DÉDUCTION ET DÉMONSTRATION

DE TROIS LOIS PRIMORDIALES

DE LA

CONGRUENCE DES NOMBRES

CONSTITUANT

LA TROISIÈME LOI DE L'ALGORITHMIE

DONNÉE PAR H. WRONSKI

PAR A. BUKATY

PARIS

AMYOT, ÉDITEUR, 8, RUE DE LA PAIX

AOUT. — 1873

DÉDUCTION ET DÉMONSTRATION

DE TROIS LOIS PRIMORDIALES

DE LA CONGRUENCE DES NOMBRES

CONSTITUANT LA TROISIÈME LOI UNIVERSELLE DE L'ALGORITHMIE

DONNÉE PAR H. WRONSKI

DÉDUCTION ET DÉMONSTRATION

DE TROIS LOIS PRIMORDIALES

DE LA CONGRUENCE DES NOMBRES

CONSTITUANT LA TROISIÈME LOI UNIVERSELLE DE L'ALGORITHMIE

DONNÉE PAR H. WRONSKI.

La commensurabilité ou finalité (τελείωσις) en grec, congruence (*congruentia*) en latin, est une des plus difficiles branches des Mathématiques. Les plus célèbres géomètres, comme Euler, qui élargit considérablement le champ de cette science; comme Lagrange, qui le cultiva avec zèle; comme Gauss, qui lui assura sa propre forme et sa méthode spéciale, n'aboutirent pas même à la solution complète des congruences du second degré. Wronski lui-même, avec sa toute-puissance mathématique, envisagea cette branche comme une des plus difficiies de la science, et après l'avoir complétement résolue, justement aigri contre l'inepte, hautaine et envieuse conduite envers lui des savants ses contemporains, il la publia comme une espèce de révélation, comme un défi éternel à ses adversaires, affirmant qu'ils ne sauraient s'en rendre compte jamais.

Voici en quoi consiste la question.

Soit une quantité inconnue x élevée à la puissance arbitraire m avec le module de congruence M, qui, divisant cette puissance, donne un quotient entier i avec un reste, résidu positif ou négatif, a.

Il en résultera manifestement l'expression :

$$x^m \equiv a \text{ (mod.} = \text{M)};$$

le signe $\equiv$ dénote que M doit diviser x^m en donnant pour quotient un nombre entier quelconque i avec le reste a, savoir :

$$x^m - a = i\mathrm{M}.$$

Mais il ne s'agit pas ici de l'égalité, il s'agit seulement de la divisibilité, et c'est à cause de cela qu'on emploie un signe distinct : $\equiv$

x est la racine de la congruence,
a, son résidu,
M, le module.

Leur relation réciproque constitue la triple loi fondamentale de toute congruence dans la théorie des nombres, et Wronski la donne sans aucune déduction, comme il suit (*) :

I. Résidu, $$a = (-1)^{\varpi+1}\left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m . \aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2m}}, \varpi\right]^{(\varpi-1)} + \mathrm{M}i.$$

II. Racine, $$x = h + (-1)^{\pi+k} . \aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}}, \pi\right]^{\pi-1} + \mathrm{M}j.$$

III. Module, $$\mathrm{M} \doteq \text{facteur}\left[a(1^{k|1})^{2m} - \left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m\right].$$

Il est inutile d'insister de quelle importance pour la raison et la science seraient la déduction et la démonstration de ces trois lois fondamentales cachées exprès par leur révélateur.

En approfondissant attentivement les principes de cette question, on finira par s'apercevoir que son germe, le noyau élémentaire, gît dans le composé primordial du module M; c'est là que peut se trouver le lien commun entre le module, la racine et le résidu.

En quoi consiste donc le composé primordial de tout nombre, et par conséquent du module M ? Il est immédiatement clair qu'il ne peut y avoir des éléments plus simples que les nombres primitifs 1. 2. 3... multipliés consécutivement, et constituant ce qu'on nomme factorielle en la dénotant par $1^{k|1}$, où k est le nombre des facteurs et 1 l'accroissement continu. C'est elle précisément qui forme la partie principale dans la loi de Wronski.

