göttingen 1870-1927.
55. Gauss C. F., *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, T.2, Altona 1860.
56. Grua G., *Textes inédits de G. W. Leibiz d'après les Manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre*, Paryż 1948.
57. Günther S., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (4 tomy), Leipzig 1908.
58. Hadamard J., *Psychologia odkryć matematycznych*, Warszawa 1964.
59. Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914.
60. Heidegger M., *Sein und Zeit*, Tłum. Bogdan Baran, Warszawa 1994.
61. Heine E., *Ueber trigonometrische Reihen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 71.
62. Henderson G. W., *Proof that every Compact Decomposable Continuum which is Topologically Equivalent to each of its Non-Degenerate Subcontinua is an Arc*, „Ann. Of Math”. 72 (1960), s. 421-428.
63. de l'Hospital G. F. A., *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696.
64. Hurewicz W., Wallman H., *Dimension theory*, Princeton 1941.
65. Husserl E., *Die Idee der Phänomenologie*. Tłum. J. Sidorek, Warszawa 1990.
66. Husserl E., *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentionalhistorisches Problem*, [w:] *Revue Internationale de Philosophie* 1939, R. 1, Nr 2.
67. Janiszewski Z., *Zagadnienia filozoficzne matematyki*, „Poradnik dla samouków”, T. 1, Warszawa 1915.
68. Janiszewski Z., *Sur les continus irréductibles entre deux points*, These, Paris, Gauthier-Villars, 1911.
69. Janiszewski Z., *O rozcinaniu płaszczyzny przez continua*, „Prace Matematyczno-Fizyczne” 26 (1913).
70. Janiszewski Z., *Über die Begriffe „Linie” und „Flache”*, „International Congress of Mathematicians”, Cambridge, August 1912.
71. Janiszewski Z., Kuratowski K., *Sur les continus indécomposables*, „Fund. Math.” 1 (1920), s. 212.
72. Johnson Dale M., *L. E. J. Brouwer's Coming of Age as a Topologist*, „Studies in the History of Mathematics”, ed. Esther R. Phillips, t. 26, s. 61-97.
73. Johnson Dale M., *Prelude to dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano*, „Arch. History Exact Sci.” 17 (1977) s. 281.

74. Johnson Dale M., *The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, Part I. „Arch. History Exact Sci.” 20, 1979, s. 97-188.
75. Johnson Dale M., *The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, Part II, „Arch. History Exact Sci.” 21, 1980, s. 85-266.
76. Jones F. L., *A History and Development of Indecomposable Continua Theory*, Michigan State University, Ph. D., 1971.
77. Jordan C., *Cours d'Analyse*, T. 1 Paryż 1883.
78. Juskiewicz A. P. (red.), *Historia matematyki*, Warszawa 1975.
79. Kant I., *Krytyka czystego rozumu*, Tłum. R. Ingarden, Warszawa 1957.
80. Kästner G., *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv. Der mathematische Anfangsgründe*, wyd. 6, Göttingen 1800.
81. Kästner G., *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Göttingen 1976 (4 tomy).
82. Knaster B. i Kuratowski K., *Probleme 2*, „Fund. Math.” 1 (1920).
83. Knaster B., *Un continu dont tout sous-continu indecomposable*, „Fund. Math.” 3 (1922), s. 247-286.
84. Knaster B., *Zygmunt Janiszewski (w czterdziestą rocznicę śmierci)*, „Wiadomości Matematyczne”, (1960), s.1-9.
85. Wilbur R. Knorr, *Archimedes and the Elements: Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus*, „Arch. History Exact Sci.” 19 (1978), s. 211-290.
86. Kordos M., *Wykłady z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996.
87. Kronecker L., *Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 99 (1866), s. 329-371.
88. Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977.
89. Kuratowski K., *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*, „Fund. Math.” 3, 1922.
90. Kuratowski C., *Topologie* (2 tomy), Warszawa 1952.
91. Kuzańczyk M., *O oświeconej niewiedzy*, Kraków 1997.
92. Lagrange J. L., *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797.
93. Lakatos I., *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, [w:] *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, s. 199-202.
94. Lakatos I., *Proofs and Refutations*, Cambridge 1976.
95. Lanza D., *Anassagora. Testimonianze e frammenti*, Firenze 1966.
96. Leibniz G. W., *Early Mathematical Manuscripts*, Chicago 1920.
97. Leibniz G. W., *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*, Paryż 1903.
98. Lennes N. J., *Curves in non-metrical analysis situs*, „Bull. Amer. Math. Soc.” 12 (1905-6), s. 284.
99. Lhuillier S., *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlin 1786.
100. Loria G., „Bulletin des sciences mathématiques”, 1885.
101. Mazurkiewicz S., *Sur les continus indecomposables*, „Fund. Math.” 10, 1927, s. 305-310.

102. Mazurkiewicz S., *Un théorème sur les continus indécomposables*, „Fund. Math.” 1, 1920, s. 38.
103. Mazurkiewicz S., *Sur l'existence des continus indécomposables*, „Fund. Math.” 25, 1935, s. 327-328.
104. Mazurkiewicz S., *Sur les continus homogènes*, „Fund. Math.” 5, 1924, s. 137-146.
105. Mioduszeński J., *Ciągłość*, Warszawa 1996.
106. Moise E. E., *An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinuum*, „Trans. Amer. Math. Soc.” 63, 1948, s. 581-594.
107. Molland A. G., *An Examination of Bradwardine's Geometry*, „Arch. History Exact Sci.” 19, 1978, s. 113-175.
108. J. E. Montucla J. E., *Histoire des mathématiques*, Paris 1758-60.
109. Newton I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Cambridge 1972.
110. Pawlikowska-Brożek Z., Zygmunt Janiszewski – organizator nauki, autor idei polskiej szkoły matematycznej, „Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego”, 1992, s. 45-52.
111. Pedersen O., *Konflikt czy symbioza*, Tarnów 1997, tłum. Wł. Skoczny na podstawie wykładów O. Pedersena wygłoszonych w Cambridge w 1988.
112. Placek T., *O pojęciu matematyzowalności przyrody*, „Kwartalnik Filozoficzny” 1995, t. XXIII, z. 2, s. 61-86.
113. Platon, *Fajdros*, [w:] *Dialogi*, Warszawa 1993.
114. Platon: *Obrona Sokratesa*, Warszawa 1984.
115. Platon, *Timajos*, Warszawa 1986.
116. Popper K., *Epistemologia bez poznającego podmiotu*, [w:] *Wiedza obiektywna*, Warszawa 1992.
117. Raman M., *Understanding Compactness: A Historical Perspective*, „M.A. thesis in Mathematics”, Berkeley 12.XII.1997.
118. Riemann B., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*, wyd. H. Weber i R. Dedekind, B. G. Teubner, Leipzig 1876.
119. Riemann B., *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, „Habilitationsschrift”, Göttingen 1867.
120. Riesz F., *Die Genesis des Raumbegriffes*, „Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn” 24, 1906, s. 309-353.
121. Riesz F., *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti IV Congr. Intern. Mat., Roma 1908, II, s. 18-24.
122. Robinson A., *Non-standard Analysis*, Amsterdam 1966.
123. Rosenzweig F., *Gwiazda Zbawienia*, tłum. T. Gadacz, Kraków 1998.
124. Schoenflies A., *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*, I, „Math. Ann.”, 58, 1904, s. 195-238.
125. Sextus Empiricus, *Against the Physicists. Against the Ethicists*, Trans. R. G. Bury, Cambridge, Massachussets, London 1936.
126. Sierpiński W., *Pewne twierdzenie o kontynuach*, „Wiadomości Matematyczne”, t. XXIII, z. 4, s. 181-189.
127. van Stigt Walter P., *Brouwer's Intuitionism*, [w:] *Studies in the History and Philosophy of Mathematics*, vol. 2, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo 1990.



