NOUVELLE SOLUTION

DU PROBLÈME

DE LA TRISECTION D'UN ANGLE

PAR

Dr. THÉOPHILE ŻEBRAWSKI.

CRACOVIE,

D. E. FRIEDLEIN, LIBRAIRE-ÉDITEUR

1862

1. La trisection d'un angle occupait plusieurs géomètres tant anciens, que modernes; et malgré, que les résultats de leurs éfforts n'étaient satisfaisants, eu égard aux difficultés, qui se présentent, en résolvant ce problème par la construction, néanmoins leurs récherches ne sont point sans prix, les conduisant dans la Géométrie à plusieurs découvertes, qui ont facilité, ou enrichi cette science.

2. Les moyens indiqués par les anciens, de même que ceux d'analystes modernes, pour résoudre le dit problème, se réduisent à l'une de deux constructions suivantes.

3. Étant donné un angle *BCD*, prolongeons son côté *BC*, et du sommet *C* comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons un demicercle *BDA*. Il faut par le point *D* mener une droite *DF*, de manière que sa partie *EF* comprise entre la circonférence, et le prolongement du côté *BC*, soit égale au rayon *CD*. Alors les points *C* et *E* étant joints par une droite *CE*, il est aisé à démontrer, que l'angle *BFD* est le tiers de l'angle donné *BCD*. Fig. 1.

4. D'un point *B*, pris à volonté sur un des côtés de l'angle donné *BCA*, abaissons une perpendiculaire *BD* à l'autre côté *CA*, construisons le rectangle *DBEC*, et prolongeons *EB* vers *F*. Il faut par le point *C*, mener une droite *CF* de manière, que sa partie *GF* ait la longueur deux fois si grande, que la diagonale *CB*. Alors l'angle *CFE*, ou son égal *FCA*, sera le tiers de l'angle donné *BCA*; Fig. 2.

ce qui n'est pas difficile à démontrer, ayant divisé la longueur FG en deux parties égales par le point H, et joint les points H et B, par une droite HB.

Fig. 1. 5. Mais, pour déterminer le point E dans la première construction (3), nous n'avons pas de moyen facile, c'est-à-dire, nous ne pouvons résoudre ce problème à l'aide de droites et du cercle. Il y faut tracer une conchoïde inférieure .... $GDHDE$ .... dont le point D est le pôle, BA est l'axe, et les coordonnées concourantes ont le rayon CD pour la longueur; et c'est l'intersection de cette courbe, avec la circonférence, qui marquera le point cherché E.

Fig. 2. 6. Dans la seconde résolution (4.), pour trouver le point F, il faut par le point D, et entre les asymptotes EK et EF, tracer une hyperbole .... IDL ...., puis du point D comme centre, et avec le rayon double de CB, décrire un arc MIN, dont l'intersection avec l'hyperbole marque le point I; enfin la droite IF, perpendiculaire à FE, nous donnera le point cherché F.

7. Il y a encore d'autres constructions, qui résolvent le problème de la trisection; mais chacune d'elles nous fait tracer comme courbe auxiliaire une conchoïde de Nicomède, une cissoïde de Diocles, une hyperbole, ou deux paraboles. Ce qui rend difficile la résolution du problème, et détourne de l'usage de tous ces moyens dans la pratique, d'autant plus, que pour chaque angle il faut changer les dimensions et les positions des courbes, prises à ce but.

Fig. 3. 8. En cherchant une construction plus facile, je suis parvenu au théorème suivant. Par un point B, pris hors du cercle donné, menons deux tangentes BA et BE, et marquons les points de contact G et D: puis sur une de

ces tangentes portons la longueur DB, de D en E; enfin par les points E et S, faisons passer la droite EC, jusqu'à la rencontre de la droite AB: alors l'angle CEB sera le tiers de l'angle ACE. Car, si nous joignons les points S et B, nous aurons dans les triangles SGB, SDB et SDE les angles $SBG = SBD = SED$: mais la somme de ces trois angles est égale à l'angle ACE extérieur au triangle CEB, donc l'angle $CEB = \frac{1}{3} ACE$.