Mais, puisque tout nombre comparé avec le module se complète par son reste, dont il devient le reste, à son tour, dans la même comparai-

(*) Voir Montferrier, *Encyclopédie mathématique*, tome III, page 201.

son, il est évident que telles deux parties du module ont le même résidu, l'un en plus, l'autre en moins, parce que leur somme donne le module lui-même. Par exemple, pour le module 19, nous aurons $1 = 0. + 1$; $18 = 1.19 - 1$; $2 = 0.19 + 2$; $17 = 1.19 - 2 \ldots.$ $9 = 0.19 + 9$; $10 = 1.19 - 9$. Alors, pour avoir les résidus différents de l'expression $\frac{M}{1^{k|1}}$, il suffit de prendre pour l'exposant de la factorielle k la moitié seulement du module M diminuée d'unité, s'il est un nombre premier, ou généralement une semblable moitié de son plus petit premier facteur. Il faut bien remarquer que c'est le module qui doit d'abord être exprimé en factorielle avec ses résidus, et qu'ensuite ces expressions se rapporteront au module. Or, puisque les résidus de la factorielle sont doubles, mais de signe contraire, pour les avoir réduits il faut élever ladite factorielle au carré; c'est pour cela qu'on doit opérer sur l'expression $\frac{M}{(1^{k|1})^2}$.

L'exposant k de la factorielle constitue ainsi le genre de la congruence, et il est évident qu'à chaque genre k de la racine x et du résidu a on peut joindre son complément, qui peut aller jusqu'au module M, et constituer ainsi l'espèce de la congruence désignée par Wronski par la lettre h. La combinaison du genre k avec l'espèce h réduira les opérations à leur minimum, qu'on ne saurait atteindre par aucune autre voie.

On transformera le module M en fonction de la factorielle $(1^{k|1})^2$ par la réduction connue d'un nombre en fraction continue. Soit un nombre S à exprimer par R au moyen des quotients et des restes consécutifs de la division, nous aurons :

$$\frac{S}{R} = a_1 + \frac{R_1}{R},$$

$$\frac{R}{R_1} = a_2 + \frac{R_2}{R_1},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = a_3 + \frac{R_3}{R_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{R\omega - 2}{R\omega - 1} = a_\omega + 0.$$

Pour avoir S en $a_1\ a_2 \ldots\ a_\omega$, il faut former les médiateurs comme dans des fractions continues, ou comme Wronski les désigne plus généralement par les fonctions aleph.

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{0}=1,\\
&\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{1}=a_1.\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{0},\\
&\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{2}=a_2.\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{1}+\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{0},\\
&\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{3}=a_3.\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{2}+\aleph\left[\frac{S}{R},\varpi\right]^{1}.
\end{aligned}
$$

Exemples. Soit $S=83$, $R=4$. Nous aurons pour les quotients $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ou les bases des fonctions aleph :

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{83}{4}=20+3\\[4pt]
\frac{4}{3}=1+1\\[4pt]
\frac{3}{1}=3\\[4pt]
\text{donc } \varpi=3
\end{array}\right\}
\text{ par conséquent }
\begin{array}{l}
\aleph\left[\frac{83}{4},3\right]^{0}=1,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{4},3\right]^{1}=20,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{4},3\right]^{2}=21,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{4},3\right]^{3}=83,
\end{array}
$$

et on voit en effet que la dernière fonction aleph donne le nombre 83 au moyen des quotients successifs des divisions.

Dans le cas où le diviseur serait plus grand que le dividende, on procède comme dans l'exemple qui suit :

Soit $S=83$, $R=256$; nous aurons pour quotients $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ou les bases des fonctions aleph :

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{83}{256}=0+83\\[4pt]
\frac{256}{83}=3+7\\[4pt]
\frac{83}{7}=11+6\\[4pt]
\frac{7}{6}=1+1\\[4pt]
\frac{6}{1}=6\\[4pt]
\text{donc } \varpi=5
\end{array}\right\}
\text{ par conséquent }
\begin{array}{l}
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{0}=1,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{1}=0,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{2}=1,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{3}=11,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{4}=12,\\[4pt]
\aleph\left[\frac{83}{256},5\right]^{5}=83,
\end{array}
$$

comme il devait être.