128. Tannery P., *Bulletin des sciences mathématiques*, część I, 1905.
129. Tarski A., *Pisma logiczno-filozoficzne*, Prawda, T. 1, Warszawa 1995.
130. Tarski A., *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Oxford University Press 1994, Tłum. M. Sujczyńska, *Wprowadzenie do logiki*, Filia Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku, PHILOMATH.
131. Thom R., *Les mathématiques et l'intelligible*, „Dialectica” 29, 1975, s. 71-80, Tłum. R. Duda *Matematyka a rozumienie*, „Wiadomości Matematyczne” XXIII, 1981, s. 205-212.
132. Thom R., *Czy możliwa jest matematyka kontinuum*, „Wiadomości Matematyczne” XXIV.1, 1982, s. 17-21, tłum. A. Krzywicki.
133. Thomas I., *Selecting illustrating the History of Greek Mathematics*, London, Cambridge, Massachussets 1939.
134. Torretti R., *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht-Boston-Lancaster 1978.
135. Yoneyama K., *Theory of Continuous Sets of Points*, „The Tohoku Mathematical Journal” 12 (1917), s. 43-158.
136. Young W. H. i Young G. C., *The theory of sets of points*, Cambridge 1906.
137. Urysohn P., *Memoire sur les multiplicities cantorienes*, „Fund. Math”. 8 (1926), s. 243.
138. Vetter Q., *O metodyce historii matematyki*, „Wiadomości Matematyczne”, t. XXX (1928).
139. Weierstrass K., *Mathematische Werke*. Berlin 1927.
140. Weyl H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton 1949.
141. Weyl H., *Symetry*, Princeton 1952, Tłum. Stefan Kulczycki, *Symetria*, Warszawa 1997.
142. Weyl H., *The Continuum: a Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Tłum. St. Pollard i Th. Bole, Princeton 1987.
143. Whewell W., *History of Scientific Ideas* (2 tomy), Londyn 1858.
144. Wilder R. L., *Evolution of the topological concept of „connected”*, „Amer. Math. Monthly” 85 (1978), s.720-726.
145. Wittgenstein L., *On Certainty*, Oxford 1969.
146. Wójcik W., *Imre Lakatos a filozofia matematyki*, „Roczniki Filozoficzne” 1991-92 t. 39, z. 3, s. 77-89.
147. Wójcik W., *Zastosowanie metody dowodów i kontrprzykładów w badaniach z zakresu historii i filozofii matematyki*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki”, R.40:1995, Nr 1, s. 21-39.
148. Wójcik W., *Pewna interpretacja konwencjonalizmu Poincare'go*, „Kwartalnik Filozoficzny” (1993), t. 39-40 z. 3, s. 77-89.
149. Zeuthen H. G., *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, G. B. Teubner, Leipzig 1903.

## Summary

The study discusses the concept of *continuum*, as it has appeared in topology. The first subsection concentrates on the different methodological approaches to the history of mathematics. Special attention is paid to Vetter's conception of genetic history, stressing the fact that the history of mathematics has its specific tasks and its own context.

Subsection 2 analyses the context of the history of science. The author shows that the history of science makes sense only when it refers to „the logic of development” of scientific theories, which is independent (at least to a certain degree) of the developed theory. Lakatos' conception has been quoted as an example of a search for internal logic in the development of mathematics. It explains the possibility of considering the context of the history of science without making the science relative or dependent on changeable historical circumstances.

The method of Lakatos is thoroughly discussed in subsection 3, based on analyses included in the book *Proofs and Refutations*. When discussing the discovery of the concept of uniform convergence (Lakatos neither actually discover it nor time its appearance), the mechanism known as the method of *proofs and refutations*, i.e. the logic of development responsible for its origin, is set out. The method of proofs and refutations is a general pattern of mathematical discovery or development of mathematical theories. It concentrates on three strictly interconnected elements: the proof of a theorem, the refutation to the theorem, and the definitions of concepts applied to the theorem. It appears that none of these elements makes sense in its own right, and only the system of these elements exists as a mathematical object, endowed with its own identity.

Further, the chapter concentrates on the generalisation of Lakatos' pattern referring to the logic of discovery and the development of mathematical concepts, and to the attempt to observe, in this pattern, research on the history of mathematics. The main tools of such a generalisation are Tarski's theorems, referring to his definition of truth, to the deduction theorem and to the conception of truthfulness of Frege's statements. In subsection 6 the author, following the observations made

above, discusses the pattern used in the analysis of the history of mathematical structures, such as concepts and proofs. The analyses, included in the study, follow this pattern.

The historical research pattern, presented in the first chapter, serves as the basis for the analysis concerning the concept of *continuum*, presented in Chapter II. The intuition of *continuum* is based on two properties: infinite divisibility and contiguity of neighbouring parts. Following a brief description of the general characteristics, the author presents the relationship between the problem of *continuum* and the search for *arche*.

In order to „reinforce” primitive intuitions, in subsection 2 the author defines the concept of (topological) *continuum* from the topological perspective. He explains the way constituents of a topological concept of *continuum* (compactness and connectedness) respond to the intuitive understanding of this concept.

In subsection 3, the „technical” problem of Demiurg, i.e. how to connect the idea and matter is an opportunity to present the significance of mathematical structures, and to understand the problem of *continuum*. Particularly, the Eudoksian theory of proportions throws light upon the method of connecting naturally separated objects by means of appropriate mathematical structures. How to assemble numbers in one *continuum*? How to use numbers to measure geometrical quantities? Is it enough to say that, in a sequence of rational numbers, there are no consecutive numbers? Is passing between two arbitrary numbers possible?

The problem became crucial when some geometrical quantities, which could not have been described by means of a ratio of numbers, were discovered, mainly the ratio of the length of a square diagonal to the length of its side. It seemed that there was no „contiguity” in rational numbers. The Archimedean principle appeared to be the only tool to give contiguity to rational numbers. However, the situation gets complicated when some philosophical questions are posed in reference to the problem of *continuum*. Here, Aristotle’s analyses (presented in subsection 4) and Zeno of Elea’s paradoxes (subsection 5) show the difficulties in understanding the concept of *continuum* and seem to be especially topical and outstanding. Aristotle’s considerations result in the following characteristics of *continuum*:

- I. It can be divided an infinite number of times, and at every stage of this division we receive *continuum*;
- II. It is not composed of separate elements; all elements are coherent to one another;
- III. Each point of a *continuum* is characterised by such a property that there are different elements of *continuum* close to it.