9. Il s'ensuit, qu' étant proposée la trisection d'un angle donné ACE, il s'agit de prendre à son gré un point S sur l'un de ses côtés, et de ce point comme centre, décrire un cercle tangent à l'autre côté: puis tracer une droite EB tangente au même cercle, de telle sorte que sa longueur EB, interceptée entre le côté CE, et le prolongement de l'autre côté AC, soit coupée par le point de contact D, en deux parties égales: alors on aura l'angle $CEB = \frac{1}{3} ACE$. Fig. 3.

10. Or pour mener une tangente, qui réponde à la condition ci-dessus indiquée, il s'agit de trouver la position de l'un de ses points, savoir, le point de contact D, ou le point B de l'intersection de cette tangente avec le prolongement du côté AC de l'angle donné, ou enfin le point E, où elle coupe l'autre côté du même angle; ce qui mène à trois constructions suivantes. Fig. 3.

11. Pour trouver le point de contact D, décrivons du point S comme centre, et avec un rayon d'une longueur quelconque, la circonférence du cercle, qui coupera les deux côtés de l'angle donné aux points par exemple e et b; joignons ces points par la droite eb, et du centre S abaissons la perpendiculaire Sd à eb. Répétons la même construction, en prenant à chaque fois un autre rayon pour décrire la circonférence, et nous obtiendrons une quantité Fig. 3.

suffisante des points, tels que D, d, d, ... pour pouvoir tracer la courbe . . . . $fFSDd$d . . . ., qui coupera la circonférence du rayon SG, au point cherché D. Car la tangente EB menée par ce point D, appartient à la suite des cordes, dont chacune est divisée par la courbe décrite, en deux parties égales (9.). Il est aisé de voir, que cette courbe est une hyperbole, qui donne deux points résolvants le problème, l'un D pour la trisection de l'angle donné ACE, et l'autre F, pour celle de l'angle supplémentaire ECB.

Fig. 4. 12. Cherchons maintenant l'autre point de la dite tangente, c'est-à-dire le point B, où elle rencontre le prolongement du côté AC de l'angle donné ACE. Pour y réussir, nous prendrons sur l'autre côté CE, un point quelconque e, et ayant mené par ce point une tangente ec au cercle, et marqué le point d de contact, nous ferons $db = de$: le point b appartiendra à une courbe .... $fWbF$ . . . . tracée par plusieurs points, que nous aurons trouvés, en se servant de la même construction, que pour le point b, et prenant à chaque fois un autre point sur le côté CE. Cette courbe coupera le côté AC convénablement prolongé, au point exigé B, et la tangente BE formera avec le côté CE un angle $CEB = \frac{1}{3} ACE$. Car la dite tangente est une de celles, qui étant appuyées d'un bout contre le côté CE, et de l'autre contre la courbe tracée, sont toutes coupées en deux parties égales, par les points de leur contact avec la circonférence du même cercle.

Fig. 4. 13. Examinant la courbe . . . . $fWbF$ . . . . on voit, que le point W est son sommet, où elle touche le cercle; le côté EC de l'angle donné est l'axe de la courbe, à l'égard duquel ses branches infinies sont symétriquement disposées. Si par un point quelconque b de cette courbe nous

faisons passer une parallèle bh au rayon Sd, qui correspond à ce point, nous aurons $bh=2Sd$: il est pareillement $BH=2Sd$, et ainsi de suite. Donc les coordonnées $bh, BH, \ldots$ toutes égales entr' elles, et égales au diamètre du cercle conducteur $WDGW$, et qui étant prolongées, se rencontrent successivement, ces coordonnéesdis-je, feront avec l'axe EQ les angles $Whb, WHB \ldots$, qui augmentent de plus en plus, à mesure qu'ils s'éloignent du sommet W de la courbe; mais un tel angle croissant n'aura jamais acquis la grandeur de l'angle droit, car alors la tangente qui y correspond, ne pourrait couper l'axe EQ, qui lui est parallèle. Si donc dans la distance égale à $2SD$, et parallèlement à l'axe EQ, nous menons de chaque côté de cet axe les droites TU, TU, elles seront les asymptotes de notre courbe.