De cette manière le module M sera transformé en fonction des quotients de la division par la factorielle $(1^{k|1})^2$, et par conséquent tous les nombres dont il peut être diviseur. Or, les fonctions aleph sont notoirement les numérateurs dans les fractions intégrantes de $\frac{M}{(1^{k|1})^2}$, transformé en fraction continue, dont la différence est toujours $=1$; et comme la dernière de ces fractions intégrantes reproduit $\frac{M}{(1^{k|1})^2}$; et l'avant-dernière a pour numérateur $\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{(\varpi-1)}$ avec un dénominateur quelconque, en les réduisant au même dénominateur, on obtient par la différence des numérateurs $(1^{k|1})^2 . \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{\varpi-1} - 1 = qM$; mais le second membre est divisible par M, et par conséquent le premier nécessairement, il forme donc la congruence

$$(1^{k|1})^2 .\ \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{\varpi-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } M),$$

et partant par la même raison

$$(1^{k|1})^{2m} . \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{\pi-1} \equiv 1,$$

et élevant la première à la puissance m, il viendra

$$(1^{k|1})^{2m} \left\{\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{(\varpi-1)}\right\}^m \equiv 1;$$

enfin, en les divisant par le commun facteur $(1^{k|1})^{2m}$, nous obtiendrons la congruence finale :

$$\left\{\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^m \equiv \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{(\pi-1)} \ (\text{mod. } M), \qquad \text{(A)}$$

d'où

$$x = \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^2},\varpi\right]^{(\varpi-1)};$$

et le résidu

$$a = \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{(\pi-1)};$$

ce qui détermine complétement la congruence fondamentale

$$x^m \equiv a\ [\text{mod.} = \text{M}]$$

pour le genre k. Par exemple :

soit $\text{M} = 31,\ m = 2,\ k = 2,$

ce qui donne

$$x^2 \equiv a\ [\text{mod. } 31],$$

et pour la solution d'après la formule générale (A) on aura :

$$\left\{ \aleph\left[\frac{31}{4}, \varpi\right]^{\varpi-1} \right\}^2 \equiv \aleph\left[\frac{31}{16}, \pi\right]^{\pi-1} \text{ (mod. 31)}$$

En exécutant, il vient pour la racine :

$$\left.\begin{aligned} \frac{31}{4} &= 7 + 3 \\ \frac{4}{3} &= 1 + 1 \\ \frac{3}{1} &= 3,\ \varpi = 3 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \begin{aligned} \aleph\left[\frac{31}{4}, 3\right]^0 &= 1, \\ \aleph\left[\frac{31}{4}, 3\right]^1 &= 7, \\ \aleph\left[\frac{31}{4}, 3\right]^2 &= 8; \end{aligned}$$

c'est la racine.

et pour le résidu :

$$\left.\begin{aligned} \frac{31}{16} &= 1 + 15 \\ \frac{16}{15} &= 1 + 1 \\ \frac{15}{1} &= 15,\ \pi = 3 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \begin{aligned} \aleph\left[\frac{31}{16}, 3\right]^0 &= 1, \\ \aleph\left[\frac{31}{16}, 3\right]^1 &= 1, \\ \aleph\left[\frac{31}{16}, 3\right]^2 &= 2; \end{aligned}$$

c'est le résidu.

La solution est donc $8^2 \equiv 2$ (mod. 31), et en effet $64 - 2 = 2.31$.