In subsection 5, in an attempt to describe the major difficulties in understanding and use of the notion of *continuum*, the author presents the analysis of

Eleatic paradoxes, which attack the reality of *continuum*. Many key issues undertaken by the ancient philosophers seem to be focused on the concept in question. The assumption that *continuum* really exists seems to be necessary in order to understand, or solve, the problems being discussed. The discrepancies we meet while analysing *continuum* prove that we do not understand some evident issues but it does not mean that *continuum* is irrational in any way. It appears that neither formal nor intuitive reasoning is sufficient to explain this problem. Thus, there appears a primitive hypothesis as a comment to the Eleatic paradoxes.

The considerations included in the third chapter create a philosophical climate, which will dominate further discussion. The concepts of „a philosophical fact” and „cognitive absolute” and examples of their appearance in the work of various philosophers (subsection 1 – subsection 11), will be used in the last Chapter in order to show the influence of mathematics on the theory of recognition in philosophy. In Pythagorean and Platonic philosophical reflections, this influence, as well the problem of a contradiction between clarity and unambiguity of mathematical truths and the character of reality to which these truths apply, effected in creating the idea of mathematics as *mathesis universalis*. It was to be the source of all true knowledge and the foundation of other sciences. Only mathematics set a range for truth and all reality. Aristotle’s conception opposed such an understanding of mathematics. He solved the above problem by the distribution of competence and tasks of various sciences. The method described by Archimedes referred to the idea of *mathesis universalis*. However, it was different from both the Pythagorean and Platonic conceptions and, in a competent way, it opposed the „distribution of roles” proposed by Aristotle.

These views on *mathesis universalis* are analysed in the second part of the chapter (subsection 12 – 15). The author presents three approaches to mathematics as *mathesis universalis*: Platonic, Pythagorean and Archimedean. In contrast to Aristotle’s conception, where reality is divided into separate spheres subordinated to certain sciences, the three approaches mentioned above assume that the knowledge forms a unity.

Apart from the main similarities, there are important differences between these approaches. Thus, we can talk about three different ancient models of *mathesis universalis*:

1. Pythagorean model. In this model, at the beginning of development of knowledge we have an entity (experienced as the only and true reality), which is the support of information. At every stage of development, contact with this information is necessary. Scientific methods constitute a way of processing the primitive truth into knowledge, which always results in some destruction of the truth. Truth is given at the beginning, at the primitive insight. Historical research within the scope



of this model consists in the attempt to move back in order to reach the original truth, which – absorbed by the constructed knowledge – was transformed and ceased to be fully available to our mind.

2. Platonic model. Reality cognised in a non-mathematical way does not have any information value for a human mind because our mind originally recognises reality as a Dyad, which includes contradictory elements. Only scientific (mathematical) methods extract the truth from reality; they devoid the cognised reality of contradictions and make it capable of carrying information. The truth is visible to human minds only through constructed science. Within this model, historical research looks for such places in research development where (by means of scientific methods) "illumination" of reality, originally veiled, has happened.

3. Archimedean model. Truth has not been given at the beginning, nor is it a result of a mathematical method. A mathematical proof includes only certain truth in the structures of mathematics and shows a mathematical sense of this truth. We reach truth by means of other realms of knowledge and we are able to reach it by using research methods worked out there. This model shows that, in historical research, it is reasonable to follow the moments of interaction between various spheres of knowledge because it is when the „transfer” of truth happens.

In modern times, two new visions of *mathesis universalis* were formulated: Cartesian and Leibnizian. They referred to the great visions of ancient philosophers. They also stressed the importance of the role of mathematics that was additionally supported by rapidly developing science. As far as the construction of *mathesis universalis* was concerned, the theories worked out by Descartes and Leibniz were different in their approach to substance. Matter, as an extended substance, infinitely divisible, could not be used as the basis for knowledge construction in the case of Descartes. A given part of matter, divided into smaller parts, will never give a „simpler” part. For Descartes, the whole construction was based on pure, simple methods, derived from the mathematics of his times, i.e. algebra and geometry. However, rational passes between the elements of a given sequence of reasoning were of a discrete nature because there was a leap between various elements of reality (substances). Therefore, the structure of reasoning had to be discrete.

At first we define two different fields, then we discover whether we create the methods allowing the transition from one field to another. The methods result in the appearance of primitive elements of every field. By means of methods connecting the elements in question, we are able to comprehend new entities and concepts, the process itself being a gradual one.

Cognitive absolute plays an essential role in the conception of *mathesis universalis*. For Descartes, *cogito* is a limit object of a radical doubt process. Only after experiencing *cogito*, the cognition of reality begins. Radical doubt itself is the essence and condition of *cogito*; it is the cognitive absolute. Thanks to the method

of radical doubt, a new being – a thoughtful substance – is discovered or created. The next generator of substance, i.e. the proof for the existence of God, allows us to reach the extended substance. In this way, the Cartesian proof for the existence of God becomes the next cognitive absolute. Therefore, we have two originally disjunctive fields, generated and connected by means of cognitive absolutes: the method of radical doubt, the proof for the existence of God, and various scientific methods. Cognitive absolutes play the role of supports of the concept of truth and designate the methods of knowledge construction. Moreover, they indicate the level of development of science.

Leibniz presents this problem in a different way. The matter is also infinitely divisible, however, at a certain stage of division, a new quality monad appears. For an external observer, any further division of this monad is impossible; however, internal activity of a monad is responsible for its ability to enter the depths of being inside. Unlike Descartes, scientific methods for Leibniz (rules of logic, the principle of continuity, the method of exhaustion) do not result from a certain limit process (e.g. radical doubt) but they do precede human intellectual activity. A limit process, i.e. reduction of being to the simplest elements, provides us with basic concepts to build the whole knowledge. We are able to understand these concepts due to pre-mathematical intuition. For Leibniz, the general pattern of knowledge construction is different from that of Descartes. The rules of logic, the principle of continuity and other principles (among others the Archimedean method of exhaustion), are cognitive absolutes; they generate all beings and, contrast to the theory of Descartes, they are the elements of cognised reality. These principles are dependent on one another; they are superimposed upon one another (starting with the logical and ontological principle of identity). Due to it, the cognised reality is perceived as oneness (there is no Cartesian tear of being).

Despite various differences, both projects of *mathesis universalis* (of Descartes and Leibniz) are similar. Knowledge is constructed in two stages:

1. The INFINITARY stage, based on the limit process (radical doubt, or reduction of being until the simplest element, i.e. a monad, is obtained) as a result of which we obtain the basic elements necessary for further construction of knowledge. Descartes chooses scientific methods, Leibniz – quasi-mathematical beings (like a differential). Both scientific methods of Descartes and the beings of Leibniz are of universal value and they are supports of truth.
2. The FINITARY (construction) stage, where all possible knowledge is built out of basic elements, obtained in the first stage.

In the Descartes' theory, the first stage results in separate beings and methods permitting us to connect generated beings into one structure. Only this structure, restoring the unity of being, reflects the truth of reality. Scientific methods are the support of truth, and they cancel contradictions of entities recognised earlier. In

the theory of Leibniz, being is created in the first stage; it is a unity and a support of truth. Scientific methods are not to cancel contradictions between separate beings but only to reveal the primitive truth of a given being.