14. On peut regarder cette courbe, comme une espèce de conchoïde, qui n'a pas du pôle constant, et dont les coordonnées, concourant successivement l'une avec l'autre, forment une autre courbe $\ldots POR \ldots$, qui est le lieu géométrique des pôles variables, et qui pour cette cause peut être nommée courbe pôlaire. Nous y voyons encore, que, comme les angles $dbP, DBP, \ldots$ sont droits, la courbe $\ldots fWF \ldots$ peut être tracée par le mouvement continu du sommet d'un angle droit, dont un des côtès serait tangent au cercle conducteur, l'autre tangent à la courbe pôlaire $\ldots POR \ldots$ Fig. 4.

15. D'après ce que nous avons dit ci-dessus (13.), que $BH=2DS=DC$, menons par les extrémités du diamètre DC, les droites DB et CH perpendiculaires à DC, et par le point H, où CH rencontre l'axe EQ, tirons HB parallèle à CD: nous obtiendrons un point B, qui appartient à la Fig. 5.

courbe . . . . *WFB* . . . . , ce qui nous enseigne un autre moyen de la décrire.

Fig. 5. 16. Pour faciliter le tracement de notre courbe, à l'aide de coordonnées, abaissons de points D et B, les perpendiculaires Dd et Bb à l'axe EQ, et prenons le centre S du cercle conducteur pour l'origine de coordonnées, qui soient exprimées par x' et y' pour le point de contact de la tangente au cercle, et par x et y pour notre courbe. Les triangles semblables DdS et EbB donnent :

$$dS : dD = bB : bE,$$

ou,

$$x' : y' = y : 2(x' + x)$$

de là

$$2x'(x' + x) = y'y \text{ . . . . (I).}$$

Dans les triangles semblables BbH et DdS, on a $BH = 2DS$, donc $Bb = 2Dd$, ou $y = 2y'$, et par conséquent :

$$y' = \frac{y}{2} \text{ . . . . (II).}$$

L'équation du cercle $x'^2 + y'^2 = r^2$ donne $x' = \pm \sqrt{(r^2 - y'^2)}$; ou mettant pour y' sa valeur $\frac{y}{2}$, (II), on aura

$$x' = \pm \sqrt{(4r^2 - y^2)} \text{ . . . . (III).}$$

Substituons dans l'équation (I) les valeurs de x' et y', indiquées par (II) et (III), elle sera changée en

$$y^2 - 2r^2 = \pm x\sqrt{(4r^2 - y^2)}$$

élevons chaque membre au quarré, nous aurons

$$y^4 - 4r^2y^2 + 4r^4 = 4r^2x^2 - x^2y^2 \text{ . . . . . . (IV)}$$

équation de notre courbe du quatrième degré, à quatre branches de la forme représenté sur la fig. 5. Faisons encore $r = 1$, il sera

$$y^4 - 4y^2 + 4 = 4x^2 - x^2y^2$$

et on en déduira

$$x = \frac{y^2 - 2}{\pm \sqrt{(4 - y^2)}} \text{ . . . . (V).}$$

17. Si dans l'équation précedente (V) nous substituons à la place de y les valeurs successives, exprimées en décimales du rayon du cercle conducteur, pris pour unité, nous viendrons aux résultats tels, que nous présente la table suivante.

Table des coordonnées de la trisécante double.*)

y	$x = \dfrac{y^2-2}{\mp\sqrt{(4-y^2)}}$
0,000	1,000
0,100	0,996
0,200	0,985
0,300	0,966
0,400	0,939
0,500	0,904
0,600	0,863
0,700	0,806
0,800	0,742
0,900	0,666
1,000	0,577
1,100	0,473
1,200	0,350
1,300	0,020
1,400	0,003
1,414	0,000
1,500	0,019
1,600	0,467
1,700	0,845
1,800	1,422
1,900	2,580
2,000	∞

18. Il est remarquable, que la position et les dimensions de la trisécante . . . . fWF . . . . ne dépendent, Fig. 4.

*) Je viens de lui donner cette dénomination, pour la distinguer d'une autre trisécante simple, que l'on verra dans la suite.

que de l'un des côtés de l'angle donné, et de la grandeur du rayon du cercle conducteur ; tandis que l'autre côté AC n'entre point dans la construction de cette courbe, et par conséquent, la grandeur de l'angle n'a aucune influence sur ses dimensions, ni sur sa position : ce qui n'avait pas lieu dans les constructions connues jusque là, dans lesquelles le tracement d'une courbe résolvante la trisection d'un angle donné, dépendait de la grandeur de cet angle, c'est-à-dire, de la position de chacun de ses deux côtés (7).