Soit encore $\text{M} = 83$, $m = 3$, congruence du 3^e degré;

$$x^3 \equiv a \text{ (mod. 83)}.$$

Prenons pour le genre $k = 3$. La formule générale donne la solution :

$$\left\{ \aleph\left[\frac{83}{6}, \varpi\right]^{\varpi-1} \right\}^3 \equiv \aleph\left[\frac{83}{6^6}, \pi\right]^{\pi-1} \text{ (mod. 83)};$$

il viendra donc pour la racine x :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{83}{36}=2+11\\[2ex]
\dfrac{36}{11}=3+3\\[2ex]
\dfrac{11}{3}=3+2\\[2ex]
\dfrac{3}{2}=1+1\\[2ex]
\dfrac{2}{1}=2,\ \varpi=5
\end{array}\right\}\ \text{d'où}\
\begin{array}{l}
\aleph\left[\dfrac{83}{36},5\right]^{0}=1\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{36},5\right]^{1}=2,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{36},5\right]^{2}=7,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{36},5\right]^{3}=23,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{36},5\right]^{4}=30;
\end{array}$$

la racine est donc $30+i.83$; i est un nombre arbitraire quelconque.

Et pour le résidu on aura :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{83}{46656}=0+46656\\[2ex]
\dfrac{46656}{83}=562+10\\[2ex]
\dfrac{83}{10}\quad=8+3\\[2ex]
\dfrac{10}{3}\quad=3+1\\[2ex]
\dfrac{3}{1}\quad=3,\ \pi=5
\end{array}\right\}\ \text{d'où}\
\begin{array}{l}
\aleph\left[\dfrac{83}{46656},5\right]^{0}=1,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{46656},5\right]^{1}=0,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{46656},5\right]^{2}=1,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{46656},5\right]^{3}=8,\\[2ex]
\aleph\left[\dfrac{83}{46656},5\right]^{4}=25;
\end{array}$$

par conséquent le résidu $a=25$; la solution est donc

$$30^3\equiv 25\ (\text{mod. } 83).$$

Et en effet

$$27000-25=415\times 83.$$

Telle est la solution générale de la congruence fondamentale

$$x^m\equiv a\ (\text{mod. M}).$$

D'abord, lorsque le genre k est quelconque, compris dans ses limites, et l'espèce $h=0$,

I. Le résidu $$a=\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{(\pi-1)}+\mathrm{M}i.$$

II. La racine $$x=\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}+\mathrm{M}j.$$

Il faut cependant observer que les signes de la racine et du résidu dépendent de l'indice ϖ et du genre k, de sorte que leur expression complète devient

$$a = (-1)^{\pi+1}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{(\pi-1)} + \mathrm{M}i,$$

$$x = (-1)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{(\varpi-1)} + \mathrm{M}j.$$

Rien n'empêche ensuite que la racine du genre k ainsi déterminée ne soit complétée jusqu'au module M par l'adjonction de l'espèce h. Son expression définitive est donc

$$x = h + (-1)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1} + \mathrm{M}j,$$

et le premier membre de la congruence fondamentale sera ainsi :

$$x^m = \left\{h + (-1)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{(\varpi-1)}\right\}^m,$$

dont le développement est

$$\begin{aligned} x^m = h^m &+ mh^{m-1}\left\{(-1)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^1 + \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}h^{m-2}\left\{(-1)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}h^{m-3}\left\{(1-)^{\varpi+k}.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

en donnant en même temps, par l'influence de l'espèce h, au résidu la valeur et la forme

$$a = (-1)^{\pi+1}\left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m.\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{\pi-1},$$

son développement sera :

$$\begin{aligned} a = (-1)^{\pi+1}\Big\{ & h^m(1^{k|1})^{2m} + m(-1)^{(k+1)}h^{m-1}(1^{k|1})^{2(m-1)} + \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}(1-)^{2(k+1)}h^{m-2}(1^{k|1})^{2(m-2)} + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(-1)^{3(k+1)}h^{m-3}(1^{k|1})^{2(m-3)} + \dots\Big\}\aleph\left[\frac{\mathrm{M}}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{(\pi-1)}. \end{aligned}$$

Or, puisque

$$(1^{k|1})^{2(m-n)}.\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2(m-n)}},\pi\right]^{\pi-1}\equiv 1.$$