In the last two subsections of Chapter IV, the author discusses differences between the Cartesian and Leibnizian program of mathematization of knowledge, following the concept of a differential (and a limit) used by various mathematicians (de l'Hospital, Bolzano and Cauchy following the program of Leibniz and d'Alembert; Simon Lhuillier and Lagrange following the conception of Descartes). The concept of a differential (i.e. infinitesimal of Leibniz) served as the basis for the definitions of a derivative and integral, at least in the case of Leibniz. This concept, perceived as a metaphysical one due to its inaccuracy and mysteriousness, evoked a very emotional response. It was possible to get rid of it, however, with considerable complications to the calculations. On the other hand, dealing with something elusive and incomprehensible seemed to be unworthy of mathematics. The author explains why the inclusion of a new but inaccurate concept in mathematics was something acceptable in the Leibniz' program, and unacceptable for the program of Descartes. Discussions and analyses referring to the appropriate use of the concept of differential helped to present all problems connected with the mathematical interpretation of the idea of extensiveness.

In the XIX-th century, Bolzano and Riemann formulated a new program of mathematization of knowledge. It was the idea of *mathesis universalis*, following the *mathesis universalis* of Descartes or Leibniz. However, their programs were different from Descartes and Leibniz in some aspects. This new idea made deeper analysis of the idea of *continuum* possible.

In the first part of chapter V (subsection 1 and subsection 2 in part) the author concentrates on Riemann's philosophical reflection of knowledge. It serves as the basis for analysing the differences between the modern vision of *mathesis universalis* (the differences being defined mainly by Descartes and Leibniz) and a paradigm that emerges from the reflections of Bolzano and Riemann. Although Bolzano did not directly influence Riemann, the ideas of the latter may be regarded as a continuation of Bolzano's concepts in the sphere of reconstruction of mathematical foundations and building a new conception of *mathesis universalis*. Within this new conception, new ideas leading to the dimension theory, Dedekind's real *continuum* and Cantor's set theory were born. In Bolzano's project, there clearly appears the idea of reconstructing the logical foundations of mathematics. It was important for new mathematical fields, although they were mainly Riemann's papers that appeared to be essential. Bolzano's idea is analysed in subsection 3 and 4.

The following subsections (4, 5, 6, 7) deal with the analysis of the origin of theories formulated in the XIX-th century, extremely important for the understand-

ing of the mathematical sense of the concept of *continuum*. The theories in question are: a dimension theory (subsection 4), a real numbers theory (subsection 6), and a set theory (subsection 7). The author also presents some ideas of Riemann's, falling within his manifold theory, essential for understanding the problem of *continuum* (subsection 5).

Whereas, in the case of Bolzano, an attempt to define the foundations of geometry and provide „proper” definitions of key geometrical concepts made him formulate a definition of geometrical definition, the program of defining the foundations of calculus and providing precise definitions of concepts such as, e.g., continuity, limit, series, integral, infinitesimal, led R. Dedekind to give the definition of real numbers by means of algebraic methods. These efforts resulted in the formulation of algebraic *continuum*. Dedekind noticed a similarity between the structure of rational numbers and that of a geometrical line. It appears, however, that there are infinitely more points on a line than rational numbers, and therefore, they have a different kind of continuity. If we want to arithmetically express all the properties of geometrical *continuum* (which was Dedekind's wish), it is absolutely necessary to construct „a tool” made up of numbers including, apart from rational numbers, new, irrational numbers. It is to be done on the basis of rational numbers and their properties. Only then, new numbers have the same continuity as a geometrical line. This continuity is defined arithmetically as a special division of rational numbers (Dedekind's axiom). In this way, a rational number corresponds to each point on a geometrical line (a real line is devoid of „gaps” and it becomes complete). Instead of analysing a geometrical line and the points lying on it, we may consider a real line and the numbers that constitute it. New numbers were called „real”.

Cantor formulated basic topological concepts. However, in order to define them precisely, one had to define the concept of a set and make it a mathematical being which, in turn, required solving the problem of describing a function by means of a trigonometric series. In consequence, Cantor introduced a definition of real numbers, a concept of a limit point, interior, connectedness, and a perfect set. At last there appeared a definition of *continuum* as a set, which is perfect and connected. In the case of closed subsets of Euclidean space, Cantor's definition corresponded with the modern understanding of topological *continuum*.

The above theories are the basis for geometrical topology, especially the *continuum* theory, which is close to a new vision of *mathesis universalis*.

In subsection 8 the author, following the considerations and scientific output of Bolzano, Riemann, Dedekind and Cantor, analyses a new vision of *mathesis universalis* (closest to the Archimedean conception), and formulates its basic, characteristic elements. These elements are vital for the comprehension of changes that occurred in mathematics at the turn of XIX-th and XX-th century.



1. Introduction of the concept of set as a system of indivisibles.
2. Intuition is no longer a sufficient tool to create objects underlying the fundamentals of mathematics (e.g. the concepts of differential, continuity, limit, function in a modern scheme are seen as pre-mathematical, intuitively understood objects).
3. Building mathematical intuition on the grounds of constructions (originally they have a paradoxical, non-intuitive character) and definitions.
4. Incorporating the objects and concepts from other sciences into mathematics and preserving (at least to a certain extent) the meanings, references and primitive intuitions (e.g. the concept of infinity, continuity, *continuum*).
5. Generating new qualities through some infinite processes and limit processes, intolerable in earlier mathematical methods. Then, certain constructions have the qualities, which are not possessed by the objects underlying these constructions; at the same time they have many key qualities of the objects in question which is putting together seemingly contradictory qualities.

Chapter VI concentrates on the topological concept of *continuum* (and the Continuum Theory) that appeared in mathematics. The way this concept came into being was consistent with a new idea of *mathesis universalis*, created in the XIX-th century. The papers of Brouwer and Janiszewski, written in the years 1910-1912, were the strongest stimulus for the origin of the Continuum Theory, and they resulted in receiving the first, meaningful effects.

The author starts the first subsection presenting Janiszewski's philosophy of mathematics and shows its conformity with a new vision of *mathesis universalis*. The next subsection concentrates on the topological concepts of connectedness and compactness, which appeared at the beginning of the XX-th century, and became the basis for the definition of *continuum*. The papers of Jordan (the concept of connectedness) and Frechet (the concept of compactness) were crucial.

The third subsection analyses the first indecomposable *continuum*, constructed by Brouwer. The method of universalism in mathematics worked out by Bolzano and Riemann was boldly carried on by Brouwer. In 1909, Brouwer constructed the first indecomposable *continuum*. He analysed theorems formulated and proved by Schoenflies concerning the fundamentals of plane topology, which were also an attempt to characterise plane curves. Brouwer noticed their falsehood; also the constructed *continuum* (indecomposable) was a counterexample for these theorems. Before Brouwer, it appeared that every *continuum* was decomposable, i.e. it could be presented as a sum of two proper (i.e. different from the wholeness) *sub-continua*.

Intuition, shaped upon current experience, is unable to imagine an indecomposable *continuum*. Such indecomposability seems to negate the essence of *continuum* as a set, which can be divided into arbitrary small parts (sub-continua).