Fig. 6. 19. Il résulte de ce qui précède, que la trisécante jouit de cette propriété, qu'une fois décrite peut servir à diviser chaque angle donné en trois parties égales, et découpée d'une plaque métallique, en forme représentée sur la fig. 6. servira à ce but, comme instrument très-simple. Soit donné par exemple un angle ACE ; traçons une droite ab parallèle à AB, à la distance SG égale au rayon du cercle conducteur de la courbe ; puis marquons le point S, et décrivons de ce point pris pour centre le cercle tangent au côté AC. Alors l'axe de l'instrument étant appliqué au côté EC convenablement prolongé, de manière que le sommet de la courbe tombe exactement sur le point W, nous marquerons sur le côté AC prolongé le point D, et la tangente DE menée par ce point à la circonférence du cercle, formera avec le côté CE un angle $CED = \frac{1}{3} ACE$ (12).

Fig. 7. 20. Déterminons maintenant le point E, où la dite tangente coupe le côté CE de l'angle donné ACE. A ces fins, prenons sur le prolongemant du côté AC un point quelconque b, traçons par ce point une tangente bf, et marquons le point d de son contact ; enfin portons db, de d en e : le point e appartiendra à une courbe .... $PWGHWF$.... tracée par plusieurs points, déterminés de la même manière,

et cette courbe coupera le côté CE, dans le point cherché E. Car la tangente EB menée par ce point, comme une de celles, qui servaient à la construction de cette courbe, est divisée au point de contact D en deux parties égales. (9.)

21. Les propriétés de la courbe .... $PWGHF$ ...., Fig. 7
qui se présentent au premier coup d'oeil, sont 1° qu'elle est symétrique à l'égard de la droite GI, menée par le centre du cercle, et perpendiculaire à AB, et sur laquelle se trouve le noeud W de la courbe: 2° que pour chacun de ses points, comme par exemple pour le point E, il est $EL = 2DK$; d'où il résulte, que, puisque DK, savoir l'ordonnée du point de contact, ne peut jamais atteindre la grandeur de GO, ou du diamètre du cercle, car alors la tangente devrait être parallèle au côté AC, et par conséquent elle ne pourrait le rencontrer: pour cette raison, la droite MN, menée parallèlement à AB, à la distance $GI = 2GO$, est l'asymptote de nôtre courbe.

22. On y voit de même, comme dans la trisécante précédente, qu'on peut la tracer indépendamment de la grandeur de l'angle, dont on propose la trisection: donc cette courbe une fois décrite, pourra servir à diviser chaque angle en trois parties égales, et pareillement comme la précédente, découpée d'une plaque, nous fournira un instrument, propre à la résolution générale de ce problème. Soit par exemple l'angle donné ACE: tirons une droite ab, Fig. 8.
parallèle à AB, à la distance égale au rayon de la circonférence conductrice de la courbe: nous trouverons le point S, duquel comme centre, ayant décrit un cercle tangent au côté AC, élevons la perpendiculaire GO à AC. Alors notre instrument trisecteur, appliqué à la droite GO, de la sorte indiquée sur la fig. 8, marquera le point E, par lequel une tangente EB, menée au cercle, faira avec le côté CE l'angle $CEB = \frac{1}{3} ACE$.