Toute congruence de la forme

$$ph^{(m-n)}(1^{k|1})^{2(m-n)}\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}},\pi\right]^{\pi-1}\equiv ph^{m-n}\left\{\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^{n},$$

en retranchant de $2m-2(m-n)=2n$, se transforme nécessairement en la suivante :

$$ph^{(m-n)}.\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2n}},\pi\right]\equiv ph^{m-n}\left\{\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}\right\}^{n},$$

qui est originairement démontrée ; et comme tous les termes du développement de la racine, comparés avec les termes correspondants du développement du résidu, rentrent précisément dans cette forme, ils se trouvent tous compris dans la congruence générale, qui par conséquent est rigoureusement démontrée.

Exemple. Soit la congruence du 3e degré :

$$x^3\equiv a \text{ (mod. 29)}.$$

La racine générale $x=h+(-1)^{\varpi+2}.\aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2}},\varpi\right]^{\varpi-1}$, dans ce cas particulier où $m=3$, $M=29$, en prenant le genre $k=2$, l'espèce $h=3$ devient

$$x=3+(-1)^{\varpi+2}.\aleph\left[\frac{29}{4},\varpi\right]^{\varpi-1}+29j,$$

et le résidu

$$a=(-1)^{\pi+1}\{3.4-1\}^{3}\aleph\left[\frac{29}{64},\pi\right]^{\pi-1}+29i.$$

En exécutant on obtient pour la racine :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{29}{4}=7+1\\[1em] \frac{4}{1}=4,\ \varpi=2\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \begin{array}{l}\aleph\left[\frac{29}{64},2\right]^{0}=1,\\[1em] \aleph\left[\frac{29}{4},2\right]^{1}=7;\end{array}$$

par conséquent la racine $x=3+7=10$.

En exécutant le résidu on a :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{29}{64} &= 0 + 64 \\
\frac{64}{29} &= 2 + 6 \\
\frac{29}{6} &= 4 + 5 \\
\frac{6}{5} &= 1 + 1 \\
\frac{5}{1} &= 5, \quad \pi = 5
\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \begin{aligned}
&\aleph\left[\frac{29}{64}, 5\right]^{0} = 1, \\
&\aleph\left[\frac{29}{64}, 5\right]^{1} = 0, \\
&\aleph\left[\frac{29}{64}, 5\right] = 1, \\
&\aleph\left[\frac{29}{64}, 5\right] = 4, \\
&\aleph\left[\frac{29}{64}, 5\right] = 5;
\end{aligned}$$

par conséquent le résidu

$$a = (12 - 1)^3 . 5 = 6655 \equiv 14 \ (\text{mod. } 29).$$

Et en effet,

$$10^3 - 14 = 34.29.$$

Si l'on veut vérifier terme par terme, on a :

$$x^3 = (3 + 7)^3 = 27 + 189 + 441 + 343 = 1000,$$

$$a = (12 - 1)^3 . 5 = (1728 - 432 + 36 - 1)5 = 8640 - 2160 + 180 - 5 = 6655;$$

alors pour la racine :

$$\begin{aligned}
27 &= 0.29 + 27 \\
189 &= 7.29 - 14 \\
441 &= 15.29 + 6 \\
343 &= 12.29 - 5 \\
\text{résidu général} & \quad\quad + 14
\end{aligned}$$

pour le résidu :

$$\begin{aligned}
8640 &= 297.29 + 27 \\
-2160 &= -74.29 - 14 \\
180 &= 6.29 + 6 \\
-5 &= 0.29 - 5 \\
& \quad\quad + 14.
\end{aligned}$$

Mais k épuise tous les genres de la racine et du résidu, de même h épuise tous leurs compléments jusqu'à la limite M, de sorte qu'aucune congruence possible ne saurait point échapper.