In subsection 4, the author analyses Janiszewski's characteristic of theorems, concerning an arc and a sphere. Janiszewski, following his idea of mathematical research (just as Bolzano), dealt with basic geometrical figures in order to find the accurate fundamentals of geometry. His characteristics of an arc (each *continuum* locally connected and irreducible between two points is an arc) and of a sphere (if the sum of two optional *continua*, whose intersection is not connected, cuts a given space, which is additionally locally connected and without cut points, the space in question is homeomorphic with the sphere  $S^2$ ) were an important step towards understanding the mathematical aspect of the concept of *continuum*. Janiszewski, while studying e.g. irreducibility, constructed (following Brouwer's method) a *continuum* (indecomposable) and showed in it three such points that, between each pair of them, the *continuum* was irreducible. This feature appeared to be characteristic for indecomposable *continua*.

Subsection 5 discusses Janiszewski's paper, read out at the Congress of Mathematicians in Cambridge, 1912. It presents the most important results that triggered the development of the Continuum Theory (the works of Kuratowski, Janiszewski, Mazurkiewicz, Knaster, Bing and Moise). The second part of the paper, in which Janiszewski presented an example of a *continuum* that did not include any arc was of key importance. He stressed the weakness of the contemporary definitions of curves and surfaces. He wanted to construct such a *continuum* whose every part would include condensation *continua*. Such a *continuum* is obtained as a limit effect of condensation of singularities in an interval. Also, two questions, asked by Polish mathematicians, were essential for the development of the Continuum Theory. In 1920, Knaster and Kuratowski asked about the topological characteristics of a simple closed curve, which corresponded to Janiszewski's program. The question was as follows: Does each homogeneous *continuum* lying on a plane have to be a simple closed curve?

The search for the answer to this question influenced the development of geometrical topology. New mathematical objects were created, which was a counterexample of the formulated hypothesis. The question asked by Mazurkiewicz in 1921 also reflected an important problem: Does each plain *continuum*, homeomorphic with any of its undegenerated *sub-continua*, have to be an arc? It made Knaster (1922) and Moise (1948) construct a *continuum* that was hereditarily indecomposable, called a pseudo-arc (it was a counterexample to questions asked earlier). Knaster used „the method of bands” to construct the first hereditarily indecomposable *continuum*.

Some years later, Mazurkiewicz proved a theorem saying that every compact space of dimension greater than one included an indecomposable *continuum*. Indecomposable *continua*, especially those hereditarily indecomposable, appeared to be important objects of research. All geometrical constructions known before were quite different from them, therefore, it was generally assumed that such *continua* appeared extremely rarely. The theorem proved by Mazurkiewicz means, however, that indecomposable *continua* appear frequently in mathematics. The definition of an indecomposable *continuum* seems to make the properties concerning the *continuum* itself quite absurd. Whereas in the case of any *continuum*, its decomposition into a countable sum of disjoint proper *sub-continua* (c.f. Sierpinski's theorem, chapter II, Par.2) is not possible, for indecomposable *continua* such decomposition is impossible in the case of any proper *sub-continuum*. This seems to be contradictory to the general idea of *continuum* as such being, which we can divide infinitely, obtaining smaller and smaller *continua*, from which – at every stage – the original *continuum* may be restored. This seems to support the conclusion derived from the paradox of dichotomy of Zeno of Elea. Aristotle thought that the *continuum* cannot be restored only from points (as discrete elements); here it appears that even undegenerated *sub-continua* are not fitted to this purpose.

The most important issue is to construct a hereditarily indecomposable *continuum*. Transferring the properties of indecomposability to any *sub-continuum* of a given *continuum* seems to deepen the problem in question. However, the possibility of constructing such a *continuum* shows that restoring the whole *continuum* out of its particular parts does not need to have a lot in common with „a method of a local sticking together of particular pieces”, but may be a kind of an instant connecting of all those elements. Consequently, there appears a possibility of maintaining the philosophical importance of the concept of *continuum*.

Subsection 6 shows the importance of constructing indecomposable and hereditarily indecomposable *continua* for taking over, by the concept of *continuum*, the role of a cognitive absolute.

On the grounds of the historical analyses presented in the previous chapters, Chapter VII analyses a new criterion of truth that refers to the new program of *mathesis universalis*. Some contemporary conceptions of truth (Pierce, Heidegger, Frege, Lakatos, Wittgenstein) are analyzed as an example of a new criterion of truth. The next part concentrates on the description of Robinson's non-standard analysis, in order to show the possibilities of further development of *continuum*, within a new vision of *mathesis universalis*. It shows, among others, that complementing rational numbers with irrational numbers does not remove „gaps” on a real line and that there are connected sets on a line, whose sets are not intervals. This fact may be of a great philosophical value: the lack of any kind of being may be

caused by insufficient logical tools. Therefore, a logical apparatus should be extended in advance, without paying attention to „Okham's razor". Only then can we obtain expected properties.

The last part presents the non-triviality of the problem of mathematization of nature, within a new vision of *mathesis universalis*. It is important to make use of the historical analyses worked out in this paper because only a broader context allows us to understand the significance of this problem. There are some arguments underlying the theory that the problem of mathematization is a non-trivial philosophical question. The most important argument claims that there are irreducible concepts in mathematics, which correspond to other fields of knowledge. These are channels that connect mathematics to these fields of knowledge - also to philosophy. These concepts can be reduced neither to logic, nor to mental constructions nor empirical facts. For Riemann, such irreducible mathematical being was the concept of a manifold, for Dedekind - the principle of continuity, for Cantor - the concept of an infinite set. Poincaré claimed that the truth of every mathematical theorem is based on the principle of mathematical induction. The author closes the work with the presentation of the fact of irreducibility of the concept of *continuum*.





## Indeks nazwisk:

### A

Ajdukiewicz K. 57, 61, 63, 66, 215,  
 Alembert J.R. d' 7, 110, 111, 115,  
 Aleksandrow P. 185,  
 Anaksagoras 41, 229,  
 Anaksymander 40, 41  
 Anaksymenes 229,  
 Anderson R.D. 199, 209,  
 Archimedes 1, 5, 7, 10, 12, 52, 81, 89,  
 90, 93, 129, 130, 140, 144, 162, 226, 227,  
 Arystoteles 1, 5-7, 26, 27, 35, 37, 41,  
 53-55, 57-59, 65, 66, 68, 70, 71, 78,  
 81, 82, 86, 90, 92, 93, 103, 130, 132,  
 152, 160, 170, 185, 186, 197, 214,  
 215, 237, 238, 240,  
 Aull C.E. 2,

### B

Balmer J. J. 239,  
 Baran B. 92, 241,  
 Barrow John 233,  
 Baumgarten A.G. 131, 132, 133, 164,  
 Bergson H. 77,  
 Berkeley G. 77, 160,  
 Bernoulli J. 141,  
 Betti E. 41,  
 Bing R.H. 11, 65, 190, 199, 201, 202,  
 208, 209,  
 Bole Th. 166,  
 Boole G. 174, 204,  
 Bolzano B. 7-10, 36, 42, 107-109,  
 115, 117, 118, 127-129, 131-136,  
 139, 149, 154, 155, 160, 161, 164,  
 165, 171, 173, 174, 177-179, 184,  
 189, 190, 203, 207, 228,  
 Borel E. 174, 177, 178, 185,  
 Bottazini U. 167,