Fig. 7. 23. Nous nommons cette courbe trisécante simple. Pour la tracer à l'aide des coordonnées, prenons AB et GI pour les axes, et le point G pour l'origine: décrivons un cercle, tangent au point G à l'axe des abscisses; son équation sera exprimée par

$$x'^2+y'^2=2ry' \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

et pour chaque tangente au même cercle nous aurons

$$xx'+(y-r)(y'-r)=r^2 \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

où x' et y' désignent les coordonnées du point de contact, et x, y celles de chaque autre point de la tangente. Nous avons vu parmi les propriétés de la trisécante simple, ci-dessus indiquées (21.), que pour chacun de ses points, comme pour le point E, on a $DK=\frac{\mathrm{EL}}{2}$, ou

$$y'=\frac{y}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$$

mettons cette valeur à la place de y' dans l'équation du cercle (I), nous aurons

$$x'^2+\frac{y^2}{4}=ry,$$

et par conséquent

$$x'=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(4ry-y^2)} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV}).$$

Substituant dans l'équation (II) les valeurs de y' et x', prises de (III) et (IV), on en déduira

$$x=\frac{3ry-y^2}{\pm\sqrt{(4ry-y^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{V})$$

faisons encore $r=1$, l'équation précédente (V) sera transformée en

$$x=\frac{3y-y^2}{\pm\sqrt{(4y-y^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{VI})$$

24. Si à la place de y dans la dernière équation (VI) nous mettons successivement les valeurs numériques, exprimées en décimales du rayon r pris pour unité, nous pourrons calculer une suite d'abscisses, comme ci-dessous.

Table des coordonnées de la trisécante simple.

y.	$x = \dfrac{3y-y^2}{\pm\sqrt{(4y-y^2)}}$
0,0	0,0000
0,1	0,4643
0,2	0,6423
0,3	0 7688
0,4	0,8333
0,5	0,9449
0,6	1,0082
0,7	1,0593
0,8	1,1000
0,9	1,1315
1,0	1,1547
1,1	1,1701
1,2	1,1783
1,3	1,1796
1,4	1,1740
1,5	1,1618
1,6	1,1430
1,7	1,1176
1,8	1,0854
1,9	1,0463
2,0	1,0000
2,1	0,9462
2,2	0,8844
2,3	0,8142
2,4	0,7348
2,5	0,6455
2,6	0,5451
2,7	0,4323
2,8	0,3055
2,9	0,1736
3,0	0,0000
3,1	0,1856
3,2	0,4000
3,3	0,6154
3,4	0,9522
3,5	1,3228
3,6	1,8000
3,7	2,4583
3,8	3,4871
3,9	5,6205
4,0	∞

25. Comme l'une et l'autre de nos trisécantes, auraient dans la pratique cet inconvenient, que pour les angles très-aigus, ou très-obtus, leurs intersections avec les côtés de tels angles, étant très-obliques, les points demandés ne seraient pas exactement marqués, nons y indiquerons le moyen, pour remédier à cet inconvenient, en se servant
Fig. 9. d'un angle droit auxiliaire. Si par exemple on voulait diviser l'angle aigu ACB en trois parties égales, après avoir fait la construction préparatoire, c'est-à-dire, ayant marqué le point S, et décrit le cercle conducteur, tangent au côté AC, menons par ce point S une perpendiculaire DE à BC; nous aurons l'angle $ADE=ACB+90^0$: puis à l'aide de notre instrument l'un (19), ou l'autre (22), trouvons l'angle $DEF=\frac{1}{3}ADE$, menons EG parallèle à BC, et décrivons l'arc SOG, lequel coupons avec le même rayon, du G en O: enfin joignons E et O avec une droite EO, et nous obtiendrons l'angle cherché $OEF=\frac{1}{3}ACB$. Car $OEF =DEF-DEO=\frac{1}{3}ADE-30^0=\frac{1}{3}(ACB+90^0)-30^0=\frac{1}{3}ACB$

Fig. 10. 26. Prenons encore un angle très-obtus ACB, pour la trisection : ayant fait la construction préparatoire, menons par S la droite ED perpendiculaire à CB: l'angle ADE sera égal à $ACB-90^0$. A l'aide de l'instrument trisécant, nous trouverons l'angle $DEF=\frac{1}{3}ADE$; puis construons l'angle $FEG=30^0$, et nous aurons $DEG=\frac{1}{3}ACB$. Car $DEG=DEF +FEG=\frac{1}{3}ADE+30^0=\frac{1}{3}(ACB-90^0)+30^0=\frac{1}{3}ACB$.