Il ne nous manque plus que de déterminer le module M. A cette fin, observons que, puisque

$$(1^{k|1})^{2m} . \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}}, \varpi\right]^{\varpi - 1} \equiv 1 \ (\text{mod. M}),$$

il est nécessairement

$$(-1)^{\varpi+1} . \left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m . (1^{k|1})^{2m} . \aleph\left[\frac{M}{(1^{k|1})^{2m}}, \varpi\right]^{\varpi - 1} \equiv \left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m$$
(mod. M)

et par conséquent

$$a(1^{k|1})^{2m} - \left\{h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m = \mathrm{M}i,$$

c'est-à-dire que la troisième loi téléologique des nombres doit être

$$\text{III.} \qquad \mathrm{M} = \text{facteur}\left\{a(1^{k|1})^{2m} - \left(h(1^{k|1})^2 + (-1)^{k+1}\right)^m\right\}.$$

La déduction et la démonstration sont donc rigoureusement accomplies et achevées.

Comment maintenant, dans un cas donné d'une congruence spéciale, par exemple $x^5 \equiv 17$ (mod. $= 37$), trouver les racines, ce qui constitue proprement la solution de la congruence? Il est manifeste qu'il faut obtenir le genre k et les espèces h; et comme ce sont deux inconnues pour une seule condition, la première k reste arbitraire au choix, la seconde h doit être déterminée. Inutile d'exposer cette question, car elle se trouve résolue avec les plus amples détails et de nombreux exemples dans la *Réforme des mathématiques* de Wronski (*) : c'est là qu'il faut la chercher. Notre tâche était de déduire et de démontrer les principes non dévoilés par leur illustre révélateur.

Tout ce qui constitue dans l'univers le concours ou l'accord des éléments de réalité, comme l'harmonie et la mélodie dans la musique, comme le merveilleux accord des évolutions célestes, comme la concrétion des atomes matériels pour former des divers corps, se manifestant par la force d'attraction ou répulsion; toute la génération des êtres organiques, leur sympathie ou antipathie, amour ou haine des êtres raisonnables, la perfection et concours réciproque de leurs sens, et même les manifestations paraissant dépasser leur organisme sensuel; tout cela est le résultat des rapports quantitatifs, commensurables et déterminés, autrement aucune réalité ne saurait se constituer. Telle est la sphère de la congruence dans la nature et dans la science appelée la téléologie.

(*) Wronski, *Réforme des mathématiques*, Paris, in-4°, pp. 592, CCCXXVIII.

TROIS LOIS

DE LA

THÉORIE DES NOMBRES

DE H. WRONSKI

AVIS

Dans son *Encyclopédie des Mathématiques*, basée sur les principes philosophiques de Wronski, — ouvrage dépassant tout ce que l'enseignement possédait jusqu'à présent, — Montferrier établit l'ensemble de la Théorie des Nombres sur les trois lois téléologiques de cette théorie, révélées, comme il le dit, par Wronski, tout en regrettant qu'elles y restent en état d'une véritable révélation.

Il est impossible, sans aucune déduction rationnelle, de se rendre compte de cette imposante puissance mathématique. Ceux qui éprouveraient quelque difficulté dans cette ardue branche du savoir, peuvent nous demander par écrit, ou dans une entrevue, des explications désirées sur toute la Théorie des Nombres ; nous nous engageons à lever toutes les difficultés.

S'adresser à l'auteur, M. A. BUKATY, 54, *rue Mazarine, à Paris.*

(AFFRANCHIR)

Typographie Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

T… …MBRES

Dans s… …sée sur les principes
philosoph… …nt tout ce que l'ensei-
gnement … …ét blit l'ensemble de
la Théori… …iq es de cette théorie,
révélées, … …n regrettant qu'elles y
restent en…

Il est impossible, sans aucune déduction rationnelle, de se rendre compte de cette imposante puissance mathématique. Ceux qui éprouveraient quelque difficulté dans cette ardue branche du savoir, peuvent nous demander par écrit, ou dans une entrevue, des explications désirées sur toute la Théorie des Nombres ; nous nous engageons à lever toutes les difficultés.

S'adresser à l'auteur, M. A. BUKATY, 54, *rue Mazarine, à Paris.*

(AFFRANCHIR)

Typographie Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.