Boyer C.B. 114,  
 Brouwer L.E.J. 10, 11, 36, 130,  
 179-181, 183, 184, 186, 190, 193, 197,  
 202, 204, 207, 212, 216, 217, 240,  
 Buber M. 68,  
 Bury R.G. 93,

### C

Cantor G. 2, 8-10, 13, 16, 36, 37, 42, 46,  
 50, 55, 107, 110, 118, 135, 148-152, 154,  
 156-158, 160-162, 166, 167, 170, 171, 174-  
 176, 178, 190, 197, 202, 203, 205, 214,  
 225, 240,  
 Cantor M. 1  
 Carnot L. 114,  
 Casorati F. 161,  
 Cauchy A.L. 2, 7, 8, 41, 107, 109, 110,  
 115, 118, 146, 166,  
 Chajrefont 68,  
 Charatonik J.J. 2,  
 Cichowicz St. 92,  
 Cousin J. A. 178,

### D

Darboux G. 153,  
 Dąmbska I. 114,  
 Dedekind R. 1, 8-10, 13, 36, 107, 110, 118,  
 139, 140, 144-146, 151, 152, 154, 161, 162,  
 164, 166, 167, 170, 171, 174, 203, 205,  
 225, 240,  
 Demokryt 39  
 Dirichlet P.G.L. 8, 118, 122, 123, 146, 148,  
 164, 166,  
 Duda R. 13, 37, 65,

**E**

Einstein A. 238,  
 Empedokles 41, 217, 229,  
 Eneström H.G. 2, 17  
 Engelking R. 65  
 Eublides 24, 26, 57, 63,  
 Eudoksos 1, 3, 41, 51, 52, 53, 84, 85,  
 140, 144,  
 Euklides 85, 86, 92, 130, 132  
 Euler L. 41, 167,

**F**

Fourier J. B. 146, 147, 203,  
 Frechet M. 166, 174, 178, 185, 190,  
 Fredholm L. 173,  
 Frege G. 2, 3, 32, 33, 34, 37, 106,  
 115, 221, 239, 240,  
 Freudenthal H. 117, 164,

**G**

Gadacz T. 114,  
 Galileusz 119,  
 Galois E. 230,  
 Gassendi P. 37  
 Gauss C. F. 41, 136, 137, 152, 160,  
 165, 167, 230, 231, 241,  
 Grassmann H. 221,  
 Grua G. 92, 114,

**H**

Hadamard J. 19, 37, 169,  
 Hankel H. 161,  
 Hausdorff F. 44, 45, 150, 167, 201,  
 Hegel G. W. F. 20, 95,  
 Heidegger M. 12, 78, 79, 93, 223,  
 224, 241,  
 Heine E. 148, 166, 178,  
 Henderson G.W. 199, 209,  
 Heraklit 40  
 Herbart J. F. 8, 118, 124, 125, 136, 137,  
 Heyting A. 207,  
 Hilbert D. 18, 50, 130, 164, 169, 171,  
 201, 221, 239,  
 Hobbes T. 160,

Hospital G. F. A. de l' 7, 107, 115,  
 Hume D. 77,  
 Hurewicz W. 165,  
 Husserl E. 77, 112, 115, 158, 167,

**I**

Ingarden R. 92,

**J**

Janiszewski Z. 10, 11, 36, 46, 130, 169-  
 173, 179, 184-187, 189, 190-199, 202, 207-  
 209, 212, 217, 240,  
 Johnson D.M. 1, 92, 164, 165,  
 Jordan C. 41, 131, 153, 174, 180, 190, 207,  
 Juskiewicz A.P. 92

**K**

Kant I. 8, 13, 75, 92, 118, 124, 137, 170,  
 172, 221, 222, 240,  
 Kartezjusz (Descartes René) 6, 7, 8, 73, 92,  
 95-101, 104-106, 110-112, 114, 117, 129,  
 154, 158, 160, 170, 172, 214, 215, 223,  
 Kästnar A.G. 2, 16, 37, 132, 133, 165,  
 Klein F. 49, 173, 228, 229, 230,  
 Knaster B. 11, 36, 176, 178, 179, 189, 196,  
 197, 198, 199, 200, 201, 202, 208, 209,  
 212,  
 Koestier K. 2  
 Kokowski M. 13  
 Koyre A. 82,  
 Kronecker L. 161, 162, 168, 179,  
 Kuhn T. 16,  
 Kuratowski K. 2, 10, 36, 65, 167, 176, 178,  
 179, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 198,  
 199, 208,  
 Kuzańczyk M. 11, 71, 72, 92, 96,

**L**

Lagrange J. 7, 111, 115,  
 Lakatos I. 2, 3, 12, 19, 20, 21, 34, 35, 37,  
 222, 224, 225, 241,  
 Lanza D. 65  
 Laplace P. S. 122,  
 Lebesgue H. 169, 173, 174, 177, 178, 185,

Leibniz G. W. 1, 6, 7, 8, 32, 61, 74,  
75, 92, 95, 101, 103-107, 109-112,  
114, 117, 129, 130, 131, 136, 154,  
160, 170, 215, 226, 228,  
Lennes N. J. 175, 176, 207,  
Lhuillier S. 7, 111, 115,  
Lie S. 173,  
Lipschitz R. 148,  
Listing J. B. 41,  
Locke J. 160,  
Loria G. 2, 16, 37  
Lorentz H. A. 238, 239,  
Lowen R. 2,

**M.**

Mazurkiewicz S. 11, 36, 169, 179,  
189, 193, 195-199, 208, 209, 240,  
Menger K. 143, 199,  
Minkowski H. 169,  
Moise E. E. 11, 190, 198, 199, 200,  
201, 202, 208, 209,  
Moore R.L. 209,  
Motycka A. 13,  
Möbius A. 41,

**N**

Nagata J. 65,  
Newton I. 102, 107, 114, 119, 121,  
122, 123, 124, 126, 238,

**O**

Okham W. 109, 227,

**P**

Pauli W. 239,  
Pascal B. 141,  
Peano G. 190,  
Peirce C.S. 12, 218, 219, 220, 221, 222,  
Pedersen O. 82, 92,  
Placek T. 241,  
Planck M. 239,  
Platon 5, 12, 41, 50, 51, 65, 68-70, 81,  
83-85, 89, 90, 92, 163, 199, 214, 229, 241,  
Plotyn 68,

Picard E. 169,  
Poincaré H. 13, 19, 41, 169, 170, 173, 185,  
230, 240, 241,  
Pollard St. 166,  
Popper K. 16, 76, 77, 92, 129,  
Ptolemeusz K. 130,

**Q**

Quine W.O. 221,

**R**

Riemann B. 8-10, 12, 36, 59, 117-129, 130,  
136-139, 146-148, 154, 155, 161, 162, 164,  
165, 166, 170, 171, 173, 174, 179, 189,  
203, 240,  
Riesz F. 175, 176, 207,  
Robinson A. 12, 225, 226, 228, 241,  
Rosenzweig F. 77, 95, 96, 114,  
Rosińska G. 13,  
Rotter K. 37  
Russel B. 25, 240,