27. Enfin il reste à remarquer, qu'en se servant à la fois de tous deux trisecteurs ci-dessus proposés, pour résoudre le problème de la trisection d'un angle donné, nous marquerons deux points sur ses deux côtés, et par là, le tracement de la tangente résolvante la question, sera plus exactement indiqué. —

Imprimerie de Breitkopf & Härtel à Leipsic.

Fig. 2.

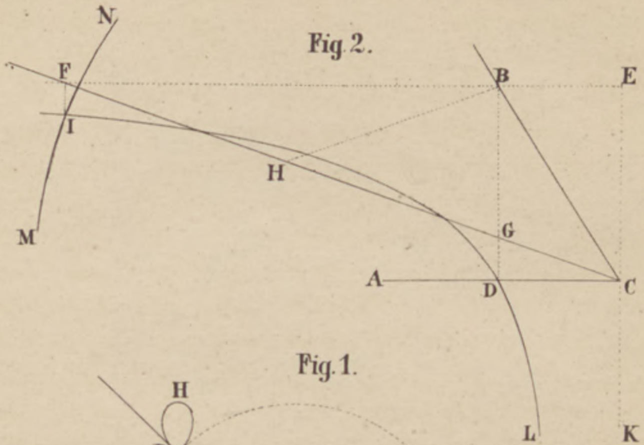


Fig. 1.

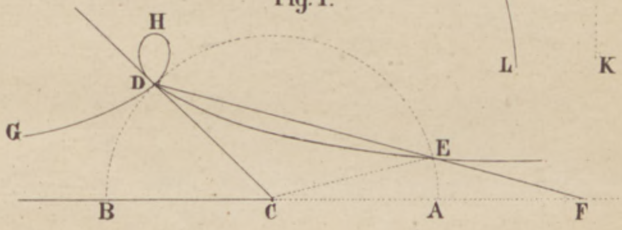
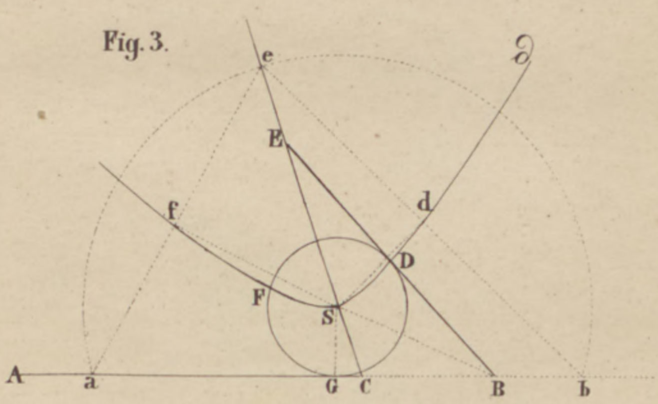


Fig. 3.