**S**

Schoenflies A. 175, 179, 180, 181, 184,  
207,  
Schroder E. 221,  
Schumacher H. 152, 167,  
Sektus Empiryk 90, 93,  
Sidorek J. 167,  
Sierpiński W. 36, 46, 169, 179, 196, 197,  
209, 217, 240,  
Siwek P. 241,  
Skoczny Wl. 92  
Smirnow W. 65,  
Sokrates 5, 68, 69, 71, 80, 81, 92, 96,  
Speusippus 93,  
Spinoza B. 160,  
Sujczyńska M. 37

**T**

Tales z Miletu 40, 229,  
Tannery P. 2, 16, 37,  
Tarski A. 2, 3, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31,  
32, 34, 35, 37, 128, 164,



Teubner B.G. 164,  
Thom R. 1, 2, 36, 37, 204, 205, 209,  
Thomas I. 93,  
Tichonow A. 49, 50,  
Tomasz z Akwinu św 68,  
Torretti R. 165,

## U

Urysohn P. 49, 134, 185, 197, 204,  
209, 216,

## V

Van Egmond W. 167,  
Van Fraassen 233, 236,  
Vetter Q 2, 17, 37,  
Vico G. 36  
Volterra V. 173,

## W

Wallman H. 165,  
Weber H. 164,  
Weierstrass K. 8, 9, 107, 110, 118, 150,  
164, 167, 174, 177, 178,

Weyl H. 1, 55, 66, 140, 166, 239, 241,  
Wittgenstein L. 12, 222, 223, 241,  
Whewell W. 37,  
Whyburn G. T. 2,  
Wolff Ch. 131,  
Wójcik W. 37, 241,

## Y

Yoneyama K. 193, 208,  
Young W.H. 175, 207,  
Young G.C. 175, 207,

## Z

Zenon z Elei 1, 5, 35, 53, 55-63, 112, 114,  
167, 178, 197, 207, 214, 215, 216, 217,  
240,  
Zamecki S. 13,  
Zermelo E. 154, 169, 171,

## STUDIA COPERNICANA

- I. Aleksander Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences et de la philosophie du Moyen Âge*, Wrocław, 1970.
- II. Mieczysław Markowski, *Burydanizm w Polsce w okresie przedkopernikańskim*, Wrocław, 1971.
- III. Barbara Bieńkowska, *Kopernik i heliocentryzm w polskiej kulturze umysłowej do końca XVIII wieku*, Wrocław, 1971.
- IV. Aleksander Birkenmajer, *Études d'histoire des sciences en Pologne*, Wrocław, 1972.
- V. *Colloquia Copernicana I. Études sur l'audience de la théorie héliocentrique* (Toruń, 1973), Wrocław, 1972.
- VI. *Colloquia Copernicana II. Études sur l'audience de la théorie héliocentrique* (Toruń, 1973), Wrocław, 1973.
- VII. Marian Biskup, *Regesta Copernicana*, Wrocław, 1973.
- VIII. Marian Biskup, *Regesta Copernicana. Calendar of Copernicus' Papers*, Wrocław, 1973.
- IX. Bronisław Biliński, *Najstarszy życiorys Mikołaja Kopernika z roku 1588 pióra Bernardina Baldiego*, Wrocław, 1973.
- X. Karol Górski, *Łukasz Watzenrode. Życie i działalność polityczna (1447-1512)*, Wrocław, 1973.
- XI. Grażyna Rosińska, *Instrumenty astronomiczne na Uniwersytecie Krakowskim w XV wieku*, Wrocław, 1974.
- XII. Zofia Wardęska, *Teoria heliocentryczna w interpretacji teologów XVI wieku*, Wrocław, 1975.
- XIII. *Colloquia Copernicana III. Proceedings of the Joint Symposium of the IAU and the IAHS. Astronomy of Copernicus and Its Background* (Toruń, 1973), Wrocław, 1975.
- XIV. *Colloquia Copernicana III. Conférences des Symposia: l'audience de la théorie héliocentrique. Copernic et le développement des sciences exactes et sciences humaines* (Toruń, 1973), Wrocław, 1975.
- XV. *Witelonis Perspectivae Liber Primus*. Book I of Witelo's, *Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary, and Latin Edition of the Mathematical Book of Witelo's *Perspectiva* by Sabetai Unguru, Wrocław, 1977.

- XVI. *Science and History. Studies in Honor of Edward Rosen*, Wrocław, 1978.
- XVII. *Nicholas. Copernicus. Quincentenary Celebrations, Final Report*, edited by Zofia Wardęska, Wrocław, 1977.
- XVIII. Jerzy Drewnowski, *Mikołaj Kopernik w świetle swej korespondencji*, Wrocław, 1978.
- XIX. Jerzy Burchardt, *List Witelona do Ludwika we Lwówku Śląskim. Problematyka teoriopoznawcza, kosmologiczna i medyczna*, Wrocław, 1979.
- XX. *Georgii Joachimi Rhetici Narratio Prima*. Édition critique, traduction française et commentaire par Henri Hugonnard-Roche et Jean-Pierre Verdet, avec la collaboration de Michel Lerner et Alain Segonds, Wrocław, 1982.
- XXI. Erna Hilfstein, *Starwolski's Biographies of Copernicus*, Wrocław, 1980.
- XXII. Grażyna Rosińska, *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracov. A Census of Manuscript Sources, 14-16th Centuries*, Wrocław, 1984.
- XXIII. *Witelonis Perspectivae Liber Quintus. Book V of Witelo's Perspectiva*. An English Translation with Introduction and Commentary, and Latin Edition of the First Catoptrical Book of Witelo's Perspectiva by A. Mark Smith, Wrocław, 1983.
- XXIV. Grażyna Rosińska, *Optyka w XV wieku. Między nauką, średniowieczną a nowożytną. Fifteenth-Century Optics. Between Medieval and Modern Science*, Wrocław, 1986.
- XXV. Pavel Spunar, *Repertorium auctorum Bohemorum protractum idearum post Universitatem Pragensem conditam illustrans*, vol. 1, Wrocław, 1985.
- XXVI. Jane L. Jervis, *Comentary Theory in Fifteenth-Century Europe*, Wrocław, 1985.
- XXVII. *Thomae de Wratistavia Practica medicinalis*. A Critical Edition of the Practica medicinalis of Thomas of Wrocław, Prémontré, Bishop of Sarepta (1297- c. 1378) by Theodore Antry, O. Praem., Wrocław, 1989.
- XXVIII. *Witelonis Perspectivae liber secundus, et liber tertius*. Books II and III of Witelo's Perspectiva. A critical Latin Edition and English translation with Introduction, Notes and Commentaries by Sabetai Unguru, Wrocław, 1991.
- XXIX. *Witelona Perspektywy księga II i księga III*. Przekład na język polski ze wstępem, opracowaniem i komentarzami. Redaktor przekładu: Witold Wróblewski. Przekład, opracowanie i komentarze: Lech Bieganowski, Andrzej Bielski, Roman S. Dygdała, Witold Wróblewski, Wrocław, 1991.
- 1 (XXX). Janice Adrienne Henderson, *On the Distances, between Sun, Moon, and Earth according to Ptolemy, Copernicus and Reinhold*, Leiden, 1991.
- XXXI. Jerzy Burchardt, *Kosmologia i psychologia Witelona*, Wrocław, 1991.

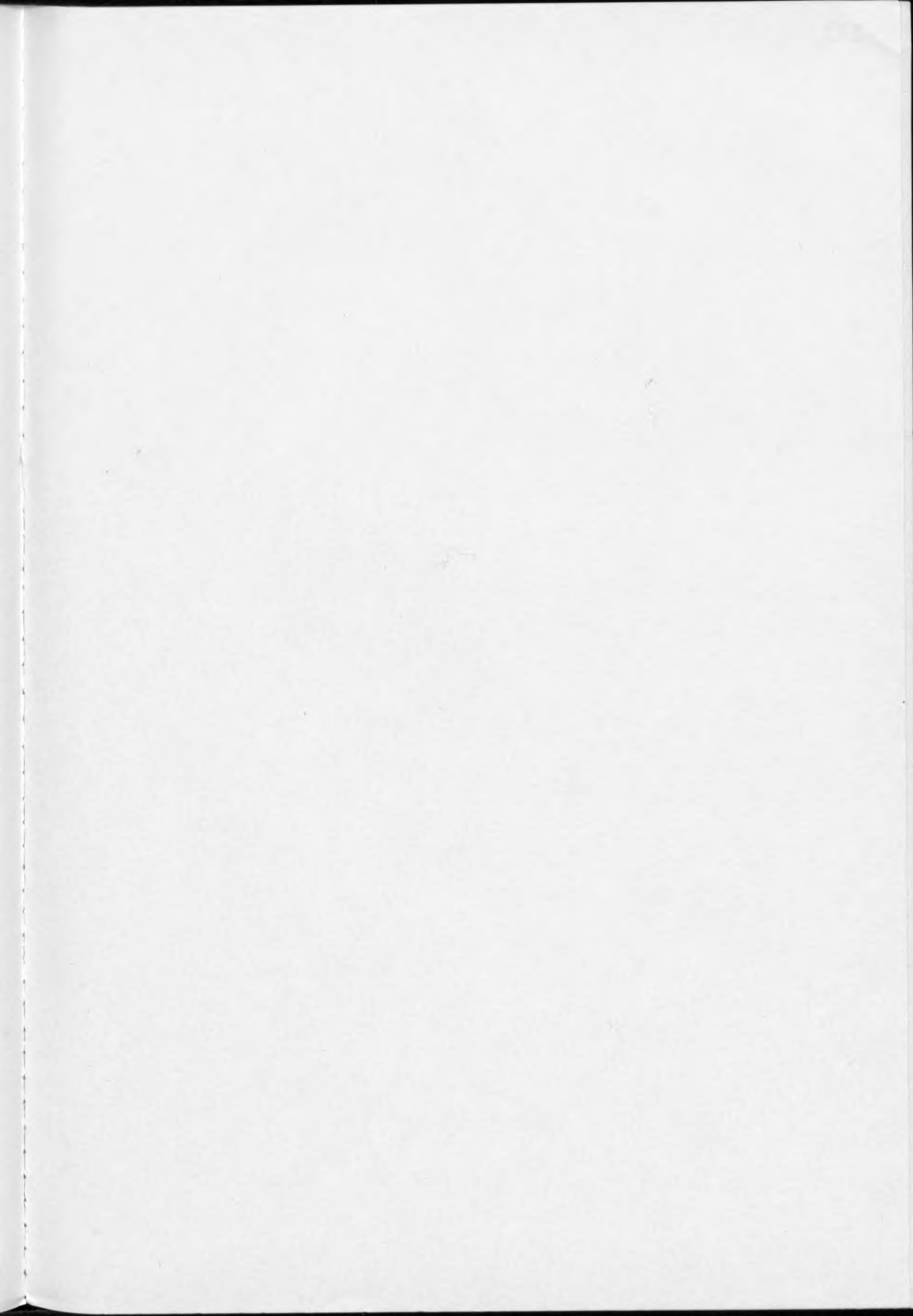
- XXXII. Elżbieta Witkowska-Zaremba, *Musica Muris i nurt spekulatywny w muzykografii średniowiecznej*, Warszawa, 1992.
- XXXIII. *Witelona Perspektywy księga IV*. Przekład na język polski ze wstępem i komentarzami. Przekład: Witold Wróblewski. Wstęp, opracowanie przekładu i komentarz: Lech Bieganowski, Andrzej Bielski, Witold Wróblewski, Wrocław, 1991.
- XXXIV. Jacek Soszyński, *Kronika Marcina Polaka i jej średniowieczna tradycja rękopiśmienna w Polsce*, Warszawa, 1995.
- XXXV. Pavel Spunar, *Repertorium auctorum Bohemorum propectum idearum post Universitatem Pragensem conditam illustrans*, tomus II, Varsaviae - Praeae, 1995.
- XXXVI. Jerzy Burchardt, *Higiena wedle Tomasza z Wrocławia*, Warszawa, 1997.
- XXXVII. Stefan Swieżawski, *L'Univers. La philosophie de la nature au XVe siècle en Europe*, Varsovie, 1999.



Ac. Fca









STUDIA COPERNICANA

published by the Polish Academy  
of Sciences present COPERNICUS'  
work and related problems of his  
times as well as the scientific  
developments preceding his discovery  
and the impact of his ideas.

Jacket: "Smile's Horseshoe"  
from *Fundamenta*  
*Mathematica* III, 1922, s. 216

Binding: figure from  
*De revolutionibus* III, 20

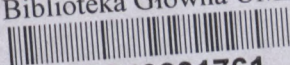


Czyt. Pomorz.  
Biblioteka

Główna  
UMK Toruń

814819

Biblioteka Główna UMK



300040331761

Czył. Pomorz

Biblioteka

Główna

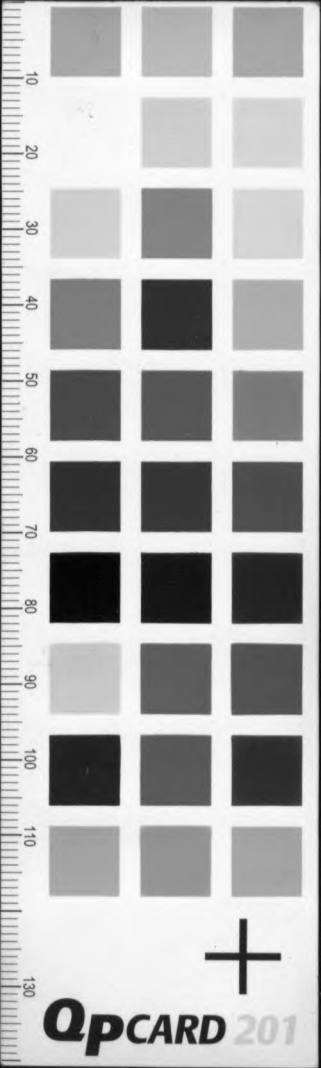
UMK Toruń

814819

WYDAWNICTWA IHN PAN

PL ISSN 0081-6701  
ISBN 83-86062-86-X





**QpCARD** 201