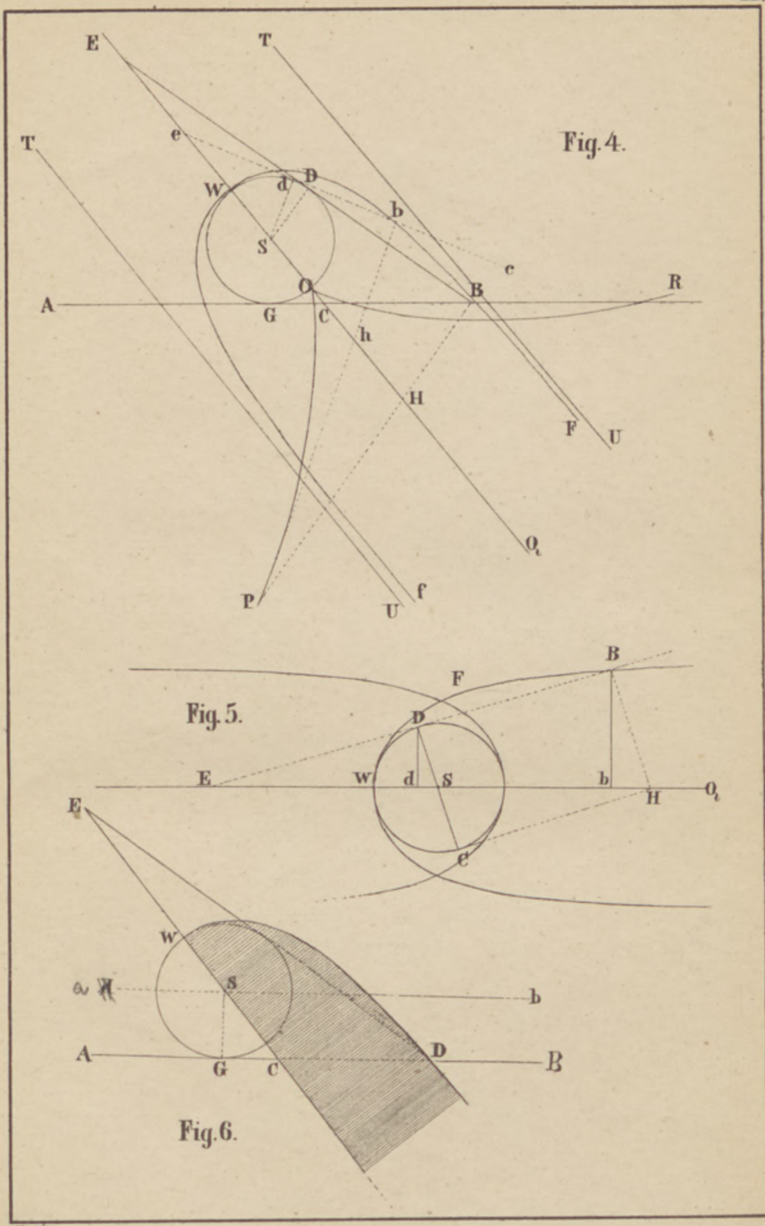


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

T. Z.

Fig. 7.

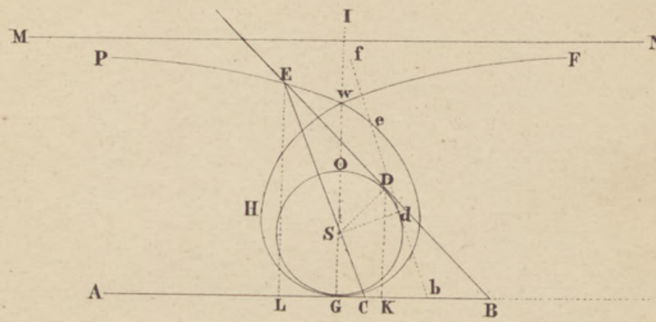


Fig. 9.

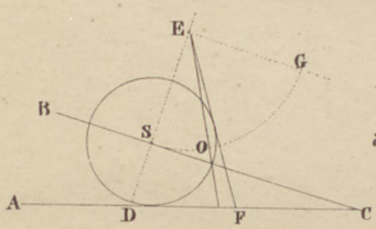


Fig. 8.

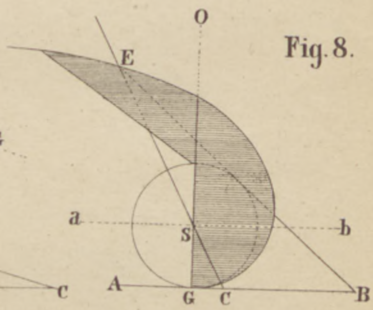
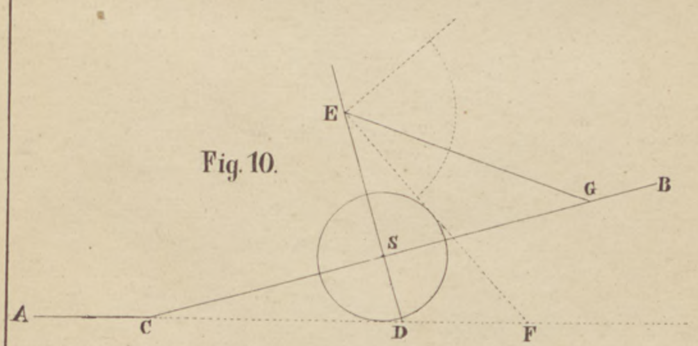


Fig. 10.



T. Ž.